

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



دانشگاه دامغان

دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد
فیزیک نجومی (گرایش گرانش و کیهان‌شناسی)

بررسی دینامیک سیاهچاله‌ها در گرانش

سه بعدی تعمیم‌یافته

توسط:

سمانه رحیمی

استاد راهنما:

شهاب شهیدی

شهریور ۹۸

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

به نام خدا

بررسی دینامیک سیاهچاله‌ها در گرانش سه

بعدی تعمیم یافته

توسط:

سمانه رحیمی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم

برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

فیزیک نجومی (گرانش گرانش و کیهان‌شناسی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی

دکتر شهاب شهیدی استادیار رشته فیزیک، گرایش گرانش و کیهان‌شناسی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر زهرا حقانی استادیار رشته فیزیک، گرایش گرانش و کیهان‌شناسی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان (داور)

دکتر لیلا شاهکرمی، استادیار رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان (داور)

دکتر زهرا حقانی استادیار رشته فیزیک، گرایش گرانش و کیهان‌شناسی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۹۸

تقديم به خانواده ام

با تشکر از استادان عزیزم جناب آقای دکتر شهاب شهیدی و سرکار خانم دکتر زهرا حقانی

چکیده

بررسی دینامیک سیاهچاله‌ها در گرانش سه

بعدی تعمیم یافته

به وسیله‌ی:

سمانه رحیمی

در این پایان نامه برای درک بهتر فیزیک سیاهچاله‌ها ما یک حل سیاهچاله آنتی دو سیته در حضور میدان پنجمگر بدست آورده و ترمودینامیک آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. میدان پنجمگر را می‌توان بصورت یک شاره کامل با پارامتر چگالی حالت $-\frac{1}{3} < \omega_q < -1$ توصیف کرد. با پارامتر حالت مربوط به ماده پنجمگر، متریک سیاهچاله بوسیله یک جمله متناسب با $x^{-\omega_q}$ تصحیح می‌شود. پس از آن ما ترمودینامیک این سیاهچاله را بررسی می‌کنیم و برای آن کمیت‌های ترمودینامیکی متناظر را بدست می‌آوریم مشاهده خواهیم کرد که با افزایش شعاع افق آنتروپی برای پارامترهای معادله حالت‌های مختلف افزایش می‌یابد. بررسی ظرفیت گرمایی ویژه این سیاهچاله‌ها شرط محدود کننده‌تری روی پارامتر معادله حالت خواهد گذاشت بطوریکه فقط برای پارامترهای معادله حالت در بازه $-\frac{1}{3} < \omega_q < -\frac{1}{2}$ سیاهچاله‌ها پایدار خواهند بود.

فهرست مطالب

۵	فهرست مطالب
۲	۱ نسبت عام
۲	۱-۱ مقدمه
۵	۲-۱ متریک
۵	۳-۱ معادلات اینشتین
۸	۴-۱ وردش از کنش اینشتین - هیلبرت
۱۰	۲ حل سیاهچاله چهار بعدی
۱۰	۱-۲ تاریخچه سیاهچاله
۱۲	۲-۲ سیاهچاله
۱۵	۳-۲ متریک جسم کروی ایستا
۱۷	۴-۲ متریک شوارتزشیلد
۲۰	۵-۲ متریک شوارتزشیلد در مختصات کروسکال
۲۲	۶-۲ حل دوسيته شوارتزشیلد

۲۴	۷-۲ متریک رایسنر- نوردشتروم
۲۹	۸-۲ حل دوسیتته رایسنر- نوردشتروم
۳۱	۳ گرانش ۱+۲ بعدی
۳۱	۱-۳ مقدمه
۳۴	۲-۳ سیاهچاله BTZ
۳۸	۴ ترمودینامیک سیاهچاله‌ها
۳۸	۱-۴ مقدمه
۴۱	۲-۴ فرمول انتگرالی جرم سیاهچاله
۴۱	۳-۴ فرمول دیفرانسیلی جرم سیاهچاله
۴۳	۴-۴ قوانین ترمودینامیک سیاهچاله‌ها
۴۵	۵ ترمودینامیک سیاهچاله آنتی دوسیتته سه بعدی در حضور میدان پنجمگهر
۴۶	۱-۵ مدل
۵۰	۲-۵ ترمودینامیک سیاهچاله
۶۵	۳-۵ نتیجه‌گیری
۶۷	مراجع

فصل ۱

نسبیت عام

۱-۱ مقدمه

نسبیت عام^۱ یک نظریه هندسی برای گرانش است که در سال ۱۹۱۵ توسط آلبرت اینشتین^۲ ارائه شد و اکنون برای توصیف گرانش در فیزیک نوین بکار می‌رود. این نظریه تعمیمی بر نظریه گرانش نیوتونی^۳ و نسبیت خاص^۴ است که گرانش را به عنوان یک ویژگی هندسی فضا زمان معرفی می‌کند. البته انگیزه آلبرت اینشتین هنگام ارائه این نظریه مغایرت نظریه گرانش نیوتون با تجربه و رصد نبود. نظریه گرانش نیوتون در ابعاد زمینی و منظومه شمسی تمام پدیده‌ها به جز حضيض عطارد را به خوبی توصیف و پیش بینی می‌کرد که حضيض عطارد را به حرکت‌های نامنظم در منظومه شمسی و یا دقت رصد مربوط می‌دانستند. در واقع اینشتین برای ارائه این نظریه انگیزه دیگری داشت. او می‌خواست اصل ماخ و هم‌ارزی شتاب و گرانش را در چارچوب نسبیت بیاورد. پس از آنکه در سال ۱۹۰۷ مینکوفسکی^۵ نسبیت خاص اینشتین را به صورت چهار بعدی فرمول‌بندی کرد و فضا زمان مینکوفسکی را وارد

^۱General relativity

^۲Albert Einstein

^۳Newton's Gravitation Theory

^۴Special Relativity

^۵Minkowski

مفاهیم فیزیک نمود، اینشتین با کمک اصل ماخ تلاش برای نسبیتی کردن گرانش را آغاز کرد. البته لازم به ذکر است که پوانکاره^۶ در سال ۱۹۰۵ دو اصل نسبیتی را فرمول‌بندی کرده بود و یک مدل از یک میدان گرانشی نسبیت خاصی ارائه داده بود [۱]. اینشتین می‌دانست اضافه کردن شتاب به نسبیت خاص متریک تخت مینکوفسکی را به یک متریک فضا زمان ناتخت شبه ریمانی تبدیل می‌کند. ارائه اولین فرمول‌بندی گرانش به بیان متریک در فضا زمان ریمانی و معادلات دینامیکی متناظر با آن تقریباً یک دهه بعد از ارائه نظریه نسبیت خاص، در سال ۱۹۱۵ با نام نظریه نسبیت عام توسط اینشتین معرفی شد.

بنابر اصل هموردایی، قوانین فیزیک در چارچوب‌های مرجع لخت دلخواه شکل ریاضی یکسانی دارند. اینشتین اصل هموردایی را به چارچوب‌های غیر لخت تعمیم داد و موفق شد گرانش را به عنوان انحنای فضا زمان بیان کند.

پس از آنکه شوارتزشیلد^۷ جواب معادلات نسبیت عام برای توزیع ماده با تقارن کروی را پیدا کرد، حسیض عطارد و به تبع آن حسیض دیگر ستارگان نیز بدست آمد.

با پذیرش دینامیک برای عالم، مدل‌هایی برای عالم و انبساط آن ارائه شد و مشخص شد که عالم از یک مه‌بانگ شروع به انبساط کرده است. در سال ۱۹۴۸ گاموف^۸ محاسبه کرد که فوتون‌هایی از عالم اولیه باید وجود داشته باشد که پس از بزرگ شدن عالم از ماده جدا شده‌اند و بصورت گاز در حال سرد شدن وجود دارند و دمایشان حدود ۱۰ کلوین است. این گازها را اکنون تابش زمینه کیهانی می‌نامیم و دمایشان $2/7$ کلوین است.

