

آنالیز سازه‌های خرپایی با استفاده از روش مجتمع نیروها و مقایسه آن با روش سختی

ناهید صوفیوند^{۱*}، وحیدرضا کلات جاری^۲، محمدحسین طالب پور^۳

۱- دانشجوی، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه صنعتی شاهرود، سمنان، ایران

۲- دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه صنعتی شاهرود، سمنان، ایران

۳- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه دامغان، سمنان، ایران

خلاصه

در روش تحلیلی مجتمع نیرو (IFM)، تمامی نیروهای مستقل به عنوان متغیرهای مجهول در نظر گرفته می‌شوند که بر اساس اعمال همزمان معادلات تعادل و شرایط سازگاری محاسبه می‌شوند. IFM با قابلیت‌های مختلفی نظیر تولید شرایط سازگاری در روند تحلیل، بر محدودیت‌های دیگر روش‌ها همچون روش نیروی مجهول اضافه (RFM) غلبه می‌کند. در محاسبه تنش‌ها IFM بدلیل درونیابی نیروها دارای دقت بالاتری نسبت به روش سختی (DM) است بعلاوه جهت تحلیل محیط‌های پیوسته، با کاهش تعداد المان‌ها از سرعت بالاتری برخوردار است. این مزایا سبب شده تا این روش تحلیلی برای مسائلی همچون ارتعاش آزاد و کمانش سازه‌ها نیز بکار گرفته شود. لذا در این مقاله به بررسی شیوه عملکرد روش IFM در تحلیل سازه‌های خرپایی پرداخته و در نهایت مقایسه‌ای بین این روش و DM انجام شده است. در این راستا معادلات اساسی اجزاء محدود روش IFM برای تجزیه و تحلیل استاتیکی سازه‌ها همراه با مفاهیم DM ارائه شده است.

کلمات کلیدی: روش نرمی، روش مجتمع نیروها، روش سختی، سازه‌های خرپایی.

۱. مقدمه

معادلات تعادل و سازگاری دو جزء اصلی برای حل مسائل سازه‌ای هستند، دقت عددی حل مسائل وابستگی زیادی به درجه این معادلات دارد، مفهوم تعادل همان معادلات تعادل نیرو و نوشتن معادلات ریاضی برای آنها است. سازه‌های معین به راحتی با استفاده از معادلات تعادل حل می‌شوند، اما در سازه‌های نامعین علاوه بر معادلات تعادل به معادلات سازگاری نیز برای حل مسئله نیاز است. سن‌ونانت معادلات سازگاری را در قالب روابطی از کرنش برحسب تغییر شکل‌های جامدات بیان کرد [1]. سپس بلترامی و میشل معادلات سازگاری را در معادلاتی از تنش بیان کردند [2]. کلبچ معادلات تعادل را در روابطی از جابجایی بیان و مشاهده نمود که تعداد معادلات و جابجایی‌های مجهول یکسان می‌باشند [3]. این فرمولبندی منجر به DM شد. ماکسول فرمولبندی دیگری برای معادلات سازگاری براساس مفهوم مجهول‌های اضافی بیان نمود که با عنوان RFM شهرت دارد [3-4]. این روش به سبب قابلیت‌های مختلف در محاسبات دستی در مقایسه با روش

*Corresponding author: M.sc of Structural Engineering
Email: nahidsofivand@yahoo.com

DM* قبل از ۱۹۶۰ میلادی مورد توجه بسیاری از طراحان بود. اما پس از آن بدلیل قابلیت‌های برنامه نویسی توسط کامپیوتر، روش سختی تا حد زیادی جایگزین روش RFM[†] گردید [3-5]. این مهم به طور کامل سبب حذف روش‌های مبتنی بر اصول نیرو نگردید و پیشنهادات بسیاری به منظور بهبود این روش‌ها بخصوص روش RFM ارائه شد [6]. اما ماتریس‌های حاصل از روش RFM و حتی DM بدلیل عدم وجود درونیایی خواص فیزیکی سازه، همواره سبب بروز خطا در نتایج می‌گردد. در این راستا پیشنهادات بسیاری در مورد بهبود روش‌های نیرو ارائه گردید، یکی از فرمولبندی‌های موثر روش‌های نرمی، روش IFM[‡] است که توسط پاتنیک ارائه شده است [7-8]. این روش برخلاف روش‌های DM و نرمی که از مشتق جابجایی برای محاسبه تنش استفاده می‌کنند، از درونیایی نیروها استفاده می‌نماید. به همین سبب دارای دقت بالاتری در محاسبه تنش بوده و نیازمند تراکم مش کمتری در روند تحلیل سازه است. این قابلیت به همراه دیگر ویژگی‌ها سبب شده است که روش IFM در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین در حوزه‌های مختلف علوم مهندسی قرار گیرد [17]. بنابراین در این مقاله به ارائه فرمولبندی جامعی برای روش IFM جهت تحلیل سازه‌های مختلف پرداخته شده و سپس کاربرد آن برای تحلیل سازه‌های خرابی‌ی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲. روش مجتمع نیروها

