



## آنالیز سازه های پوسته ای با استفاده از روش مجتمع نیروها و مقایسه آن با روش سختی

ناهید صوفیوند<sup>۱\*</sup>، وحیدرضا کلات جاری<sup>۲</sup>، محمدحسین طالب پور<sup>۳</sup>

۱- دانشجو، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه صنعتی شاهرود، سمنان، ایران

۲- دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه صنعتی شاهرود، سمنان، ایران

۳- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه دامغان، سمنان، ایران

### خلاصه

در روش تحلیلی مجتمع نیروها (IFM)، تمامی نیروهای مستقل به عنوان متغیرهای مجهول در نظر گرفته می شوند که بر اساس اعمال همزمان معادلات تعادل و شرایط سازگاری محاسبه می شوند. IFM با قابلیت های مختلفی نظیر تولید شرایط سازگاری در روند تحلیل، بر محدودیت های دیگر روش ها همچون روش نیروی مجهول اضافه (RFM) غلبه می کند. در محاسبه تنش ها IFM بدلیل درونیابی نیروها دارای دقت بالاتری نسبت به روش سختی (DM) است بعلاوه جهت تحلیل محیط های پیوسته، با کاهش تعداد المان ها از سرعت بالاتری برخوردار است. این مزایا سبب شده تا این روش تحلیلی برای مسائلی همچون ارتعاش آزاد و کماتش سازه ها نیز بکار گرفته شود. لذا در این مقاله به بررسی شیوه عملکرد روش IFM در تحلیل سازه های پوسته ای پرداخته و در نهایت مقایسه ای بین این روش و DM انجام شده است. در این راستا معادلات اساسی اجزای محدود روش IFM برای تجزیه و تحلیل سازه های پوسته ای همراه با مفاهیم DM ارائه شده است.

کلمات کلیدی: روش نرمی، روش مجتمع نیروها، روش سختی، سازه های پوسته ای.

### ۱. مقدمه

معادلات تعادل و سازگاری دو جزء اصلی برای حل مسائل سازه ای هستند. دقت عددی حل مسائل وابستگی زیادی به درجه این معادلات دارد. مفهوم تعادل همان معادلات تعادل نیرو و نوشتن معادلات ریاضی برای آنها است. سازه های معین به راحتی با استفاده از معادلات تعادل حل می شوند اما در سازه های نامعین علاوه بر معادلات تعادل به معادلات سازگاری نیز برای حل مسئله نیاز است. سنت و نان معادلات سازگاری را در قالب روابطی از کرنش برحسب تغییر شکل های جامدات بیان کرد [1]. سپس بلترامی و میشل معادلات سازگاری را براساس معادلاتی از تنش بیان کردند [2]. کلبچ معادلات تعادل را در روابطی از جابجایی بیان و مشاهده نمود که تعداد معادلات و جابجایی های مجهول یکسان می باشند [3]. این فرمولبندی منجر به روش

\* Corresponding author: M.sc of Structural Engineering  
Email: [nahidsofivand@yahoo.com](mailto:nahidsofivand@yahoo.com)

DM شد. ماکسول فرمولبندی دیگری برای معادلات سازگاری براساس مفهوم مجهول‌های اضافی بیان نمود که با عنوان RFM\* شهرت دارد [3-4]. این روش به سبب قابلیت‌های مختلف در محاسبات دستی در مقایسه با روش DM†، قبل از ۱۹۶۰ میلادی مورد توجه بسیاری از طراحان بود. اما پس از آن بدلیل قابلیت‌های برنامه نویسی توسط کامپیوتر، روش سختی تا حد زیادی جایگزین این روش گردید [3-5]. این مهم به طور کامل سبب حذف روش‌های مبتنی بر اصول نیرو نگردید و پیشنهادات بسیاری به منظور بهبود این روش‌ها بخصوص روش RFM ارائه شد [6]. اما ماتریس‌های حاصل از روش RFM و حتی DM بدلیل عدم وجود درونیابی خواص فیزیکی سازه، همواره سبب بروز خطا در نتایج می‌گردد. در این راستا پیشنهادات بسیاری در مورد بهبود روش‌های نیرو ارائه گردید، یکی از فرمولبندی‌های موثر روش‌های نرمی، روش IFM‡ است که توسط پاتنیک ارائه شده است [7-8]. این روش برخلاف روش‌های DM و نرمی که از مشتق جابجایی برای محاسبه تنش استفاده می‌کنند، از درونیابی نیروها استفاده می‌نماید. به همین سبب دارای دقت بالاتری در محاسبه تنش بوده و نیازمند تراکم مش کمتری در روند تحلیل سازه است. این قابلیت به همراه دیگر ویژگی‌ها سبب شده است که روش IFM در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین در حوزه‌های مختلف علوم مهندسی قرار گیرد [17]. بنابراین در این مقاله به ارائه فرمولبندی جامعی برای روش IFM جهت تحلیل سازه‌های پوسته‌ای پرداخته شده و سپس کاربرد آن برای تحلیل یک تیر طره مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲. روش مجتمع نیروها