نظریه گرانش توسط سیستمی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به نام معادلات اینشتین نمایش داده می‌شود. این نظریه جنبه‌های اختر فیزیکی بسیاری دارد. به عنوان مثال این نظریه سیاهچاله‌ها را به عنوان وضعیت پایانی ستاره‌های بزرگ پیش‌بینی می‌کند. تابش بسیار شدید منتشر شده از برخی از اجسام اختر فیزیکی ناشی از وجود سیاهچاله‌ها است. به طور مثال ریزاخترش‌ها و هسته کهکشانی فعال، به ترتیب نتیجه وجود سیاهچاله‌های ستاره‌وار و سیاهچاله‌های کلان جرم هستند.

^۶Poincare

^۷Schwarzschild

^۸Gamow

پیش‌بینی‌های نسبیت عام با فیزیک کلاسیک در برخی موارد تفاوت بسیاری دارد. مخصوصاً آن‌هایی که به هندسه فضا، گذر زمان، حرکت اجسام در سقوط آزاد و انتشار نور مرتبط هستند. انتقال به سرخ گرانشی نور و اتساع زمان گرانشی و تأخیر زمانی گرانشی که به علت کندتر بودن گذر زمان در نزدیکی میدان‌های گرانشی قوی است، همگرایی گرانشی که به خمیده شدن نور در یک میدان گرانشی قوی اشاره دارد و حرکت تقدیمی مدار سیارات نمونه‌هایی از این تفاوت‌ها هستند. همچنین تعریف جرم در نسبیت عام به سادگی فیزیک کلاسیک و حتی نسبیت خاص نیست، در واقع در نسبیت عام نمی‌توان تعریفی کلی برای جرم یک سامانه ارائه داد و تعریف‌های گوناگونی همچون جرم ADM^۹، جرم بوندی^{۱۰} و جرم کمار^{۱۱} پدید آمده‌اند. برای سیستمی که در آن فضا زمان تخت مجانبی است، انرژی ADM و بوندی، تکانه و جرم را می‌توان تعریف نمود. بر مبنای قضیه نوتر^{۱۲} انرژی، تکانه و جرم ADM توسط تقارن‌های مجانبی در بی نهایت فضایی تعریف می‌شوند و انرژی، تکانه و جرم بوندی توسط تقارن‌های مجانبی در بی نهایت پوچ تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که جرم به صورت طول چاربردار انرژی-تکانه محاسبه می‌شود که می‌توان آن را به عنوان انرژی و تکانه سیستم در بی نهایت تعبیر نمود. جرم کمار را می‌توان در هر فضا زمان ساکنی تعریف نمود.

یکی از ویژگی‌های مبهم نسبیت عام وجود تکنیکی‌هاست که در آن‌ها هندسه فضا زمان تعریف نشده است. برای مثال پاسخ‌های معادلات اینشتین مانند پاسخ شوارتزشیلد و پاسخ کر^{۱۳} تکنیکی سیاهچاله‌ها و پاسخ فریدمان-رابرتسون-واکر^{۱۴} تکنیکی مهبانگ را نشان می‌دهند [۲] و [۳].

^۹ADM mass

^{۱۰}Bundy mass

^{۱۱}Komar mass

^{۱۲}Noether theory

^{۱۳}kerr

^{۱۴}Friedman-Robertson- Walker

۲-۱ متریک

متریک^{۱۵} یک تانسور متقارن مرتبه دوم است که هندسه فضا زمان را مشخص می‌کند و برای یک فضا زمان n بُعدی به صورت یک ماتریس $n \times n$ نوشته می‌شود. اگر g دترمینان متریک، غیر صفر باشد، آنگاه متریک $g_{\mu\nu}$ وارون دارد و خواهیم داشت

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}. \quad (1.1)$$

اگر متریک $g_{\mu\nu}$ یک ماتریس قطری باشد، آنگاه وارون آن $g^{\mu\nu}$ هم یک ماتریس قطری است، با این تفاوت که عناصر قطری آن وارون عناصر قطری $g_{\mu\nu}$ است. در واقع متریک فاصله میان دو نقطه روی خمینه^{۱۶} را مشخص می‌کند. فاصله بین دو نقطه x^{μ} و $x^{\mu} + dx^{\mu}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \quad (2.1)$$

ds^2 المان خط نام دارد و یک کمیت ناورد است. یعنی تحت تبدیلات مختصات $x^{\alpha} \rightarrow x'^{\alpha}$ تغییر نمی‌کند. مختصات جدید x'^{α} توابعی از مختصات قدیم x^{α} هستند.

۳-۱ معادلات اینشتین

اینشتین نظریه نسبیتی خود را توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که امروزه با نام معادلات میدان اینشتین^{۱۷} شناخته می‌شود، ارائه کرد. معادلات میدان اینشتین غیر خطی هستند و از این رو یافتن پاسخ برای آنها کار دشواری است. اینشتین اوایل از روش‌های تقریبی استفاده می‌نمود. در سال ۱۹۱۶ شوارتزشیلد اولین پاسخ غیربدیهی معادلات میدان اینشتین را یافت که با نام متریک شوارتزشیلد شناخته می‌شود. این پاسخ مراحل رمبش گرانشی و تشکیل سیاهچاله‌ها را توصیف می‌کند. در همان سال پاسخ شوارتزشیلد را به اجسام باردار تعمیم دادند. نتیجه این تعمیم، متریک رایسنر-نوردشتروم

^{۱۵}Metric

^{۱۶}Manifold

^{۱۷}Einstein Field Equations

^{۱۸} است که با سیاهچاله‌های دارای بار الکتریکی که در فصل‌های آینده توضیح خواهیم داد، مرتبط است.

برای بدست آوردن تانسور اینشتین و معادلات میدان آن، ابتدا به معرفی تانسور انحنای ریمان ^{۱۹} و تانسور ریچی ^{۲۰} و اسکالر ریچی ^{۲۱} می‌پردازیم. تانسور انحنای ریمان که برای مشخص کردن انحنای یک خمینه به کار می‌رود به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}. \quad (3.1)$$

تانسور ریمان دارای تقارن‌های زیر است.

۱. نسبت به تعویض دو اندیس آخر و دو اندیس اول پادمتقارن است

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}. \quad (4.1)$$

۲. نسبت به تعویض جفت اندیس اول با جفت اندیس دوم متقارن است

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (5.1)$$

۳. جمع جایگشت روی سه اندیس آخر صفر می‌شود

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0. \quad (6.1)$$

۴. در معادله زیر نیز صدق می‌کند

$$\nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu}R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0. \quad (7.1)$$

^{۱۸}Reissner–Nordstrom metric

^{۱۹} Riemann curvature tensor

^{۲۰}Ricci tensor

^{۲۱}Ricci Scalar

معادلات (۶.۱) و (۷.۱) به اتحاد بیانگی معروف هستند. $\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}$ که در تعریف تانسور ریمان وجود دارد، نماد کریستوفل^{۲۲} نامیده می‌شود. در غیاب پیچش، $\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}$ نسبت به اندیس‌های پایین متقارن خواهد بود. این ضریب بر حسب متریک به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_{\beta} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\beta\rho} - \partial_{\rho} g_{\beta\mu}). \quad (۸.۱)$$

تانسور ریچی از تنجش اندیس اول و سوم تانسور ریمان حاصل می‌شود

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} = \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}. \quad (۹.۱)$$

در نظریه نسبیت، تانسور ریچی میزان تمایل ماده به واگرایی یا همگرایی در زمان را مشخص می‌کند. اسکالر ریچی با استفاده از ضرب متریک پادوردا $g^{\mu\nu}$ در تانسور ریچی یا به عبارتی تنجش دو اندیس تانسور ریچی حاصل می‌شود