در روش IFM، نیروها بعنوان متغیرهای مجهول در نظر گرفته می‌شوند که از حل معادلات ترکیبی تعادل و سازگاری بدست می‌آیند. روش‌هایی برای بهبود تولید معادلات سازگاری ارائه شده که منجر به تولید ماتریس نواری با ویژگی‌های مختلف پرفر صفر می‌شود و توسط کامپیوتر قابل اجرا هستند [9-10]. در این راستا روش اجزاء محدود مبتنی بر IFM برای آنالیز دو بعدی [11] و سه بعدی [12] سازه‌ها توسعه یافته است که در تحلیل انواع سازه‌ها با المان‌های مختلف قابل اجرا می‌باشد. این روش نقص‌های موجود در RFM را (مانند ایجاد سازگاری بوسیله انتخاب المان‌های اضافی) برطرف می‌کند. روش IFM بطور موفقیت آمیزی برای تحلیل استاتیکی [11-6] و ارتعاش آزاد [13] سازه‌ها قابل کاربرد است. از دیگر قابلیت‌های این روش کسب معادلات روش DM [7] و RFM [14]، از معادلات روش IFM است. همچنین بهینه‌یابی سازه‌ها با استفاده از روش IFM، ابتدا توسط پاتنیک پیشنهاد شد، وی استفاده از روش IFM را برای کاربردهای مختلف بهینه‌یابی سازه‌ها مانند محاسبه‌ی طرح اولیه‌ی تحلیلی [18] جهت شناسایی نقاط تکین [19] و اصلاح کامل طرح نهایی ارائه داده است [20]. در این راستا عموماً طرح اولیه فرآیند بهینه‌یابی بصورت تجربی و یا تصادفی در نظر گرفته می‌شود. اما طرح اولیه مناسب را می‌توان از محاسبات تحلیلی با استفاده از روش IFM بدست آورد [18]. یک طرح اولیه‌ی خوب در سرعت فرآیند بهینه‌یابی جهت کسب طرح بهینه تاثیر بسزایی دارد. از سوی دیگر روش IFM ابزار مناسبی برای شناسایی طرح‌های تکین است که بیانگر نقاط بهینه محلی در عملیات بهینه‌یابی است [19]. این مزیت سبب کاهش تعداد تکرارهای فرآیند بهینه‌یابی شده و عموماً مانع از قطع عملیات بهینه‌یابی و همگرایی زودرس می‌شود.

۱.۲. روش مجتمع نیروها در مقایسه با روش سختی

اخیراً روش‌های نرمی بعنوان روش‌هایی جایگزین برای DM مورد مطالعه قرار گرفته است. از سوی دیگر DM بدلیل انطباق با برنامه نویسی کامپیوتری روشی مناسب برای مکانیک سازه‌ها است. برنامه‌های اجزاء محدود زیادی به روش DM برای کاربردهای مختلف موجود است. نتایج جابجایی و فرکانس بدست آمده از DM قابل قبول هستند اما محاسبه تنش از DM گاهاً دقیق نیست. تنش عامل اساسی بسیاری از مدهای گسیختگی است. حتی اگر همگرایی در حداکثر جابجایی

* -Displacement Method (DM)

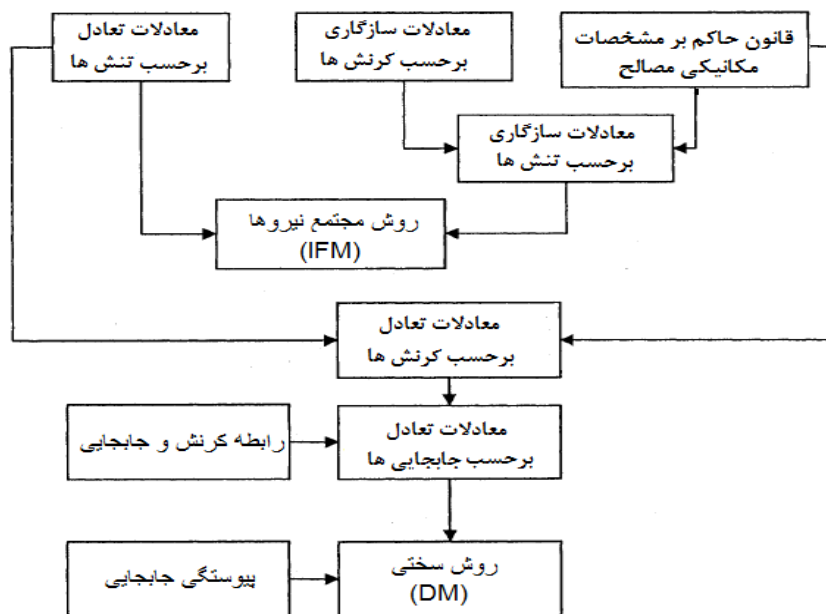
† -Redundant Force Method (RFM)