در روش IFM، نیروها بعنوان متغیرهای مجهول در نظر گرفته می‌شوند که از حل معادلات ترکیبی تعادل و سازگاری بدست می‌آیند. روش‌هایی برای بهبود تولید معادلات سازگاری ارائه شده که منجر به تولید ماتریس نواری با ویژگی‌های مختلف پرفرمر می‌شود و توسط کامپیوتر قابل اجرا هستند [9-10]. در این راستا روش اجزاء محدود مبتنی بر IFM برای آنالیز دو بعدی [11] و سه بعدی [12] سازه‌ها توسعه یافته است که در تحلیل انواع سازه‌ها با المان‌های مختلف قابل اجرا می‌باشد. این روش نقص‌های موجود در RFM را (مانند ایجاد سازگاری بوسیله انتخاب المان‌های اضافی) برطرف می‌کند. روش IFM بطور موفقیت آمیزی برای تحلیل استاتیکی [6-11] و ارتعاش آزاد [13] سازه‌ها قابل کاربرد است. از دیگر قابلیت‌های این روش کسب معادلات روش DM [7] و RFM [14]، از معادلات روش IFM است. همچنین بهینه یابی سازه‌ها با استفاده از روش IFM، ابتدا توسط پاتنیک پیشنهاد شد، وی استفاده از روش IFM را برای کاربردهای مختلف بهینه یابی سازه‌ها مانند محاسبه طرح اولیه‌ی تحلیلی [18] جهت شناسایی نقاط تکین [19] و اصلاح کامل طرح نهایی ارائه داده است [20]. در این راستا عموماً طرح اولیه فرآیند بهینه یابی بصورت تجربی و یا تصادفی در نظر گرفته می‌شود. اما طرح اولیه مناسب را می‌توان از محاسبات تحلیلی با استفاده از روش IFM بدست آورد [18]. یک طرح اولیه‌ی خوب در سرعت فرآیند بهینه یابی جهت کسب طرح بهینه تاثیر بسزایی دارد. از سوی دیگر روش IFM ابزار مناسبی برای شناسایی طرح‌های تکین است که بیانگر نقاط بهینه محلی در عملیات بهینه یابی است [19]. این مزیت سبب کاهش تعداد تکرارهای فرآیند بهینه یابی شده و عموماً مانع از قطع عملیات بهینه یابی و همگرایی زودرس می‌شود.

\* -Redundant Force Method (RFM)

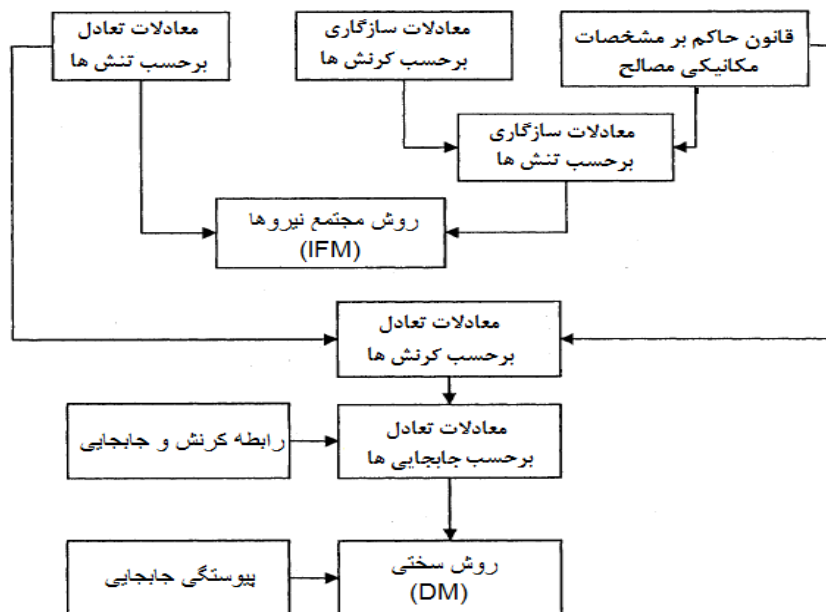
† -Displacement Method (DM)

‡ -Integrated Force Method

### ۱،۲. روش مجتمع نیروها در مقایسه با روش سختی

اخیراً روش‌های نرمی بعنوان روش‌هایی جایگزین برای DM مورد مطالعه قرار گرفته است. از سوی دیگر DM بدلیل انطباق با برنامه نویسی کامپیوتری روشی مناسب برای مکانیک سازه‌ها است. برنامه‌های اجزاء محدود زیادی به روش DM برای کاربردهای مختلف موجود است. نتایج جابجایی و فرکانس بدست آمده از DM قابل قبول هستند اما محاسبه تنش از DM گاهاً دقیق نیست. تنش عامل اساسی بسیاری از مدهای گسیختگی است. حتی اگر همگرایی در حداکثر جابجایی حاصل شود لزوماً تنش بدست آمده در روش DM از دقت بالایی برخوردار نیست. بطور معمول برای بدست آوردن تنش‌های دقیق‌تر از جابجایی‌ها، با استفاده از تکنیک‌های المان محدود به تراکم مش بسیار بالایی نیاز است. تنش‌ها از مشتق جابجایی بدست می‌آیند و خطای مشتق بیشتر از خود تابع است که این در محاسبات تنش وارد می‌شود. در روش DM معادلات سازگاری کرنش‌ها در المان‌های داخلی وارد نمی‌شود و شرایط سازگاری با پیوستگی جابجایی‌ها برقرار می‌شود. بطور کلی تنش‌هایی که از روش DM در طول مرزهای سطح مشترک المان‌ها بدست می‌آیند شرایط سازگاری و تعادل را اکتفا نمی‌نمایند. محققان با انجام تحقیقات و مطالعات این نقص را تا حدودی بهبود داده‌اند و فرمولبندی جدیدی براساس روش DM با نام روش المان مرکب [21] ابداع کرده‌اند که برای محاسبه تنش از دقت خوبی برخوردار است. با این حال، روش IFM با استفاده از تکنیک‌های روش نرمی، فرمولبندی مناسب‌تری را نسبت به روش DM ارائه می‌کند. روش IFM یک روش مناسب برای به اجرا درآوردن قیدها در مدل اجزاء محدود پیوسته است، یعنی کرنش سازگاری در مرزهای بین المان‌ها فراهم می‌شود. در روش IFM، تمامی نیروهای مستقل به عنوان متغیرهای مجهول در نظر گرفته می‌شود که می‌توانند از اعمال همزمان شرایط تعادل و سازگاری محاسبه شوند. معادله عمومی روش IFM بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{معادلات تعادل} \\ \text{شرایط سازگاری} \end{array} \right\} \{ \text{تنش} \} = \left\{ \begin{array}{l} \text{بارگذاری مکانیکی} \\ \text{تغییر شکل اولیه} \end{array} \right\} \quad (1)$$