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} = R. \quad (۱۰.۱)$$

در این مرحله فرم پیشنهاد شده معادلات میدان توسط اینشتین را بدست می‌آوریم. مبنای ارائه این معادلات اثبات این است که عامل جذب اجسام سبک توسط اجسام سنگین‌تر ایجاد انحنای فضا زمان در مجاورت این اجسام سنگین است. ابتدا اینشتین فرض کرد که یک رابطه خطی بین تانسور ریچی $R_{\mu\nu}$ که نماد انحنای فضا زمان است و تانسور انرژی-تکانه $T_{\mu\nu}$ که نماد ماده (انرژی) در محاسبات تانسوری است، برقرار است

$$R_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}. \quad (۱۱.۱)$$

طبق پایستگی انرژی تکانه، مشتق هموردای $T_{\mu\nu}$ صفر است

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0, \quad (۱۲.۱)$$

^{۲۲}Christophers Symbol

پس سمت دیگر تساوی هم باید مشتق هموردای صفر داشته باشد. از آنجایی که مشتق هموردای $R_{\mu\nu}$ صفر نیست، اینشتین با استفاده از اتحاد بیانکی ترکیبی از تانسور ریچی و اسکالر ریچی R بدست آورد که مشتق هموردا آن صفر است و فرض اولیه خود را به صورت زیر اصلاح کرد

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}. \quad (13.1)$$

$G_{\mu\nu}$ به تانسور اینشتین معروف است. به کمک معادله گرانش پواسون ضریب تناسب به صورت زیر بدست می‌آید [۴]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{\Lambda \pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (14.1)$$

در واقع سمت چپ معادلات اینشتین بیان کننده هندسه فضا زمانی و سمت راست این معادلات توصیف کننده ماده است. اگر محاسبات در خلاء انجام گیرد $T_{\mu\nu} = 0$ بنابراین $G_{\mu\nu} = 0$ است و با توجه به معادله (۱۴.۱) به $R_{\mu\nu} = 0$ می‌رسیم [۵].

۴-۱ وردش از کنش اینشتین- هیلبرت

با استفاده از کنش اینشتین- هیلبرت^{۲۳} که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (15.1)$$

معادلات میدان اینشتین در فضای خلاء را بدست می‌آوریم. از کنش اینشتین- هیلبرت (۱۵.۱) نسبت به متریک وردش می‌گیریم

$$\delta S = \delta \int \sqrt{-g} R d^4x = \int [(\delta \sqrt{-g}) R + \sqrt{-g} \delta R] d^4x = 0. \quad (16.1)$$

برای محاسبه این وردش لازم است ابتدا وردش $\delta \sqrt{-g}$ و δR را به صورت زیر بدست آوریم [۵]

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (17.1)$$

^{۲۳}Einstein-Hilbert action

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (18.1)$$

با جایگذاری (17.1) و (18.1) در (16.1) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &+ \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (19.1)$$

برای محاسبه جمله دوم (19.1)، کافی است رابطه زیر را در آن جایگذاری کنیم [5]

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} [(\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho})_{;\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{;\rho}] \\ &= (g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{;\rho} \end{aligned} \quad (20.1)$$

$$= w_{;\rho}^{\rho}, \quad (21.1)$$

لازم به ذکر است که $\nabla \equiv$ مشتق هموردا است. به کمک قضیه دیورژانس^{۲۴} و اینکه $\nabla^{\mu} \sqrt{-g} = 0$ است خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x &= \int \nabla_{\mu} (\sqrt{-g} w^{\mu}) d^4x \\ &= \int \sqrt{-g} w^{\mu} dA = 0, \end{aligned} \quad (22.1)$$

dA المان سطح است. با توجه به معادله (22.1)

$$\int \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \quad (23.1)$$

در نتیجه معادله حرکت به صورت زیر بدست می‌آید

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (24.1)$$

^{۲۴}Divergence theorem

فصل ۲

حل سیاهچاله چهار بعدی

۱-۲ تاریخچه سیاهچاله

اصطلاح “سیاهچاله” برای اولین بار در سال ۱۹۶۷ توسط جان ویلر^۱ معرفی شد. البته مطالعات نظری درباره این جسم سابقه طولانی دارد. احتمال وجود این جسم در چارچوب نیوتونی به طور مستقل توسط میشل^۲ و لاپلاس^۳ در اواخر قرن ۱۸ مورد بحث قرار گرفت و به این نتیجه رسیدند که اگر جرم یک ستاره به اندازه کافی بزرگ باشد نور نمی‌تواند از آن عبور کند. میشل این ستاره‌ها را ستاره تاریک نامید. این مسئله در سال ۱۹۱۶ یعنی یک سال پس از ارائه نظریه نسبیت عام در واقع پس از آنکه شوارتزشیلد یک حل دقیق متقارن کروی از معادلات میدان اینشتین در خلأ را بدست آورد، توسعه یافت. این حل، میدان گرانشی یک جسم کروی فشرده را توصیف می‌کند. در این حل علاوه بر تکینگی در مرکز تقارن $r = 0$ یک تکینگی روی شعاع گرانشی $r = r_s$ نیز وجود دارد (که r مختصه شعاعی در مختصات کروی است). تکینگی دوم با تکینگی مرکز تقارن متفاوت است و سال‌ها پاسخی برای

^۱John Wheeler

^۲Michell

^۳Laplace

آن وجود نداشت. دانشمندان زیادی (به عنوان مثال، فلام^۴ ۱۹۱۶ [۶]، ویل^۵ ۱۹۱۷ [۷]، ادینگتون^۶ ۱۹۲۴ [۸]، لمائته^۷ ۱۹۳۳ [۹]، انیشتین و رزن^۸ ۱۹۳۵ [۱۰]) برای حل این مسئله تلاش کردند. راه حل کامل توسط (ساین^۹ ۱۹۵۰ [۱۱]، فینکشتاین^{۱۰} ۱۹۵۸ [۱۲]، فرانسدل^{۱۱} ۱۹۵۹ [۱۳]، کروسکال^{۱۲} ۱۹۶۰ [۱۴]، سزگرز^{۱۳} ۱۹۶۰ [۱۵]، نویکو^{۱۴} ۱۹۶۳ [۱۶] و ۱۹۶۴ [۱۷]) بدست آمد.

فروپاشی گرانشی ستاره‌های عظیم و تبدیلیشان به سیاهچاله ابتدا توسط اوپنهاایمر^{۱۵} و اسناید^{۱۶} در سال ۱۹۳۹ توصیف شد [۱۸]. تا سال ۱۹۶۰ این اشیاء با نام ستاره یخ زده یا ستاره فروریخته خوانده می‌شدند. این نام‌ها به علت ویژگی سیاهچاله‌ها ساخته شده بود.

در سال ۱۹۶۳ کر یک حل از معادله میدان اینشتین بدست آورد که میدان گرانشی سیاهچاله چرخان مانا را توصیف می‌کرد. این حل نیز دارای یک شعاع گرانشی است که افق رویداد را توصیف می‌کند. سیاهچاله در حل کر دارای یک تکنیکی حقیقی است و اگر اندازه حرکت زاویه‌ای $J \leq GM^2/c$ باشد، آنگاه تکنیکی دوم توسط افق رویداد احاطه می‌شود و برای ناظر خارجی قابل مشاهده نیست. بعدها، ثابت شد که در غیاب ماده، حل کر، رایج‌ترین حل برای سیاهچاله‌های مانا است. یکی دیگر از پیشرفت‌های مهم، اواخر دهه ۱۹۶۰ و اوایل دهه ۱۹۷۰ رخ داد. از رویکردهای هندسی در نظریه سیاهچاله استفاده کردند که نه تنها باعث ارائه یک تعریف کواریانسی از سیاهچاله شد بلکه ثابت کرد چند قاعده اساسی وجود دارد. همچنین نظریه‌های کلاسیک که سیاهچاله‌های بدون مو (مو یعنی

^۴Flamm

^۵Weyl

^۶Eddington

^۷Lemaître

^۸Rosen

^۹Syng

^{۱۰}Finkelstein

^{۱۱}Fronsdal

^{۱۲}Kruskal

^{۱۳}Szekeres

^{۱۴}Novikov

^{۱۵}Oppenheimer

^{۱۶}Snyder

ویژگی‌های منحصر بفرد ظاهری به جز جرم، بار و اندازه حرکت زاویه‌ای) را توصیف می‌کنند در این دوره ثابت شدند. این و دیگر نتایج، ساختن یک تصویر کیفی از تشکیل سیاهچاله، برای توصیف تکامل بعدی آن و تعامل آن با ماده و سایر زمینه‌های فیزیکی کلاسیک را ممکن کرد. در سال ۱۹۶۷ ویلر در سخنرانی عمومی نام “سیاهچاله” را بیان کرد. این نام بسیاری از ویژگی‌های این جسم را نشان می‌دهد [۱۹].