‡ -Integrated Force Method (IFM)

حاصل شود لزوماً تنش بدست آمده در روش DM از دقت بالایی برخوردار نیست. بطور معمول برای بدست آوردن تنش‌های دقیق‌تر از جابجایی‌ها، با استفاده از تکنیک‌های المان محدود به تراکم مش بسیار بالایی نیاز است. تنش‌ها از مشتق جابجایی بدست می‌آیند و خطای مشتق بیشتر از خود تابع است که این در محاسبات تنش وارد می‌شود. در روش DM معادلات سازگاری کرنش‌ها در المان‌های داخلی وارد نمی‌شود و شرایط سازگاری با پیوستگی جابجایی‌ها برقرار می‌شود. بطور کلی تنش‌هایی که از روش DM در طول مرزهای سطح مشترک المان‌ها بدست می‌آیند شرایط سازگاری و تعادل را اکتان نمی‌نمایند. محققان با انجام تحقیقات و مطالعات این نقص را تا حدودی بهبود داده‌اند و فرمولبندی جدیدی براساس روش DM با نام روش المان مرکب [21] ابداع کرده‌اند که برای محاسبه تنش از دقت خوبی برخوردار است. با این حال، روش IFM با استفاده از تکنیک‌های روش نرمی، فرمولبندی مناسب‌تری را نسبت به روش DM ارائه می‌کند. روش IFM یک روش مناسب برای به اجرا درآوردن قیدها در مدل اجزاء محدود پیوسته است، یعنی کرنش سازگاری در مرزهای بین المان‌ها را فراهم می‌شود. در روش IFM، تمامی نیروهای مستقل به عنوان متغیرهای مجهول در نظر گرفته می‌شود که می‌توانند از اعمال همزمان شرایط تعادل و سازگاری محاسبه شوند. معادله عمومی روش IFM بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{معادلات تعادل} \\ \text{شرایط سازگاری} \end{array} \right\} \{ \text{تنش} \} = \left\{ \begin{array}{l} \text{بارگذاری مکانیکی} \\ \text{تغییر شکل اولیه} \end{array} \right\} \quad (1)$$

معادلات تعادل، تعادل نیروهای داخلی و بارگذاری مکانیکی را بیان می‌کنند. رابطه‌ی (1) برای محاسبه تنش کافی است و جابجایی را نیز می‌توان از تنش‌های بدست آمده محاسبه کرد. شکل (1) مقایسه اساس فرمولبندی روش IFM و روش DM را نشان می‌دهد. یکی دیگر از مزایای روش IFM نسبت به روش DM این است که در فرمولبندی به روش DM شرایط سازگاری کرنش وجود ندارد و تنها پیوستگی جابجایی‌ها تامین می‌شود. در روش IFM معادلات تعادل مستقل از مشخصه‌های مواد و پارامترهای طراحی است و تنها ماتریس نرمی در شرایط سازگاری به متغیرهای طراحی وابسته می‌شود.



شکل (1): اساس معادلات روش مجتمع نیرو و روش سختی

همچنین بردار بار مستقل از مشخصه‌های مواد و پارامترهای طراحی است. بردار بار در سمت راست فرمول‌بندی روش سختی شامل دو قسمت بردار بارگذاری مکانیکی و بردار بار معادل گرهی است که تابعی از متغیرهای طراحی و بارگذاری مکانیکی سازه است. در روش DM بارهای معادل حتی برای تغییر شکل اولیه سازگار که تنش در سیستم القا نمی‌کند، غیر صفر هستند و مقدار دارند. برای محاسبه تنش در روش IFM، به دلیل اینکه تنش به طور مستقیم بدست می‌آید و نیاز به یک سری محاسبات بازگشت و جایگذاری محاسبات ندارد، نسبت به روش DM بسیار کارآمدتر است (لزومی به تبدیل از سیستم محلی به کلی برای محاسبه جابجایی و سپس از سیستم کلی به محلی برای محاسبه نیروها نیست). یکی دیگر از مزیت‌های روش IFM این است که نسبت به انتخاب میدان تنش حساس نمی‌باشد در صورتی که روش DM نسبت به انتخاب میدان جابجایی حساس می‌باشد [7].