شکل ۱- اساس معادلات روش مجتمع نیرو و روش سختی

معادلات تعادل، تعادل نیروهای داخلی و بارگذاری مکانیکی را بیان می‌کنند. رابطه (۱) برای محاسبه تنش کافی بوده و جابجایی را نیز می‌توان از تنش‌های بدست آمده محاسبه نمود. شکل (۱) مقایسه اساس فرمولبندی روش IFM و روش DM را نشان می‌دهد. یکی دیگر از مزایای روش IFM نسبت به روش DM این است که در فرمولبندی به روش DM شرایط سازگاری کرنش وجود ندارد و تنها پیوستگی جابجایی‌ها تامین می‌شود. در روش IFM معادلات تعادل مستقل از مشخصه های مواد و پارامترهای طراحی بوده و تنها ماتریس نرمی در شرایط سازگاری به متغیرهای طراحی وابسته می‌باشد. همچنین بردار بار مستقل از مشخصه های مواد و پارامترهای طراحی است. بردار بار در سمت راست فرمولبندی روش سختی شامل دو قسمت بردار بارگذاری مکانیکی و بردار بار معادل گرهی می‌باشد که تابعی از متغیرهای طراحی و بارگذاری مکانیکی سازه است. در روش DM بارهای معادل حتی برای تغییر شکل اولیه سازگار که تنش در سیستم القا نمی‌کنند، غیر صفر هستند و مقدار دارند که این خود سبب درصدی بی دقتی می‌شود. برای محاسبه تنش در روش IFM، به دلیل اینکه تنش به طور مستقیم بدست می‌آید و نیاز به یک سری محاسبات، بازگشت و جایگذاری محاسبات ندارد نسبت به روش DM بسیار کارآمدتر است (لزومی به تبدیل از سیستم محلی به کلی برای محاسبه جابجایی و سپس از سیستم کلی به محلی برای محاسبه نیروها نیست). یکی دیگر از مزیت های روش IFM این است که نسبت به انتخاب میدان تنش حساس نمی‌باشد در صورتی که روش DM نسبت به انتخاب میدان جابجایی حساس می‌باشد [7].

### ۲.۲. اصول اولیه معادلات روش مجتمع نیروها

اگر یک جسم پیوسته باشد با استفاده از مفهوم روش اجزای محدود، گسسته سازی می‌شود؛ در نتیجه در مدل اجزای محدود جسمی با  $n$  درجه آزادی نیرو،  $m$  درجه آزادی جابجایی و سپس  $m$  معادله تعادل، دارای  $r = n - m$  معادلات سازگاری است. معادلات تعادل براساس مفهوم تعادل نیروها بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$[B]_{m \times n} \{F\}_{n \times 1} = \{P\}_{m \times 1} \quad (2)$$

$\{P\}$  و  $\{F\}$  به ترتیب بردار بار و نیروهای مستقل گرهی و  $[B]$  ماتریس مستطیلی تعادل با بعد  $(m \times n)$  است که تعداد ستون‌ها بیشتر از تعداد سطرها است. ماتریس تعادل، نامتقارن با مرتبه کامل سطری است. سازه‌های نامعین به تنهایی با استفاده از معادلات تعادل حل نمی‌شوند و شرایط سازگاری می‌بایست به تعداد مورد نیاز و کافی بدست آید. برای حل این سازه‌ها معادلات سازگاری به تعداد  $r = n - m$  مطابق رابطه زیر مورد نیاز می‌باشد:

$$[C]_{r \times n} [G]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} = \{DR\}_{r \times 1} \quad (3)$$

$[C]$  ماتریس سازگاری با بعد  $(r \times n)$  و  $[G]$  ماتریس متقارن نرمی با بعد  $(n \times n)$  است.  $[G]$  ماتریسی با بلوک‌های قطری است که هر بلوک، ماتریس نرمی هر المان و  $\{DR\}$  ماتریس تغییر شکل اولیه سازه می‌باشد. ماتریس سازگاری مقید به تغییر شکل المان می‌باشد درحالی‌که ماتریس نرمی وابستگی بین تغییر شکل‌ها و نیروها را بمنظور ادغام کردن با ماتریس تعادل بوجود می‌آورد. رابطه ترکیب شده معادلات تعادل و سازگاری در روش IFM در معادله (۴) و (۵) می‌باشد.