۲-۲ سیاهچاله

یکی از جذاب‌ترین پیش‌بینی‌های نسبیت عام، وجود سیاهچاله‌ها است. سیاهچاله یک ناحیه فضایی است که در این ناحیه میدان گرانشی بسیار زیاد است، به طوری که حتی ذرات و موج الکترومغناطیسی هم نمی‌توانند از میدان گرانش آن عبور کنند. هنگامی که شعاع یک جسمی به جرم M از شعاع شوارتزشیلد آن کوچکتر باشد سیاهچاله بوجود می‌آید.

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

سطحی که این ناحیه بدون بازگشت را محدود می‌کند افق رویداد نام دارد. افق رویداد مهمترین ویژگی سیاهچاله است. خواص سیاهچاله‌ها بسیار غیر معمول است. با اینکه سیاهچاله‌ها، حل‌های نظریه نسبیت عام بودند اما باور نداشتند که این اجرام وجود خارجی داشته باشند. از آنجایی که امکانات و رصدخانه‌های زمینی و فضایی پیشرفت بسیاری داشته است دید ما نسبت به جهان تغییر کرده است و سیاهچاله‌ها کشف شدند [۲۰]. در گذشته بر این باور بودیم که به دلیل اینکه هیچ ماده‌ای حتی نور از سیاهچاله خارج نمی‌شود، سیاهچاله‌ها قابل دیدن نیست. اما می‌توانیم وجودشان را از طریق کنش و واکنش‌هایشان با ماده اطراف اثبات کنیم. البته دانشمندان اخیراً موفق شدند که عکسی از افق رویداد یک سیاهچاله منتشر کنند. شکل (۱-۲) اولین عکس واقعی از افق رویداد یک سیاهچاله است که توسط اخترشناسان رصدخانه جنوبی اروپا منتشر شد. این تصویر حاصل همکاری زنجیره‌ای از تلسکوپ‌های غول‌پیکر در نقاط مختلف کره زمین بود که هر کدام بخشی از عملیات تهیه این تصویر

را بر عهده داشته‌اند. این سیاهچاله در مرکز کهکشان مسیه ۸۷^{۱۷} در فاصله ۵۵ میلیون سال نوری از کره زمین قرار دارد. قطر این سیاهچاله ۴۰ میلیارد کیلومتر است و جرم آن ۶,۵ برابر جرم خورشید است و از پرچم‌ترین سیاهچاله‌های کیهانی است. تصویر بدست آمده یک حلقه درخشان در اطراف یک حفره سیاه نشان می‌دهد. لبه این حفره سیاه آنجایی که گازهای برافروخت وارد سیاهچاله می‌شوند، محدوده‌ای است که نیروی گرانش سیاهچاله به اندازه‌ای زیاد است که حتی نور را بدرون خود می‌کشد و به همین دلیل سیاه دیده می‌شود. این نشان می‌دهد که نظریه نسبیت اینشتین درست است، زیرا یک هلال نورانی میبینیم که در اثر پدیده داپلر یک سمت آن درخشان‌تر است. اکنون ما معتقدیم سیاهچاله‌ها در همه جای جهان حضور دارند، سیاهچاله‌های ضعیف ستاره‌ای که



شکل ۱-۲: اولین تصویر منتشر شده از سیاهچاله

در کهکشان راه شیری و اطراف آن کشف شده‌اند و سیاهچاله‌های بسیار قوی که در مرکز کهکشان‌ها وجود دارند.

سیاهچاله‌ها با تمام اجرام نجومی متفاوت‌اند. ستاره‌ها از ماده تشکیل شده‌اند. سیاهچاله‌ها پس از فروپاشی ماده به وجود می‌آیند. ماده‌ای که پس از فروپاشی، سیاهچاله را تشکیل می‌دهد در سیاهچاله ^{۱۷}کهکشان مسیه ۸۷ (یا *Virgo A*، *M87* یا *NGC*) بزرگترین کهکشان در بخش شمالی خوشه سنبله است که در فاصله ۵۵ میلیون سال نوری از ما قرار دارد.

غوطه‌ور می‌شود.

۱-۲-۲ انواع سیاهچاله

هر سیاهچاله پس از اینکه تشکیل شد و به وضعیت پایدار رسید دارای سه خاصیت فیزیکی جرم، بار الکتریکی و اندازه حرکت زاویه‌ای است. این‌ها سه ویژگی خاص سیاهچاله‌ها هستند، زیرا از بیرون قابل مشاهده‌اند. به‌طور مثال یک سیاهچاله باردار مانند هر جسم باردار دیگر بارهای همنام را دفع و بارهای غیر همنام را جذب می‌کند.

عمومی‌ترین نوع سیاهچاله، سیاهچاله‌های ستاره‌ای هستند. ستاره‌ها به نسبت میزان سوختی که دارند طول عمر خاصی دارند. ستاره‌ها تا زمانی که سوخت دارند در برابر خرد شدن ناشی از گرانش مقاومت می‌کنند. پس از پایان سوختشان نیروی گرانش غلبه کرده و این ستاره‌ها فروریزش می‌کنند. اگر نسبت جرم به شعاعشان به اندازه کافی بزرگ باشد پس از فروریزش به سیاهچاله تبدیل می‌شوند. نوع دیگری از سیاهچاله‌ها، سیاهچاله‌های کهکشانی هستند، که در مرکز کهکشان‌های بزرگ و اختروش‌ها قرار دارند. یک نمونه از این نوع از سیاهچاله‌ها و تصویر آن در بالا ذکر شد. سیاهچاله‌ها در نسبت عام از نظر بار و چرخش به چهار نوع زیر تقسیم می‌شوند:

۱. سیاهچاله بدون بار و غیر چرخان که به سیاهچاله شوارتزشیلد معروف است.

۲. سیاهچاله باردار و غیر چرخان که سیاهچاله رایسنر-نوردستروم^{۱۸} نامیده می‌شوند.

۳. سیاهچاله بدون بار و چرخان که سیاهچاله کر^{۱۹} نامیده می‌شوند.

۴. سیاهچاله باردار و چرخان که سیاهچاله کر-نیومن^{۲۰} نامیده می‌شوند [۲۱].

^{۱۸}Reissner-Nordstrom

^{۱۹}Kerr

^{۲۰}Kerr-Newman

۳-۲ متریک جسم کروی ایستا

در این بخش کلی‌ترین شکل متریک همسانگرد را برای فضا زمان ایستا بدست می‌آوریم. در واقع تصمیم داریم مجموعه‌ای از x^μ ها بسازیم که در آن متریک $g_{\mu\nu}$ به مختصات زمان‌گونه t بستگی نداشته باشد و المان خط ds^2 نیز تحت تبدیل $t \rightarrow -t$ ناورد باشد، یعنی متریک ایستا باشد و همچنین ds^2 تنها به متغیرهای چرخشی مختصات فضاگونه x^i و دیفرانسیل آن‌ها وابسته باشد، یعنی متریک همسانگرد باشد. به این منظور با بیان کلی برای المان خط شروع می‌کنیم

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.2)$$

ابتدا شکل کلی متریک همسانگرد را می‌نویسیم و در آخر شرط ایستا بودن را اعمال می‌کنیم. مختصات فضایی را به صورت $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ نشان داده و همچنین به جای مختصات زمان‌گونه x^t, t قرار می‌دهیم. به این ترتیب شکل کلی متریک همسانگرد به شکل رابطه (۲.۲) بدست می‌آید

$$ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) dt \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} + C(t, r) (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2 + D(t, r) d\mathbf{x}^2. \quad (2.2)$$