۲.۲. اصول اولیه معادلات روش مجتمع نیروها

اگر یک جسم پیوسته باشد با استفاده از مفهوم روش اجزاء محدود گسسته سازی می‌شود؛ در نتیجه در مدل اجزاء محدود جسمی با n درجه آزادی نیرو، m درجه آزادی جابجایی و سپس m معادله تعادل، دارای $r = n - m$ معادلات سازگاری است. معادلات تعادل براساس مفهوم تعادل نیروها بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$[B]_{m \times n} \{F\}_{n \times 1} = \{P\}_{m \times 1} \quad (2)$$

$\{P\}$ و $\{F\}$ به ترتیب بردار بار و نیروهای مستقل گرهی و $[B]$ ماتریس مستطیلی تعادل با بعد $(m \times n)$ است که تعداد ستون‌ها بیشتر از تعداد سطرها است. ماتریس تعادل، نامتقارن با مرتبه کامل سطری است. سازه‌های نامعین به تنهایی با استفاده از معادلات تعادل حل نمی‌شوند و شرایط سازگاری می‌بایست به تعداد مورد نیاز و کافی بدست آید. برای حل این سازه‌ها معادلات سازگاری به تعداد $r = n - m$ مطابق رابطه زیر مورد نیاز می‌باشد:

$$[C]_{r \times n} [G]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} = \{\delta R\}_{r \times 1} \quad (3)$$

$[C]$ ماتریس سازگاری با بعد $(r \times n)$ و $[G]$ ماتریس متقارن نرمی با بعد $(n \times n)$ است. $[G]$ ماتریسی با بلوک‌های قطری است که هر بلوک، ماتریس نرمی هر المان می‌باشد. جزئیات ایجاد هر یک از این ماتریس‌ها در بخش‌های بعدی بحث می‌شود. ماتریس سازگاری قیدهای مربوط به تغییرشکل المان را نشان می‌دهد ولی ماتریس نرمی، معکوس قیدهای تغییرشکل نسبت به قیدهای نیرو، به منظور اسمبل کردن با ماتریس تعادل می‌باشد. رابطه ترکیب شده معادلات تعادل و سازگاری در روش IFM بصورت زیر است:

$$[S]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} = \{P^*\}_{n \times 1} \quad (4)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [B] \\ [C][G] \end{bmatrix}; \{P^*\} = \begin{Bmatrix} P \\ \delta R \end{Bmatrix} \quad (5)$$

با حل رابطه (۵) نیروهای داخلی بطور مستقیم محاسبه و سپس تنش‌ها با استفاده از نیروها بدست می‌آیند. بردار جابجایی‌های مجهول گرهی $\{U_e\}$ با استفاده از نیروهای بدست آمده بصورت زیر حساب می‌شوند:

$$\{U_e\}_{m \times 1} = [j]_{m \times n} [G]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} \quad (6)$$

$[j]$ ماتریس تغییرشکل با بعد $m \times n$ است و پس از محاسبه ماتریس $[S]$ بدست می‌آید. این ماتریس تعداد m ردیف‌های بالای ماتریس $[S]^{-1}$ است. توصیف جزئیات معادلات تعادل، نرمی و سازگاری در بخش‌های بعدی شرح می‌شود.

۳.۲. معادلات تعادل

معادلات تعادل برحسب نیروها در نقاط شبکه‌ای از یک مدل اجزاء محدود، بصورت جمع برداری نیروی داخلی $\{F\}$ و تعداد m مولفه بردار بارگذاری خارجی $\{P\}$ است. ماتریس تعادل برای المان میله و تیر را می‌توان به راحتی با استفاده از مفهوم تعادل نیرو بدست آورد. IFM دارای یک روش عمومی برای تولید ماتریس تعادل است. میدان تنش و جابجایی المان برحسب دو مجموعه متغیر مستقل، برای ایجاد ماتریس تعادل IFM درونیابی می‌شوند. درونیابی جابجایی همان روش DM است، طبق رابطه زیر میدان جابجایی $\{U\}$ برحسب ترم‌هایی از جابجایی گرهی $\{U_e\}$ درونیابی می‌شود:

$$\{U\} = [N] \{U_e\} \quad (7)$$

$[N]$ ماتریسی شامل توابع درونیاب جابجایی یا توابع شکل است. میدان تنش $\{\sigma\}$ برحسب نیروهای مستقل $\{F\}$ که همان مجهولات در فرمولبندی روش نرمی هستند بصورت زیر درونیابی می‌شوند:

$$\{\sigma\} = [Y] \{F\} \quad (8)$$

$[Y]$ ماتریس درونیاب تنش است. معادله کلی ماتریس تعادل بواسطه اصل کار مجازی (کارمجازی داخلی ∂W_I برابر کار مجازی خارجی ∂W_E تولید می‌شود.