$$[S]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} = \{P^*\}_{n \times 1} \quad (4)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [B] \\ [C][G] \end{bmatrix}; \{P^*\} = \left\{ \frac{P}{\delta R} \right\} \quad (5)$$

با حل رابطه (4) نیروهای داخلی بطور مستقیم محاسبه و سپس تنش‌ها با استفاده از نیروها بدست می‌آیند. بردار جابجایی های مجهول گرهی  $\{U_e\}$  با استفاده از نیروهای بدست آمده بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\{U_e\}_{m \times 1} = [J]_{m \times n} [G]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} \quad (6)$$

$[J]$  ماتریس تغییرشکل با بعد  $m \times n$  است و پس از محاسبه ماتریس  $[S]$  بدست می‌آید. این ماتریس تعداد  $m$  ردیف‌های فوقانی ماتریس  $[S]^{-1}$  است.

### ۳.۲. درون یابی میدان تنش

از آنجایی که درونیابی تنش‌ها در ماتریس‌های تعادل و نرمی المان ظاهر می‌شود روابط بدست آوردن آنها جهت کسب نتایج دقیق، لازم می‌باشد. مفاهیم عمومی درونیابی تنش در ارتباط با کاربرد آنها در روش‌های ترکیبی\*، توسط پاین و اسپلیکر بررسی شده است [22,23]. میدان‌های تنش بدون هیچ گونه وابستگی به شکل و تعداد درجات آزادی سینماتیک المان، درونیابی می‌شوند. پیشنهاد شده است که میدان تنش مفروض بایستی معادلات تعادل را اقعان کرده و وابسته به تبدیل مختصات نباشد همچنین دارای مرتبه کامل چند جمله ای باشد. همانطور که در روش‌های ترکیبی بحث شد [22,23]، می‌بایست تعداد پارامترهای تنش بزرگتر یا مساوی تعداد درجات آزادی جابجایی المان منهای تعداد مدهای پیکره صلب المان باشد. هرچند تعداد بیشماری میدان تنش قابل قبول می‌توان یافت که برخی اوقات منتج به ایجاد مدهای انرژی صفر در المان می‌شود و همچنین هزینه محاسبات را افزایش می‌دهد لذا همواره تمایل به لحاظ تعداد پارامترهای تنش حداقل است.

در IFM، مرتبه صحیح ماتریس تعادل المان، عدم حضور حالت انرژی صفر را تضمین می‌کند [24-25]. اگر ماتریس تعادل المان دارای مرتبه کامل باشد، وضعیت انرژی صفر فقط در ارتباط با حالات پیکره صلب المان بوجود می‌آیند. بنابراین برای از بین بردن حالت انرژی صفر، باید میدان تنش طوری فرض شود که مرتبه ماتریس تعادل کامل باشد. معمولاً برای درونیابی تنش در IFM از تابع تنش ایری بعنوان چند جمله ای درجه کامل استفاده می‌شود. تابع تنش بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\phi(x, y) = \sum_{j=0}^q C_j x^{q-j} y^j \quad (7)$$

که  $C_j$ ،  $j = 1, \dots, q$  مقادیر ثابت بوده و  $X$  و  $Y$  محورهای مختصات می‌باشند. تنش‌ها با مشتق گیری مناسب از تابع تنش ایری بدست می‌آیند. عمودی درجهت محور مختصات  $X$  و  $Y$  و تنش برشی بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sum_{j=0}^{q-2} C_{j+2} (j+1)(j+2) x^{q-2-j} y^j \quad (8)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \sum_{j=0}^{q-2} C_j (q-j)(q-j-1) x^{q-2-j} y^j \quad (9)$$

\*-Hybrid Method

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial y \partial x} = - \sum_{j=0}^{q-2} C_j (j+1)(q-j-1) x^{q-2-j} y^j \quad (10)$$

تنش ها بر حسب ثابت های  $C_j$  درونیابی می شوند، سپس نیروهای مستقل  $\{F\}$  جایگزین این ثابت ها می شوند. برای مثال با در نظر گرفتن  $q=3$  در معادله (۷)، تابع تنش ایری بصورت زیر نوشته می شود:

$$\phi(x, y) = C_0 x^3 + C_1 x^2 y + C_2 x y^2 + C_3 y^3 \quad (11)$$

تنش های بدست آمده از معادلات (۸)، (۹) و (۱۰) بصورت زیر بیان می شوند:

$$\sigma_x = 6C_3 y + 2C_2 x \quad (12)$$

$$\sigma_y = 6C_0 x + 2C_1 y \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = -2C_1 x + 2C_2 y \quad (14)$$

حال ثابت ها را بر حسب نیروهای مستقل تعریف می کنیم:

$$6C_3 = F_1, 2C_2 = F_2, 6C_0 = F_3, 2C_1 = F_4 \quad (15)$$

تنش های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  با جایگذاری ثابت ها بر حسب نیروهای مستقل بصورت زیر بازنویسی می شوند:

$$\sigma_x = F_1 y + F_2 x \quad (16)$$

$$\sigma_y = F_3 x + F_4 y \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = -F_4 x - F_2 y \quad (18)$$