که در آن A, B, C و D توابعی از مختصات زمانی t و مکانی r هستند. مختصات فضا زمان را که به صورت کلی نوشته‌ایم به صورت زیر به مختصات کروی (t, r, θ, ϕ) تبدیل می‌کنیم

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi \quad x^3 = r \cos \theta.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= r^2 \\ \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= r dr \\ d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

از این رو متریک (۲.۲) به شکل زیر بدست می‌آید

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)r dt dr + C(t, r)r^2 dr^2 + D(t, r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (۴.۲)$$

با ساده سازی و تعریف A, B, C و D جدید خواهیم داشت

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)r dt dr + C(t, r)r^2 dr^2 + D(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (۵.۲)$$

اگر $D(t, r) = \bar{r}^2$ تعریف کنیم و توابع A, B, C را مجدداً بر حسب t و مختصات فضایی جدید $\bar{r}$ تعریف کنیم آنگاه خواهیم داشت

$$ds^2 = -A(t, \bar{r})dt^2 + B(t, \bar{r})r dt d\bar{r} + C(t, \bar{r})d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (۶.۲)$$

مختصات زمان‌گونه به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d\bar{t} = \Phi(t, \bar{r}) \left[-A(t, \bar{r})dt + \frac{1}{\sqrt{A}}B(t, \bar{r})d\bar{r} \right].$$

بنابراین

$$d\bar{t}^2 = \Phi^2(A^2 dt^2 - AB dt d\bar{r} + \frac{1}{A}B^2 d\bar{r}^2).$$

آنگاه خواهیم داشت

$$-A dt^2 + B dt d\bar{r} = -\frac{1}{A\Phi^2}d\bar{t}^2 + \frac{B}{A}d\bar{r}^2 \equiv -\bar{A}d\bar{t}^2 + \bar{B}d\bar{r}^2.$$

در نتیجه المان خط به صورت زیر باز نویسی می‌شود

$$ds^2 = -\bar{A}(\bar{t}, \bar{r})d\bar{t}^2 + \bar{B}(\bar{t}, \bar{r})d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

که با ساده‌نویسی به فرم زیر نوشته می‌شود

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (۷.۲)$$

رابطه (۷.۲) نشان دهنده متریک همسانگرد است. برای بدست آوردن متریک همسانگرد ایستا نیاز به توابع متریک $g_{\mu\nu}$ مستقل از زمان داریم یعنی A و B فقط توابعی از r باشند

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (۸.۲)$$

رابطه (۸.۲) شکل کلی متریک همسانگرد ایستا است.

۴-۲ متریک شوارتزشیلد

شوارتزشیلد در سال ۱۹۱۶ برای اولین بار یک حل دقیق از معادلات میدان اینشتین برای یک فضا زمان خلاً ارائه داد. در واقع او بدنال یافتن متریک $g_{\mu\nu}$ برای نشان دادن میدان گرانشی ایستا با تقارن کروی در فضای خلاً اطراف یک جسم عظیم مانند یک ستاره بود. برای این منظور لازم است توابع $A(r)$ و $B(r)$ در رابطه (۸.۲) با حل معادلات میدان اینشتین تعیین شوند. از آنجایی که هندسه فضا زمان در خارج از یک توزیع جرم کروی را بررسی می‌کنیم بنابراین معادلات میدان خلاً را با صفر قرار دادن تانسور ریچی حل می‌کنیم

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (۹.۲)$$

ابتدا با بدست آوردن ضرایب غیر صفر $g_{\mu\nu}$ و $g^{\mu\nu}$ و با استفاده از رابطه (۸.۱) مؤلفه‌های نماد کریستوفل غیر صفر را بدست می‌آوریم، سپس تانسور ریچی به کمک رابطه (۹.۱) بدست می‌آید. مؤلفه‌های غیر

قطری تانسور ریچی صفر بدست می‌آیند، و مولفه‌های قطری آن به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$R_{..} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB}, \quad (10.2)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB}, \quad (11.2)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right), \quad (12.2)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (13.2)$$

برای آنکه معادله (9.2) صادق باشد باید معادلات (10.2) تا (13.2) صفر باشند. با ضرب عبارت

$\frac{B}{A}$ در رابطه (10.2) و جمع با رابطه (11.2) خواهیم داشت

$$A'B + B'A = 0,$$

که این نشان می‌دهد، ثابت $AB = \alpha$. این ثابت را α می‌نامیم. با جایگذاری $B = \alpha/A$ در معادله

(12.2) خواهیم داشت

$$A + rA' = \alpha.$$

به سادگی می‌توان نوشت

$$\frac{d(rA)}{dr} = \alpha,$$

و با انتگرال‌گیری از این رابطه خواهیم داشت

$$rA = \alpha(r + k), \quad (14.2)$$

که در اینجا k ثابت انتگرال‌گیری است. بنابراین توابع $A(r)$ و $B(r)$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} A(r) &= \alpha \left(1 + \frac{k}{r} \right), \\ B(r) &= \left(1 + \frac{k}{r} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (15.2)$$

دو تابع $A(r)$ و $B(r)$ باید در هر چهار معادله (۱۰.۲) تا (۱۳.۲) صدق کنند. می‌توان k و α را در

حد میدان‌های ضعیف گرانشی بدست آوریم. برای میدان‌های ضعیف داریم

$$\frac{A(r)}{c^2} \rightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2}.$$

Φ پتانسیل گرانشی نیوتونی است. پتانسیل گرانشی برای یک جسم کروی متقارن به جرم M به صورت

$$\Phi = \frac{-GM}{r}$$

است. در نتیجه

$$k = \frac{-2GM}{c^2}$$

و

$$\alpha = c^2$$

خواهند بود. بنا بر قرارداد $c^2 = 1$ است. بنابراین رابطه (۸.۲) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (16.2)$$

که در اینجا M جرم جسمی است که میدان گرانشی را تولید می‌کند. رابطه (۱۶.۲) همان طول شوارتزشیلد است. این متریک اگر $r \rightarrow \infty$ به متریک مینکوفسکی می‌رسد. واضح است که مولفه‌های متریک در $r_s = 2GM$ (با توجه به مخرج کسر جمله دوم) و $r = 0$ (با توجه به مخرج کسر جمله اول و دوم) دارای تکینگی می‌باشد و r_s به نام شعاع شوارتزشیلد شناخته می‌شود. متریک شوارتزشیلد برای $r > r_s$ اعتبار دارد و اگر جسمی دارای شعاع $r \leq r_s$ باشد به سیاهچاله شوارتزشیلد تبدیل می‌شود. شعاع شوارتزشیلد در واقع افق رویداد سیاهچاله شوارتزشیلد است.

به کمک اسکالر کریچمن^{۲۱}

$$K = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (17.2)$$

^{۲۱}Kretschmann scalar

می‌توان بررسی کرد که تکینگی‌ها ذاتی هستند یا تکینگی‌های مختصاتی هستند. اسکالر کریچمن برای متریک شوارتزشیلد

$$K = \frac{48M^2}{r^6} \quad (18.2)$$

است. در سال ۱۹۲۴ ادینگتون^{۲۲} نشان داد که تکینگی در شعاع شوارتزشیلد یک تکینگی مختصاتی است. اما تکینگی در $r = 0$ یک تکینگی فیزیکی است [۲۲]. برای مثال متریک شوارتزشیلد را در مختصات کروسکال^{۲۳} بررسی می‌کنیم. تا به این ترتیب نشان دهیم تکینگی در شعاع شوارتزشیلد قابل رفع است.