$$\partial W_I = \partial W_E \quad (9)$$

معادله (۹) با جایگذاری روابط مربوط به کار مجازی داخلی و کار مجازی خارجی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$[B_e] \{F\} = \{Q_T\} + \{Q_B\} \quad (10)$$

$\{Q_T\}$ و $\{Q_B\}$ به ترتیب بردارهای نیروی معادل گرهی ناشی از نیروهای سطحی و نیروهای حجمی هستند. ماتریس تعادل $[B_e]$ ، تعادل بین نیروهای داخلی $\{F\}$ و نیروهای معادل گرهی المان ناشی از اعمال بارهای خارجی را نشان داده و بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$[B_e] = \int_v [Z]^T [Y] dv \quad (11)$$

$[Z] = [L][N]$ و $[L]$ ماتریس عملگر مشتق است. ماتریس تعادل از ادغام ماتریس‌های درونیاب تنش و جابجایی در کل محیط بدست می‌آید. ماتریس تعادل یک ماتریس مستطیلی با ابعاد $(m \times n)$ است، که سطرهای آن نشان دهنده درجات آزادی جابجایی المان‌ها و ستون‌های آن درجات آزادی نیروها است و مستقل از خواص مواد و پارامترهای طراحی سازه حاصل می‌شود. ماتریس تعادل کل سازه از اسمبل کردن (مونتاز) ماتریس‌های تعادل المان‌ها بدست آمده و مشابه روش DM است.

۴.۲. ماتریس نرمی

ماتریس نرمی به منظور بیان شرایط سازگاری برحسب نیروها برای تولید شرایط سازگاری به همراه معادلات تعادل لازم است. امکان برقراری سازگاری برحسب نیروها با استفاده از رابطه تغییرشکل-نیرو* (FDR) وجود دارد که این رابطه، فرمولبندی بین تغییرشکل و نیروهای داخلی را بیان می‌کند. ماتریس نرمی روش IFM از اصل انرژی کرنشی مکمل و

* -Force Deformation Relations (FDR)

قضیه کاستیلیانو ایجاد می‌شود. تغییر در انرژی کرنشی مکمل U_c یک المان بواسطه تغییر کوچک در بارگذاری خارجی بصورت زیر قابل بیان است:

$$\delta U_c = \frac{1}{2} \int_V \{\delta \sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \quad (12)$$

∂U_c انرژی کرنشی مکمل است. کرنش در ترم‌هایی از تنش با استفاده از رابطه تنش-کرنش بصورت زیر بیان می‌شود:

$$[\varepsilon] = [D] \{\sigma\} \quad (13)$$

$[D]$ ماتریس حاکم بر مشخصات مکانیکی مصالح است. تغییر شکل $\{\beta\}$ با استفاده از قضیه کاستیلیانو برحسب نرخ تغییرات متمم انرژی کرنشی نسبت به نیروها بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\{\beta\} = \frac{\partial U_c}{\partial \{F\}} = \frac{1}{2} \int_V [Y]^T [D] [Y] dv \{F\} = [G] \{F\} \quad (14)$$

$[G]$ ماتریس نرمی است و در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$[G] = \frac{1}{2} \int_V [Y]^T [D] [Y] dv \quad (15)$$

بنابراین، ماتریس نرمی $[G]$ با جایگذاری ماتریس درونیاب تنش و ماتریس حاکم بر مشخصات مکانیکی مصالح در معادله (15) و سپس ادغام با یکدیگر بدست می‌آید. ماتریس نرمی کل مشابه ماتریس تعادل از اسمبل کردن ماتریس نرمی هر المان به دست می‌آید.