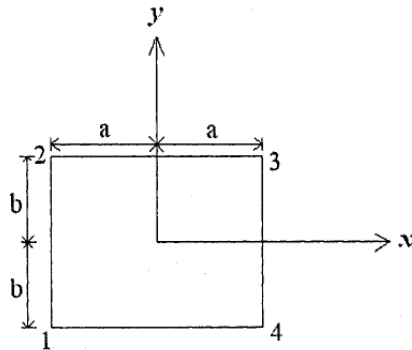
بنابراین میدان تنش بر حسب عبارت هایی از چهار نیروی مستقل  $F_1$ ،  $F_2$ ،  $F_3$  و  $F_4$  درونیابی می شود. برای بدست آوردن تنش با دقت بیشتر، می توان از چند جمله ای با مرتبه بالاتر استفاده نمود میدان تنش حاصل از روش تقریبی بالا، معادلات تعادل را در هر نقطه از المان اقناع می کند و ماتریس حاصل برای المان، مستقل از تبدیل مختصات می باشد. همان گونه که اشاره شد همواره سعی بر آن است که با حفظ خواص مناسب ماتریس های المان، تعداد نیروهای مستقل در میدان تنش مفروض کاهش یابد. پاتنیک اعمال شرایط سازگاری بروی میدان تنش، جهت کاهش تعداد نیروهای مجهول را بصورت زیر پیشنهاد می کند [20]:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (19)$$

به این ترتیب تعداد نیروهای مستقل مورد نیاز برای درونیابی تنش با استفاده از معادله (۱۹) کاهش می یابد. همچنین زمان محاسبات آنالیز نیز کاهش می یابد.

### ۴.۲. روابط اجزاء محدود IFM برای المان پوسته ای مستطیلی ۴ نودی

المان پوسته ای مستطیلی ۴ نودی، المان بنیادی برای آنالیز اجزاء محدود می باشد. این المان دارای چهار گره و در هر گره دو درجه آزادی جابجایی، در مجموع هشت درجه آزادی جابجایی می باشد. ابعاد المان و نامگذاری نودها در شکل (۲-۲) نشان داده شده است.



شکل ۲-۲ المان پوسته ای مستطیلی ۴ نودی

میدان جابجایی در ترم هایی از جابجایی گرهی بصورت زیر نوشته می شود:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \quad (20)$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

که  $u_i$  و  $v_i$  به ترتیب جابجایی گرهی در جهت افقی و عمودی در آیین گره می باشند. توابع درونیاب بصورت زیر تعریف می شوند:

$$N_1 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y), N_2 = \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y) \quad (21)$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y), N_4 = \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y)$$

میدان کرنش المان با استفاده از رابطه بین کرنش و جابجایی بصورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & -(b+y) & 0 & (b+y) & 0 & (b-y) & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & (a-x) & 0 & (a+x) & 0 & -(a+x) \\ -(a-y) & -(b-y) & (a-x) & -(b-y) & (a+x) & (b+y) & -(a+y) & (b-y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (22)$$

با استفاده از رابطه (۲۱) و (۲۲) ماتریس درونیاب کرنش بصورت زیر نوشته می شود:

$$[Z] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & -(b+y) & 0 & (b+y) & 0 & (b-y) & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & (a-x) & 0 & (a+x) & 0 & -(a+x) \\ -(a-y) & -(b-y) & (a-x) & -(b-y) & (a+x) & (b+y) & -(a+y) & (b-y) \end{bmatrix} \quad (23)$$

که  $[Z] = [L][N]$  و  $[L]$  ماتریس عملگر مشتق است. بدلیل اینکه تعداد درجه آزادی جابجایی المان هشت و تعداد حالات صلب المان سه است، لذا حداقل پنج نیروی مستقل به منظور درونیابی تنش و مرتبه درست ماتریس تعادل نیاز است. برای تقریب بهتر از درونیابی میدان تنش با مرتبه بالاتر با بیش از پنج نیروی مستقل استفاده می‌شود. ماتریس تعادل کل سازه از اسمبل کردن (مونتاژ) ماتریس‌های تعادل المان‌ها بدست آمده و روند اسمبل کردن مشابه روش DM است. تنش‌های  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  بصورت خطی درونیابی می‌شوند و برای درونیابی تنش برشی  $\tau_{xy}$  از مقدار ثابت استفاده می‌شود. در نهایت درونیابی میدان‌های تنش بصورت زیر انجام می‌گردد:

$$\sigma_x = F_1 + F_4 y \quad (24)$$

$$\sigma_y = F_2 + F_5 x \quad (25)$$

$$\tau_{xy} = F_3 \quad (26)$$

با استفاده از معادلات (20)، (21) و (22) ماتریس درونیاب تنش بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ماتریس تعادل المان از حل انتگرال زیر بدست می‌آید:

$$[B_e]_M = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [Z][Y] t dy dx \quad (28)$$

$t$  ضخامت المان می‌باشد. با جایگذاری معادله (23) و (27) در (28) ماتریس تعادل المان بصورت زیر بدست می‌آید:

$$[B_e]_M = \begin{bmatrix} -b & 0 & -a & \frac{b^2}{3} & 0 \\ 0 & -a & -b & 0 & \frac{a^2}{3} \\ -b & 0 & a & -\frac{b^2}{3} & 0 \\ 0 & a & -b & 0 & -\frac{a^2}{3} \\ b & 0 & a & \frac{b^2}{3} & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \frac{a^2}{3} \\ b & 0 & -a & -\frac{b^2}{3} & 0 \\ 0 & -a & b & 0 & -\frac{a^2}{3} \end{bmatrix} \quad (29)$$