۵-۲ متریک شوارتزشیلد در مختصات کروسکال

در این بخش $G = c = 1$ فرض می‌کنیم. طبق معادله (۱۶.۲) ژئودزیک زمان‌گونه متریک شوارتزشیلد به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (19.2)$$

بنا به قرار داد $G = 1$ در نظر می‌گیریم. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۹.۲) خواهیم داشت

$$\pm t + r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}. \quad (20.2)$$

در اینجا v و u ثابت‌های انتگرال‌گیری متناظر با علامت‌های $+$ و $-$ هستند. علامت مثبت منجر به فوتون‌های درون سو و علامت منفی منجر به فوتون‌های برون سو می‌شود. اگر مختصه جدید r^* را به صورت زیر تعریف کنیم

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|, \quad (21.2)$$

^{۲۲}Eddington

^{۲۳}Kruskal

خواهیم داشت

$$r^* + t = v, \quad (22.2)$$

$$r^* - t = u. \quad (23.2)$$

به این ترتیب با مختصه جدید r^* ژئودزیک‌های نورگونه خط مستقیم می‌شوند. از آنجایی که معادله (22.2) و (23.2) در $r = 2M$ تکینگی ندارند، بنابراین مسیر نور درون سو و برون سو در خارج و داخل افق رویداد با این دو معادله بیان می‌شود. از این رو می‌توان v و u را به عنوان دو مختصه جدید در نظر گرفت.

برای ژئودزیک‌های درون سو با استفاده از رابطه (21.2) و (22.2) خواهیم داشت

$$dt = dv - \left(\frac{r}{r - 2M} \right) dr. \quad (24.2)$$

با این تبدیل مختصات المان خط (16.2) به صورت زیر بدست می‌آید

$$ds^2 = -\alpha dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (25.2)$$

که در اینجا $\alpha = \frac{r - 2M}{r}$ تعریف می‌شود و $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ است.

به همین صورت با استفاده از رابطه (21.2) و (23.2) خواهیم داشت

$$dt = du + \alpha^{-1} dr. \quad (26.2)$$

از این رو المان خط به صورت

$$ds^2 = -\alpha du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2, \quad (27.2)$$

بدست می‌آید.

با توجه به رابطه (22.2) و (23.2) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{4} (v - u), \\ r^* &= \frac{1}{4} (v + u). \end{aligned} \quad (28.2)$$

با تغییر مختصات اخیر المان خط به صورت زیر حاصل می‌شود

$$ds^2 = -\alpha dv du + r^2 d\Omega^2. \quad (29.2)$$

برای درک بهتر تکنیکی لازم است که یک تغییر مختصات جدید به صورت زیر ارائه دهیم

$$\begin{aligned} U &= -\exp(-u/4M), \\ V &= -\exp(-v/4M). \end{aligned} \quad (30.2)$$

با توجه به این تغییر مختصات خواهیم داشت

$$ds^2 = -\frac{32M^2}{r} e^{-\frac{r}{4M}} dU dV + r^2 d\Omega^2. \quad (31.2)$$

همانطور که می‌بینیم به وضوح مشخص است که در $r = 2M$ تکنیکی وجود ندارد اما تکنیکی در $r = 0$ همچنان حفظ شده است [۲][۲۳][۲۲].

۶-۲ حل دوسیه شوارتزشیلد

در این بخش می‌خواهیم متریک شوارتزشیلد را با جمله کیهان‌شناسی باز نویسی کنیم. در بخش قبل در معادلات میدان اینشتین جمله کیهان‌شناسی Λ را صفر در نظر گرفتیم. اکنون فرض می‌کنیم $\Lambda \neq 0$ است. با فرض کروی و متقارن بودن و عدم حضور ماده یعنی صفر بودن معادلات میدان اینشتین را به صورت زیر خواهیم داشت

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (32.2)$$

یا به عبارتی با توجه به معادله (۱۴.۱)

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (33.2)$$

با روشی مشابه با حالت صفر بودن جمله کیهان‌شناسی، متریک به صورت زیر حاصل می‌شود

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (34.2)$$

پتانسیل در این حالت در تقریب نیوتونی به صورت زیر است

$$\Phi = -\frac{M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2. \quad (35.2)$$

جمله دوم در معادله (35.2) متناظر با نیروی دافعه زیر می‌باشد

$$F_\Lambda = \frac{1}{3}\Lambda r. \quad (36.2)$$

در ادامه به چند حالت حدی می‌پردازیم.

۱. همانطور که از معادلات بالا مشخص است، اگر $\Lambda = 0$ قرار دهیم، متریک شوارتزشیلد حاصل می‌شود.

۲. اگر حد کوانتومی $M \rightarrow 0$ را در نظر بگیریم، متریک را به صورت زیر خواهیم داشت

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (37.2)$$

که دوسیه^{۲۴} آن را در سال ۱۹۱۷ کشف کرد. با توجه به جمله اول و دوم متریک برای

$\Lambda > 0$ های، مانند متریک شوارتزشیلد دارای یک تکینگی است. این تکینگی در

$$r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}, \quad (38.2)$$

رخ می‌دهد. این تکینگی نیز مختصاتی است و با تغییر مختصات رفع می‌شود.

^{۲۴}de sitter

۷-۲ متریک رایسنر-نوردشتروم

در این بخش می‌خواهیم فرم متریک خارج از یک جسم باردار کروی متقارن استاتیک را بدست آوریم. خارج از این جسم خلاء نیست زیرا در خارج از آن میدان الکتریکی استاتیک وجود دارد. بنابراین معادلات میدان اینشتین را برای یک فضا زمان متقارن کروی استاتیک در حضور یک تانسور انرژی تکانه غیر صفر حل می‌کنیم که نشان دهنده میدان الکترومغناطیسی جسم مورد نظر است. از آنجا که فرض می‌کنیم تقارن کروی است و جسم استاتیک است، فرم کلی متریک به صورت (۸.۲) است. دو تابع $A(r)$ و $B(r)$ با حل معادلات اینشتین خارج از یک جسم کروی بدست می‌آیند.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad (۳۹.۲)$$

با ضرب معادله میدان اینشتین در یک $g^{\rho\nu}$ بدست می‌آید

$$R^\rho_\mu - \frac{1}{2}\delta^\rho_\mu R = -kT^\rho_\mu \quad (۴۰.۲)$$

بنابراین

$$R = kT \quad (۴۱.۲)$$

با جایگذاری (۴۱.۲) در (۳۹.۲) خواهیم داشت

$$R_{\mu\nu} = -k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (۴۲.۲)$$

در اینجا $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تکانه میدان الکترومغناطیسی است که به فرم زیر نوشته می‌شود [۲۴]

$$T_{\mu\nu} = -\mu_0^{-1}(F_{\mu\rho}F_\nu^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) \quad (۴۳.۲)$$

که μ_0 ثابت گذردهی خلاء است و

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (۴۴.۲)$$

تانسور نیروی میدان الکترومغناطیسی است و A_μ پتانسیل ۴ بُعدی الکترومغناطیسی است. با توجه به رابطه (۴۳.۲) مشخص است که ردّ تانسور انرژی تکانه صفر می‌شود

$$T \equiv T^\mu_\mu = -\mu_0^{-1} \left(F_{\mu\rho} F^{\mu\rho} - \frac{1}{4} \delta^\mu_\mu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) = 0.$$

بنابراین معادله میدان اینشتین (۴۲.۲) به صورت زیر بدست می‌آید

$$R_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu}. \quad (45.2)$$

متریک مورد نظر علاوه بر معادلات میدان اینشتین، معادلات ماکسول را نیز باید ارضا کند. خارج از جسم باردار چگالی جریان ۴ بُعدی $j^\mu = 0$ است. پس معادلات ماکسول به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\nabla_\mu F^\mu_\nu = 0, \quad (46.2)$$

$$\nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} = 0. \quad (47.2)$$

همانطور که می‌بینیم نیروی الکترومغناطیسی $F_{\mu\nu}$ از طریق رابطه (۴۳.۲) به میدان گرانشی و از طریق رابطه (۴۶.۲) و (۴۷.۲) به میدان الکترومغناطیسی مربوط می‌شود.