۵.۲. معادلات سازگاری

قبلاً در روش نرمی، سازگاری از طریق مفهوم RFM، با ایجاد برش‌های مجازی و سپس بررسی روابط در محل برش‌ها بدست می‌آمد. این نحوه فرمولبندی شرایط سازگاری قبل از پیدایش کامپیوتر، برای محاسبه اتوماتیک سازه‌ها با مقیاس بزرگ، ناکافی بود. معادلات تعادل برحسب کرنش، یا تغییر شکل، نشان دهنده برقراری روابط بعد از شرایط سازگاری است. در تئوری ارتجاعی، سنت‌ونانت معادله سازگاری را با حذف جابجایی در رابطه کرنش-جابجایی* (SDR) فرمولبندی کرد [22-24]. دو مرحله اساسی فرمولبندی سنت‌ونانت در الاستیسیته شامل فرمولبندی SDR، حذف جابجایی و بدست آوردن معادله سازگاری بصورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} = 0 \quad (17)$$

شرایط سازگاری در روش تحلیلی IFM با استفاده از فرمول سنت‌ونانت در الاستیسیته با جایگذاری SDR، در رابطه تغییر شکل-جابجایی† (DDR) و سپس حذف جابجایی‌ها از DDR بدست می‌آیند. در تحلیل IFM از اصل کار مجازی متمم استنتاج می‌شود [15] و رابطه آن بصورت زیر تعریف می‌شود.

* -Strain Displacement Relations (SDR)

† -Deformation Displacement Relations (DDR)

$$\{\beta\} = [B]^T \{U_e\} \quad (18)$$

رابطه (۱۸) همان DDR است، که تعداد n تغییرشکل $\{\beta\}$ را بر حسب m جابجایی گرهی $\{U_e\}$ و ترانهاد ماتریس تعادل بیان می کند. بنابراین تعداد $r = n - m$ شرط سازگاری توسط معادلات سازگاری باید بیان شود. معادلات سازگاری پس از حذف جابجایی از n تا DDR بصورت زیر بیان می شوند:

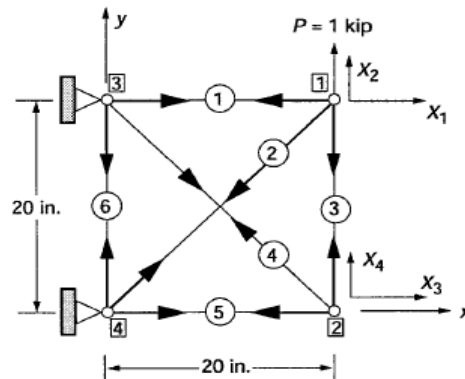
$$[C]_{r \times n} \{\beta\}_{n \times 1} = 0 \quad (19)$$

حال باید ماتریس سازگاری $[C]$ بدست آمده را جهت ادغام با ماتریس تعادل، بر حسب نیروها بیان کنیم. به همین دلیل از معادله (۳) استفاده می کنیم که رابطه FDR نام دارد و فرمولبندی تغییرشکل ها را در ترم هایی از نیروها بیان می کند. ماتریس سازگاری $[C]$ ، مستطیلی و یک ماتریس سطری کامل از مرتبه r است که مستقل از پارامترهای طراحی اندازه، خواص مصالح و بارهای خارجی است. حذف تغییرمکان ها از DDR، تابع اتوماسیون کردن تحلیل کامپیوتری است و به دو روش حذف مستقیم و حذف غیر مستقیم انجام می گیرد که در مثال های زیر از روش حذف مستقیم استفاده شده است. برای کنترل درستی ماتریس سازگاری $[C]$ تولید شده از رابطه زیر استفاده می شود:

$$[B][C]^T = 0 \quad (20)$$

۳. مثال عددی

نیروهای خرابی ۶ میله ای نشان داده شده در شکل (۲) را با استفاده از روش IFM بدست می آوریم سپس با جایگذاری نیروهای بدست آمده در روابط، جابجایی ها را محاسبه می کنیم. در نهایت برای تطبیق درستی نیروهای بدست آمده سازه از روش IFM، با استفاده از کد برنامه نویسی متلب (Matlab) روش DM سازه خرابی و نرم افزار سپ (Sap) مجدد نیروها را بدست می آوریم.



شکل (۲): خرابی ۶ میله ای

$$A = 1 \text{ in}^2, E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$$

گام اول: معادلات تعادل را به تعداد درجات آزادی جابجایی می نویسیم سپس ماتریس ضرایب معادلات را تشکیل می دهیم و در نهایت به معادله (۲) می رسیم:

$$m = 4$$

$$n = 6$$

$$r = n - m = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

گام دوم: رابطه تغییرشکل - تغییر مکان (DDR) را با استفاده از فرمولبندی (۱۸) می‌نویسیم:

$$\beta_1 = X_1, \beta_2 = \frac{(X_1 + X_2)}{\sqrt{2}}, \beta_3 = X_2 - X_4, \beta_4 = \frac{(X_3 - X_4)}{\sqrt{2}}, \beta_5 = X_3, \beta_6 = 0$$