ماتریس نرمی بمنظور بیان شرایط سازگاری برحسب نیروها برای تولید شرایط سازگاری به همراه معادلات تعادل لازم است. بطور مشابه، ماتریس نرمی از حل انتگرال زیر بدست می‌آید:

$$[G] = \frac{1}{2} \int_v [Y]^T [D][Y] dv \quad (30)$$

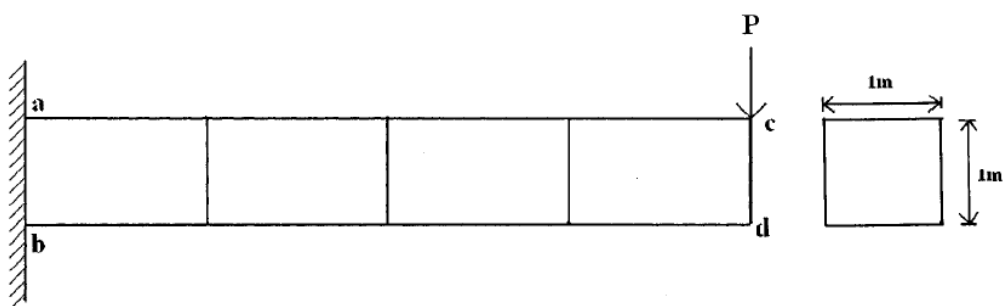


$$[G_e]_M = \left( \frac{4ab}{tE} \right) \times \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{3} \end{bmatrix} \quad (31)$$

### ۳. مثال عددی

تیر یکسر گیرداری به طول ۱۲ متر و سطح مقطع مربعی تحت بار متمرکز  $P=12 \text{ kN}$  در انتهای آزادش قرار دارد. این تیر توسط روابط اجزای محدود دوبعدی IFM برای المان پوسته ای ۴ نودی تحلیل شده است. و بمنظور صحت سنجی نتایج بدست آمده با روش DM مقایسه شده است.

با توجه به شکل گره‌های  $a$  و  $b$  مقید بوده و گره‌های  $c$  و  $d$  در انتهای تیر آزاد می‌باشند. نیروی متمرکز  $P$  در انتهای تیر به دو قسمت تقسیم شده و به هر گره مقدار  $0.5P$  وارد می‌شود. ماتریس تعادل برای هر المان بطور جداگانه بدست می‌آید. سپس ماتریس تعادل کل سازه از مونتاژ کردن ماتریس تعادل المان‌ها حاصل می‌شود و شرایط سازگاری نیز با استفاده از ماتریس تعادل کل سازه و به روش غیر مستقیم و با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس تعادل بدست می‌آید. در نهایت نیروهای مستقل هر المان بدست می‌آیند. سپس تنش‌های عمودی و برشی در هر نقطه از المان محاسبه می‌شود. با توجه به شکل حداکثر جابجایی و تنش به ترتیب در انتهای آزاد و گیردار تیر حاصل می‌شود. با استفاده از روش‌های تحلیلی مقدار دقیق تنش در انتهای گیردار تیر در ارتفاع  $y=h/2$  برابر  $864 \text{ Kpa}$  و مقدار دقیق جابجایی در انتهای آزاد تیر  $0.395 \text{ mm}$  می‌باشد.