با در نظر گرفتن قیدهای موجود، مولفه‌های پتانسیل چهار بُعدی را در مختصات (t, r, θ, ϕ) به صورت زیر می‌نویسیم

$$A^\mu = \left[\frac{\Phi(r)}{c}, a(r), 0, 0 \right]. \quad (48.2)$$

با توجه به (۴۸.۲) و تعریف نیروی میدان الکترومغناطیسی (۴۴.۲)، تنها مولفه‌های غیر صفر این نیرو F_1 و $F_{,1}$ است. تانسور این نیرو به صورت زیر بدست می‌آید

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (49.2)$$

در اینجا $E(r)$ یک تابع دلخواه از r است که به عنوان مولفه شعاعی میدان الکتریکی استاتیک شناخته می‌شود.

ما به کمک معادلات اینشتین (۴۵.۲) و معادلات ماکسول (۴۶.۲) و (۴۷.۲) سه تابع $B(r)$ ، $A(r)$ و $E(r)$ را بدست می‌آوریم.

ابتدا با استفاده از معادله (۴۶.۲) و تعریف مشتق هموردا خواهیم داشت

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{-g} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (50.2)$$

در اینجا g ردّ متریک مورد نظر است. با توجه به اینکه فقط مولفه‌های F_{10} و F_{01} نیروی میدان الکترومغناطیس، غیر صفر می‌باشد و این دو مولفه تنها به مختصه r وابسته هستند، خواهیم داشت

$$\partial_1 \left(\sqrt{A(r)B(r)} r^2 F^{10} \right) = 0, \quad (51.2)$$

که $\partial_1 \equiv \frac{d}{dr}$ و $F^{10} = g^{11} g^{00} F_{10}$ بنابراین

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 E(r)}{\sqrt{A(r)B(r)}} \right) = 0. \quad (52.2)$$

با انتگرال‌گیری بدست می‌آوریم

$$E(r) = \frac{k \sqrt{A(r)B(r)}}{r^2}, \quad (53.2)$$

که k ثابت انتگرال‌گیری است. اگر فرض کنیم متریک به صورت مجانبی تخت باشد یعنی در $r \rightarrow \infty$ ،

$A(r) \rightarrow c^2$ و $B(r) \rightarrow 1$ باشد، در این صورت $E(r)$ مولفه شعاعی میدان الکتریکی در بی‌نهایت

است و به این ترتیب $k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}$ است و Q بار جسم مورد نظر می‌باشد.

در ادامه به کمک رابطه (۴۲.۲) و (۴۳.۲) مولفه‌های غیر قطری تانسور ریچی صفر بدست می‌آیند و

مولفه‌های قطری آن به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$R_{..} = -\frac{kc^\gamma \epsilon_\gamma E^\gamma}{2B}, \quad (54.2)$$

$$R_{\gamma\gamma} = \frac{kc^\gamma \epsilon_\gamma E^\gamma}{2A}, \quad (55.2)$$

$$R_{\gamma\gamma} = -\frac{kc^\gamma \epsilon_\gamma r^\gamma E^\gamma}{2AB}, \quad (56.2)$$

$$R_{\gamma\gamma} = R_{\gamma\gamma} \sin^2 \theta. \quad (57.2)$$

در اینجا از رابطه $\mu_\gamma \epsilon_\gamma = 1/c^2$ استفاده کرده‌ایم. به راحتی قابل اثبات است که دو معادله (54.2)

و (55.2) به صورت زیر در ارتباط هستند

$$BR_{..} + AR_{\gamma\gamma} = 0. \quad (58.2)$$

اگر دو رابطه (10.2) و (11.2) که به صورت کلی بدست آمده‌اند را در رابطه (58.2) جایگذاری کنیم، خواهیم داشت

$$A'B + B'A = 0. \quad (59.2)$$

از این نتیجه می‌گیریم که، ثابت $AB =$ است. هنگامی که $r \rightarrow \infty$ میل می‌کند، می‌توان متریک را به طور مجانبی تخت در نظر گرفت. بنابراین داریم

$$AB = c^2. \quad (60.2)$$

از این رابطه B بر حسب A بدست می‌آید و با جایگذاری آن در رابطه (12.2) و تساوی با رابطه (56.2)

خواهیم داشت

$$A + rA' = c^2 \left(1 - \frac{GQ^\gamma}{4\pi\epsilon_\gamma c^4 r^2} \right). \quad (61.2)$$

با توجه به اینکه

$$A + rA' = (rA)', \quad (62.2)$$

با یک انتگرال‌گیری ساده خواهیم داشت

$$A(r) = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} \right). \quad (63.2)$$

در اینجا $-2GM/c^2$ ثابت انتگرال‌گیری است و M جرم جسم مورد نظر می‌باشد. به کمک رابطه (60.2) و (53.2) به ترتیب $B(r)$ و $E(r)$ بدست می‌آیند. اگر $Q = 0$ باشد المان خط شوارتزشیلد

حاصل می‌شود. حال با جایگذاری A و B در المان خط (8.2) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ds^2 = & -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} \right) dt^2 \\ & + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} \right)^{-1} dr^2 \\ & + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (64.2)$$

با تعریف $m = GM/c^2$ و $q^2 = GQ^2/(4\pi\epsilon_0 c^4)$ می‌توان المان خط (64.2) را به صورت زیر

بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} ds^2 = & -c^2 \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) dt^2 \\ & + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 \\ & + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (65.2)$$

که به این رابطه المان خط رایسنر-نوردشتروم (RN) می‌گویند.

ثابت بودن انحنای اسکالر $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ نشان می‌دهد که تنها تکنیکی ذاتی متریک RN در $r = 0$

است. لازم به ذکر است که هرگاه r در معادله زیر صدق کند، متریک RN دارای تکنیکی می‌باشد

$$A(r) \equiv 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} = 0. \quad (66.2)$$

معادله (66.2) با توجه به جمله اول و مخرج جمله دوم متریک (65.2) باعث ایجاد تکنیکی می‌شود.

با ضرب r^2 در معادله (66.2) و حل معادله درجه دو بدست آمده، خواهیم داشت

$$r_{\pm} = m \pm (m^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (67.2)$$

با توجه به مقادیر m^2 و q^2 نسبت به یکدیگر ۳ حالت به وجود می‌آید.

۱. اگر $q^2 < m^2$ باشد. در این حالت r_+ و r_- هر دو موهومی می‌شوند و هیچ ریشه‌ای برای معادله (۶۶.۲) بدست نمی‌آید. در این حالت $A(r)$ همواره مثبت است بنابراین مختصه t خاصیت زمانگونه و مختصه r خاصیت فضاگونه خود را حفظ می‌کند. از این رو تکینگی ذاتی $r = 0$ بر خلاف حل شوارتزشیلد یک خط زمانگونه است. با این اوصاف $r = 0$ یک تکینگی عریان است که برای جهان خارج قابل مشاهده است.

۲. اگر $q^2 > m^2$ باشد. در این حالت r_+ و r_- هر دو حقیقی هستند. بنابراین دو مختصات تکینگی وجود دارد که بر روی سطوح $r = r_{\pm}$ رخ می‌دهد. برای r های بزرگتر از r_+ تابع $A(r)$ مثبت است. بنابراین مختصات t زمانگونه و r فضاگونه هستند. در ناحیه $r_- < r < r_+$ تابع $A(r)$ منفی است بنابراین طبیعت فیزیکی مختصات t و r تغییر می‌کند. در ناحیه $r < r_-$ تابع $A(r)$ مثبت می‌شود و بار دیگر مختصات t و r خواص عادی خود را بدست می‌آورند.

۳. اگر $q^2 = m^2$ باشد. این حالت سیاهچاله رایسنر-نوردستروم نامیده می‌شود. در این حالت تابع $A(r)$ همیشه مثبت است بجز در حالت $r = m$ که صفر می‌باشد. بنابراین مختصات r همه جا فضاگونه است بجز در $r = m$ که نورگونه است. از این رو $r = m$ یک افق رویداد است.