گام سوم: با حذف جابجایی‌ها در روابط DDR بالا به تعداد $r=2$ شرایط سازگاری را می‌سازیم. با نوشتن ضرایب معادلات شرایط سازگاری رابطه (۱۹) اکتان می‌شود. حال باید درستی ماتریس سازگاری [C] بدست آمده طبق رابطه (۲۰) کنترل شود:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

گام چهارم: روابط DDR مرحله قبلی را برحسب نیروهای داخلی با استفاده از معادله $\beta_i = \frac{l_i F_i}{A_i E_i}$ بازنویسی کرده و رابطه

FDR را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\beta_1 = \frac{l_1 F_1}{A_1 E_1} = \frac{20F_1}{E}, \beta_2 = \frac{40F_2}{E}, \beta_3 = \frac{20F_3}{E}, \beta_4 = \frac{40F_4}{E}, \beta_5 = \frac{20F_5}{E}, \beta_6 = \frac{20F_6}{E}$$

$$\frac{20}{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2\sqrt{2} & 1 & -2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

گام پنجم: ادغام ماتریس تعادل و سازگاری با یکدیگر طبق رابطه (۵) و محاسبه نیروهای داخلی است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2\sqrt{2} & 1 & -2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -545 \\ 771 \\ 454 \\ -642 \\ 454 \\ 0 \end{Bmatrix}_{lb}$$

گام ششم: محاسبه جابجایی با استفاده از نیروهای داخلی بدست آمده می باشد. با جایگذاری نیروهای بدست آمده در روابط FDR تغییرشکل ها بدست آمده سپس با استفاده از DDR جابجایی ها بصورت زیر محاسبه می شوند.

$$X_1 = \beta_1 = \frac{20F_1}{E} = -3.73 \times 10^{-4} in$$

$$X_2 = -\beta_1 + \sqrt{2}\beta_2 = -\frac{20}{E}(F_1 - 2\sqrt{2}F_2) = 1.72 \times 10^{-3} in$$

$$X_3 = \beta_5 = \frac{20F_5}{E} = 3 \times 10^{-4} in$$

$$X_4 = -(\beta_1 - \sqrt{2}\beta_2 + \beta_3) = -\frac{20}{E}(F_1 - 2\sqrt{2}F_2 + F_3) = 1.4 \times 10^{-3} in$$

	IFM	DM	SAP
$F_1 - lb(kN)$	-545(0.00534)	-552(0.0054)	-557(0.00546)
$F_2 - lb(kN)$	771(0.00755)	779(0.0076)	780(0.00764)
$F_3 - lb(kN)$	445(0.00436)	442(0.00433)	439(0.0043)
$F_4 - lb(kN)$	-642(0.00629)	-625(0.00612)	-620(0.00607)
$F_5 - lb(kN)$	454(0.00445)	442(0.00433)	440(0.00431)
$F_6 - lb(kN)$	0	0	0

	IFM	DM	SAP
$X_1 - in(m)$	$-0.37 \times 10^{-3} (0.94 \times 10^{-5})$	$-0.4 \times 10^{-3} (-1.02 \times 10^{-5})$	$-0.4 \times 10^{-3} (-1.02 \times 10^{-5})$
$X_2 - in(m)$	$1.72 \times 10^{-3} (4.36 \times 10^{-5})$	$1.4 \times 10^{-3} (3.6 \times 10^{-5})$	$1.5 \times 10^{-3} (3.8 \times 10^{-5})$
$X_3 - in(m)$	$0.3 \times 10^{-3} (0.762 \times 10^{-5})$	$0.3 \times 10^{-3} (0.762 \times 10^{-5})$	$0.3 \times 10^{-3} (0.762 \times 10^{-5})$
$X_4 - in(m)$	$1.4 \times 10^{-3} (3.56 \times 10^{-5})$	$1.1 \times 10^{-3} (2.8 \times 10^{-5})$	$1.25 \times 10^{-3} (3.2 \times 10^{-5})$