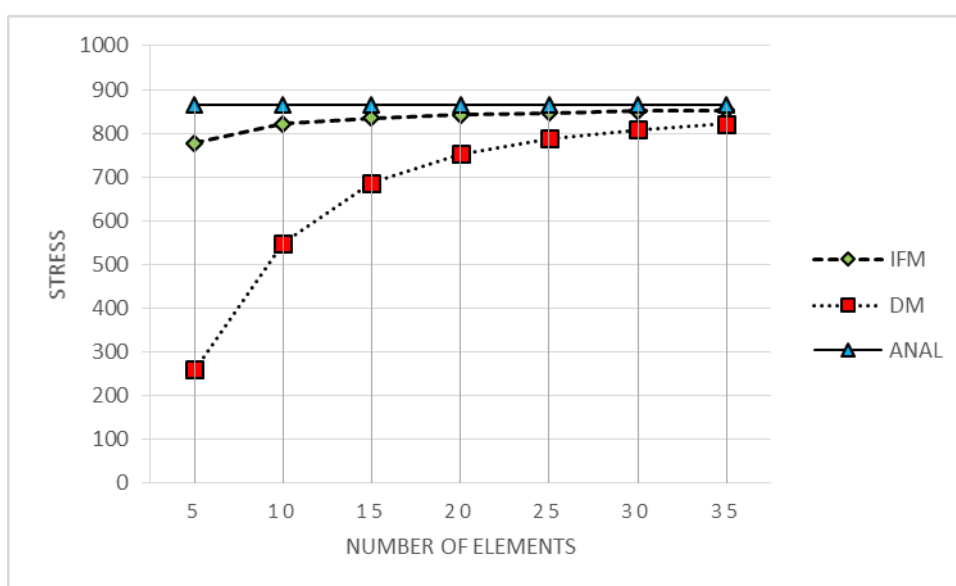


شکل ۳- تیر مش بندی شده با المان‌های پوسته ای مستطیلی ۴ نودی

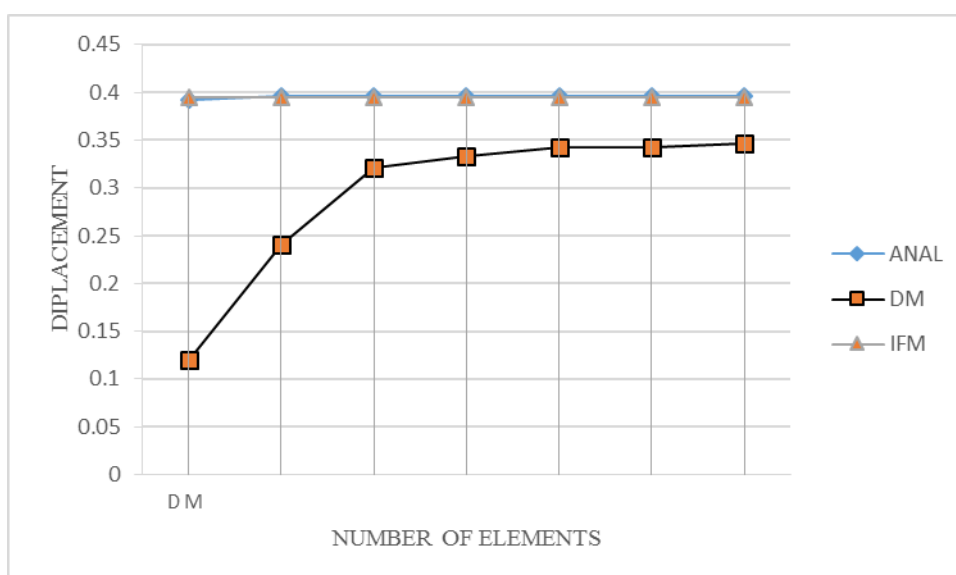
مقدار تنش و جابجایی در سمت گیردار و آزاد تیر به ترتیب برای تعداد ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰ و ۳۵ المان، با استفاده از روش IFM بدست آمده و با روش DM با همین تعداد المان‌ها مقایسه شده است.

Number of Elements	تنش در انتهای گیردار تیر ( Kpa )				حداکثر جابجایی در انتهای آزاد تیر ( mm )			
	DM	Ratio Error	IFM	Ratio Error	DM	Ratio Error	IFM	Ratio Error
5	260	0.699	777.6	0.1	0.1198	0.697	0.3926	0.006
10	549	0.364	821.8	0.048	0.2402	0.391	0.3956	0.0015
15	686	0.206	835.2	0.033	0.2952	0.252	0.3962	0.003
20	752	0.129	842.4	0.025	0.3208	0.188	0.3964	0.0035
25	788	0.087	846.72	0.02	0.3334	0.156	0.3965	0.0038
30	809	0.063	850.2	0.0159	0.3421	0.134	0.3966	0.004
35	822	0.048	852	0.0138	0.3470	0.121	0.3966	0.004

جدول ۱- مقادیر تنش ها و جابجایی ها با استفاده از روش های IFM و DM براساس تعداد المان ها متفاوت



شکل ۴- تغییرات تنش های بدست آمده در تکیه‌گاه با استفاده از روش های IFM و DM براساس تعداد المان های متفاوت



شکل ۵- تغییرات جابجایی های بدست آمده در انتهای آزاد تیر با استفاده از روش های IFM و DM براساس تعداد المان های متفاوت

نمودارهای موجود در شکل ۴ و ۵ براساس مقادیر تنش و جابجایی بدست آمده از روش‌های آنالیز IFM و DM ترسیم شده است. مطابق نمودارها نتایج تنش و جابجایی بدست آمده از روش تحلیلی IFM تنها با تعداد ۵ المان دارای دقتی بیش از ۶۰ درصد نسبت به روش DM با همین تعداد المان می‌باشد. حتی با افزایش تعداد المان‌ها به ۳۵، نیز دقت روش IFM بیشتر از DM می‌باشد. در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که دقت و سرعت روش تحلیلی IFM با تعداد المان‌های بسیار کم و اندازه‌های بزرگ خیلی بیشتر از روش تحلیلی DM بوده که در بهینه‌یابی و آنالیز سازه‌ها بسیار حائز اهمیت است.

### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله روش IFM و روند تحلیل اجزای محدود آن برای المان پوسته‌ای تشریح شد. بر این اساس جهت صحت‌سنجی روش IFM، مقایسه‌ای بین این روش و نتایج حاصل از روش تحلیلی مرسوم DM صورت پذیرفت. در این راستا مزایای روش IFM نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت برای ارائه مناسب‌تر شیوه عملکرد روش IFM از یک مثال تیر طره‌ای به عنوان نمونه استفاده شد. جهت بررسی دو روش مذکور کدهایی در محیط متلب نوشته شده است. نتایج حاصل بیانگر آن است که فرآیند تحلیلی روش IFM ضمن ارائه مزایای مختلف دارای دقت قابل توجهی می‌باشد. به عبارت دیگر روش IFM با حجم محاسبات کمتر نسبت به روش DM دارای دقت بالایی می‌باشد. این روش با استفاده از فرآیند درونیابی به جای محاسبه مشتق جابجایی که عموماً دارای خطا می‌باشد، مقادیر تنش حاصل از بارگذاری را با خطای کمتری محاسبه می‌نماید. از سوی دیگر روش IFM ضمن برقراری سازگاری کرنش‌ها بین مرزهای المان با استفاده از روابط سازگاری، به جای پیوستگی جابجایی‌ها در روش DM، نتایج مناسبی با توجه به رفتار سازه ارائه می‌دهد. در روش IFM با مش بندی کمتر و اندازه مش درشت می‌توان به دقت بسیار بیشتر نسبت به روش DM با همان تعداد مش رسید. این مزایای بهینه‌یابی سازه‌هایی با محیط پیوسته دارای اهمیت بسیار بالایی بوده و بهتر کاربرد دارد. بنابراین می‌توان ادعا داشت که متناسب با هدف کاربرد آنالیز در برخی از زمینه‌های پژوهشی از قبیل فرآیند بهینه‌یابی سازه‌ها و ...، روش IFM دارای مزایای قابل توجهی جهت کسب طرح موردنظر می‌باشد.

مراجع

1. Love, A. E. H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York.
2. S. Timoshenko. (1953). *History of Strength of Material*, McGraw-Hill, New York.
3. Przemieniecki, J. S. (1979). "Theory of Matrix Structural Analysis," John Wiley, New York.
4. Robinson, J. (1973). "Integrated Theory Finite Element Methods," John Wiley, New York.
5. Cook, R. D. et al. (1989). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis," Wiley, New York.

6. Kaneko, I., Lawo, M. and Thierauf, G. (1982). "On computational procedures for the force method," *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 18, pp. 1469- 1495.
7. Patnaik S. N., Berke, L., and Gallagher, R. H. (1991). "Integrated Force Method versus Displacement Method for Finite Element Analysis," *Computers and Structures*, Vol. 38, pp. 377-407.
8. Patnaik, S. N. and Yadagiri, S. (1982). "Frequency analysis of structure by integrated force method," *Journal of Sound and Vibration*" Vol.83, pp. 93-109.
9. Patnaik, S. N., Berke, L., and Gallagher, R.H. (1991). "Compatibility conditions of structural mechanics for finite element analysis," *AIAA Journal*, Vol.29, pp. 820-829.
10. Nagabhusanam, J. and Patnaik, S. N. (1985). "General purpose program to generate compatibility matrix for the integrated force method". *AIAA Journal*, Vol. 28, pp. 1838-1842.
11. Kaljevic, I., Patnaik, S. N and Hopkins, D.A. (1996). "Developments of finite elements for two dimensional structural analysis using the integrated force method," *Computers and Structures*, Vol. 59, No. 4, pp. 691-706.
12. Kaljevic, I., Patnaik, S.N. and Hopkins, D.A. (1996). "Three dimensional structural analysis by the integrated force method," *Computers and Structures*," Vol.58, pp.869-886.
13. Patnaik, S. N. and Yadagiri, S. (1982). "Frequency analysis of structure by integrated force method," *Journal of Sound and Vibration*" Vol. 83, pp. 93-109.
14. Patnaik, S.N. (1986). "Integrated force method versus standard force method," *Computers and Structures*," Vol.22, pp.151-163.
15. Patnaik, S.N. (1986). "Behavior of truss with stress and displacement constraints," *Computers and Structures*, Vol.22, pp. 619-623
16. Sedaghati, R and Esmailzadeh, E. (2003) "Optimum design of Structures with stress and displacement using force method," *International Journal of Mechanical Science*, Vol.45, pp. 1369-1389.
17. Sedaghati, R, Suleman, A. and Tabarrok, B. (2002). "Structural optimization with frequency constraints using finite element force method," *AIAA Journal*, Vol.40

18. Patnaik, S.N. (1989). "Analytical initial design for optimization by the integrated force method," *Computer and Structures, Vol.33*, pp.265-268.
19. Patnaik, S.N., Guphill, J.D. and Berke, L. (1993). "Singularity in structural optimization," *International Journal of Numerical Method in Engineering Vol.36*, pp.931-944.
20. Patnaik, S.N., Gendy, A.S., Berke, L. and Hopkins, D.A. (1997). "Modified fully utilized (MFUD) method for stress and displacement constraints," *NASA TM - 4743*.
21. Pian, T.H.H. (1969). "A Historical note about hybrid elements," *International Journal of Numerical method in Engineering, Vol. 1*, pp. 3-28.
22. Pian, T.H.H and Cheng D. "On suppression of zero energy deformation modes" *International Journal of Numerical Method in Engineering, Vol. 19*, pp. 1741-1752, 19.
23. Spilker, R.L. and Singh, S.P., "Three dimensional hybrid-stress isoparametric quadratic displacement elements," *International Journal of Numerical Method in Engineering, Vol. 18*, pp. 445-465, 1982.
24. Kaljevic, I., Patnaik, S. N and Hopkins, D.A. "Developments of finite elements for two dimensional structural analysis using the integrated force method," *Computers and Structures, Vol. 59, No. 4*, pp. 691-706, 1996.
25. Kaljevic, I., Patnaik, S.N. and Hopkins, D.A., "Three dimensional structural analysis by the integrated force method .*Computers and Structures, Vol.58*, pp.869-886, 1998.