۴. نتیجه گیری

در این مقاله روش IFM و روند تحلیل اجزاء محدود آن بطور کامل تشریح شده است. بر این اساس جهت صحت سنجی روش و نتایج، مقایسه جامعی بین روند آنالیز IFM و روش مرسوم DM صورت گرفته است. در این راستا مزایا دو روش نیز ارائه و مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت برای ارائه مناسب تر شیوه عملکرد روش IFM از یک مثال سازه خرپایی به عنوان نمونه استفاده شده است. جهت بررسی دو روش مذکور از کدهای برنامه متلب و برای مقایسه عادلانه و صحت سنجی نتایج از نرم افزار سپ نیز کمک گرفته شده است. نتایج حاصل بیانگر آنست که فرآیند تحلیلی روش IFM ضمن ارائه مزایا مختلف دارای دقت قابل توجهی می باشد. به عبارت دیگر روش IFM با حجم محاسبات کمتر نسبت به روش DM دارای دقت بالایی می باشد. این روش با استفاده از فرآیند درونیابی به جای محاسبه مشتق جابجایی که عموماً دارای خطا می باشد، مقادیر تنش حاصل از بارگذاری را با خطای کمتری محاسبه می نماید. از سوی دیگر روش IFM ضمن برقراری سازگاری کرنش ها بین مرزهای المان با استفاده از روابط سازگاری، به جای پیوستگی جابجایی ها در روش DM، نتایج مناسبی با توجه به رفتار سازه ارائه می دهد. این مزایا در سازه هایی با محیط پیوسته دارای اهمیت بالایی بوده و بهتر قابل مشاهده است. بنابراین می توان اذعان داشت که متناسب با هدف کاربرد آنالیز در برخی از زمینه های پژوهشی از قبیل فرآیند بهینه یابی سازه ها و ...، روش IFM دارای مزایا قابل توجهی جهت کسب طرح موردنظر است.

مراجع

1. Love, A. E. H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York.
2. S. Timoshenko. (1953). *History of Strength of Material*, McGraw-Hill, New York.
3. Przemieniecki, J. S. (1979). "*Theory of Matrix Structural Analysis*," John Wiley, New York.
4. Robinson, J. (1973). "*Integrated Theory Finite Element Methods*," John Wiley, New York.
5. Cook, R. D. et al. (1989). "*Concepts and Applications of Finite Element Analysis*," Wiley, New York.
6. Kaneko, I., Lawo, M. and Thierauf, G. (1982). "On computational procedures for the force method," *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 18, pp. 1469- 1495.
7. Patnaik S. N., Berke, L., and Gallagher, R. H. (1991). "Integrated Force Method versus Displacement Method for Finite Element Analysis," *Computers and Structures*, Vol. 38, pp. 377-407.
8. Patnaik, S. N. and Yadagiri, S. (1982). "Frequency analysis of structure by integrated force method," *Journal of Sound and Vibration*" Vol.83, pp. 93-109.

9. Patnaik, S. N., Berke, L., and Gallagher, R.H. (1991). "Compatibility conditions of structural mechanics for finite element analysis," *AIAA Journal*, Vol.29, pp. 820-829.
10. Nagabhusanam, J. and Patnaik, S. N. (1985). "General purpose program to generate compatibility matrix for the integrated force method". *AIAA Journal*, Vol. 28, pp. 1838-1842.
11. Kaljevic, I., Patnaik, S. N and Hopkins, D.A. (1996). "Developments of finite elements for two dimensional structural analysis using the integrated force method," *Computers and Structures*, Vol. 59, No. 4, pp. 691-706.
12. Kaljevic, I., Patnaik, S.N. and Hopkins, D.A. (1996). "Three dimensional structural analysis by the integrated force method," *Computers and Structures*," Vol.58, pp.869-886.
13. Patnaik, S. N. and Yadagiri, S. (1982). "Frequency analysis of structure by integrated force method," *Journal of Sound and Vibration*" Vol. 83, pp. 93-109.
14. Patnaik, S.N. (1986). "Integrated force method versus standard force method," *Computers and Structures*," Vol.22, pp.151-163.
15. Patnaik, S.N. (1986). "Behavior of truss with stress and displacement constraints," *Computers and Structures*, Vol.22, pp. 619-623
16. Sedaghati, R and Esmailzadeh, E. (2003) "Optimum design of Structures with stress and displacement using force method," *International Journal of Mechanical Science*, Vol.45, pp. 1369-1389.
17. Sedaghati, R, Suleman, A. and Tabarrok, B. (2002). "Structural optimization with frequency constraints using finite element force method," *AIAA Journal*, Vol.40
18. Patnaik, S.N. (1989). "Analytical initial design for optimization by the integrated force method," *Computer and Structures*, Vol.33, pp.265-268.
19. Patnaik, S.N., Guptill, J.D. and Berke, L. (1993). "Singularity in structural optimization," *International Journal of Numerical Method in Engineering* Vol.36, pp.931-944.
20. Patnaik, S.N., Gendy, A.S., Berke, L. and Hopkins, D.A. (1997). "Modified fully utilized (MFUD) method for stress and displacement constraints," *NASA TM* - 4743.

21. Pian, T.H.H. (1969). "A Historical note about hybrid elements," International Journal of Numerical method in Engineering, Vol. 1, pp. 3-28.