۸-۲ حل دوسیه رایسنر-نوردستروم

در این بخش ثابت کیهان‌شناسی Λ را به معادلات اینشتین در حضور جسم کروی متقارن باردار اضافه خواهیم کرد. با حل معادلات اینشتین به متریک زیر خواهیم رسید

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (۶۸.۲)$$

که در آن

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r} - \frac{q^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2. \quad (69.2)$$

لازم به ذکر است که ثابت کیهانشناسی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Lambda = \frac{3}{L^2}, \quad (70.2)$$

که در اینجا L شعاع کیهانشناسی متناظر با ثابت کیهانشناسی Λ می‌باشد. پارامترهای m و q در معادله (69.2) متناسب با بار الکتریکی و M جرم ADM سیاهچاله مورد نظر، به صورت زیر می‌باشند

$$M = \frac{1}{8\pi}\omega m, \quad (71.2)$$

$$Q = \frac{1}{4\pi}\omega q. \quad (72.2)$$

در اینجا ω حجم واحد کره ۲ بُعدی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]

$$\omega = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}. \quad (73.2)$$

فصل ۳

گرانش ۱+۲ بعدی

۳-۱ مقدمه

نیروهای بنیادی در فیزیک (که گاهی آن‌ها را نیروهای تعاملی نیز می‌نامند) نیروهایی هستند که بوسیلهٔ آن‌ها ساده‌ترین ذرات در جهان با یکدیگر برهمکنش (تعامل) دارند. یک نیرو را زمانی «بنیادی» می‌گوییم که نتوان آن را بوسیلهٔ دیگر نیروها توصیف کرد. چهار نیروی بنیادی شناخته شده عبارتند از نیروی هسته‌ای ضعیف، نیروی هسته‌ای قوی، نیروی الکترومغناطیسی و گرانش.

حدوداً از دهه ۱۹۸۰ پیشرفت قابل توجهی در فیزیک بنیادی اتفاق افتاد. مدل واینبرگ-سلام^۱ الکترومغناطیس و نیروهای ضعیف را متحد کرده است. همچنین مدل کرومودینامیک کوانتومی یا به اختصار QCD ثابت کرده است که یک مدل دقیق برای تعاملات قوی است. ترکیب مدل واینبرگ-سلام و کرومودینامیک کوانتومی بسیار موفقیت آمیز بوده است و به مدلی به نام مدل استاندارد معروف است. نقطه شروع مشترک این موفقیت‌ها نظریه میدان کوانتومی اختلالی است. در میان تمام نظریه‌های فیزیک بنیادی، نسبت عام از این چارچوب خارج است. گرانش نسبت به سه نیروی بنیادی دیگر از همه ضعیف‌تر است، بنابراین وقتی آن را در ابعاد ذرات بنیادی بررسی می‌کنیم، قابل صرف نظر کردن

^۱Weinberg-Salam model

است. مثلاً اگر یک سوزن را به یک آهن‌ربا نزدیک کنیم به راحتی می‌بینیم که میزان ربایش آهن‌ربا بیشتر از میزان گرانش زمین بر روی آن سوزن است و سوزن به سمت زمین سقوط نمی‌کند. با این حال گرانش برای اجسام بزرگ و فاصله‌های زیاد بسیار مهم است. دلایل اهمیت گرانش

- گرانش تنها برهمکنشی است که بر تمام ذراتی که جرم دارند اثر می‌کند.
- گرانش مانند الکترومغناطیس محدوده‌اثر بینهایت دارد، درحالی که برای برهمکنش‌های هسته‌ای ضعیف و قوی این‌طور نیست.
- گرانش قابل جذب یا تبدیل شدن نیست و چیزی نمی‌تواند مقابل آن حائل شود.
- گرانش همواره می‌رباید و هرگز نمی‌راند.

تلاش برای تطبیق نظریه کوانتومی و نسبیت عام به دهه ۱۹۳۰ بازمی‌گردد. در واقع کوانتومی کردن نسبیت عام یکی از مشکلات برجسته فیزیک نظری است. موانع کوانتومی کردن گرانش یک مشکل اساسی است. نسبیت عام یک نظریه غیر خطی پیچیده است. علاوه بر این به عنوان یک نظریه میدان ساده دارای یک ثابت جفت‌شدگی $G^{1/2}$ با ابعاد معکوس جرم است که نشان می‌دهد یک نظریه باز بهنجارش نیست اما تمام مشکلات این نیست. مشکل پیدا کردن نظریه سازگار کوانتومی بسیار پیچیده است. نسبیت عام یک نظریه هندسی فضا زمان است و گرانش کوانتومی معادل کوانتش فضا زمان است که ما به خوبی آن را درک نکرده‌ایم. در ادامه چند نمونه از مشکلات و تناقض‌های گرانش کوانتومی را بیان می‌کنیم.

۱. نظریه میدان کوانتومی موضعی است یعنی فقط به اطلاعات در نقطه مورد بررسی نیاز داریم اما مشاهدات فیزیک بنیادی از گرانش کوانتومی لزوماً موضعی نیست.

۲. در نظریه میدان کوانتومی علیت به عنوان یک پیش فرض اساسی پذیرفته می‌شود. اما در گرانش کوانتومی هندسه فضا زمان و بنابراین مخروط نوری و ساختار علی از نوسانات کوانتومی پیروی می‌کنند.

۳. تحول زمانی در نظریه میدان کوانتومی توسط یک اپراتور هامیلتونی مشخص می‌شود. اما برای جهان‌های بسته فضایی کاندید طبیعی، هامیلتونی دقیقا صفر است.

۴. در مکانیک کوانتومی جمع احتمالات در هر لحظه یک می‌شود اما در نسبیت عام هیچ مقطع زمانی که احتمالات را بهنجار کند وجود ندارد.

۵. اختلالات در نظریه میدان کوانتومی به وجود یک پس زمینه هموار یا تقریبا هموار وابسته است اما در فواصل کوتاه گرانش کوانتومی دلیلی برای وجود خمینه هموار^۲ یا حتی شبه هموار نیست [۲۶].

در مواجهه با مشکلاتی که در بررسی گرانش کوانتومی با آن‌ها روبرو می‌شویم مناسب است که مدل‌های ساده‌ای پیدا کنیم. لازم است که این مدل‌ها ویژگی‌های مهم و اساسی نسبیت عام را در بر داشته باشند. نسبیت عام سه بعدی (دو بعد فضایی و یک بعد زمانی) یکی از مدل‌های پیشنهادی مناسب است. در یک نظریه هموردای عام^۳ هندسه فضا زمان در گرانش سه بعدی مشابه یک نسبیت عام^۴ بعدی است. همچنین بسیاری از مسائل بنیادی از گرانش کوانتومی در ابعاد پایین قابل حل هستند. در واقع با این وجود که گرانش سه بعدی یک مدل ساده ریاضی و فیزیکی است اما می‌تواند نامزدی مناسب برای یک نظریه کوانتومی باشد. با این که راه حل‌های سه بعدی برای توضیح دینامیک گرانش کوانتومی مفید نیست اما برای درک و توجیه مشکلاتی همچون ماهیت زمان، نقش توپولوژی و تغییر توپولوژی و روابط بین روش‌های مختلف کوانتومی کردن، مدل بسیار آموزنده‌ای است [۲۷].

کار بر روی گرانش سه بعدی به قبل از سال ۱۹۶۳ برمی‌گردد زمانی که استاروسزوویویچ^۴ برای اولین بار رفتار راه حل‌های استاتیک با منبع نقطه‌ای را توصیف کرد [۲۶]. تا حدود ۲۰ سال کار را ادامه دادند. اما تولد دوباره این موضوع را می‌توان به کارهای منحصر به فرد دیسر^۵، جکیو^۶، هافت^۷ و ویتن^۸ در ^۲خمینه هموار به خمینه‌ای می‌گویند که در همه نقاط بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد.

^۳generally covariant theory

^۴Staruszkiewicz

^۵Deser

^۶Jackiw

^۷t Hooft

^۸Witten

اواسط دهه ۱۹۸۰ مربوط دانست [۲۸]، [۲۹]، [۳۰] و [۳۱]. در سالهای اخیر گرانش سه بعدی به یک حوزه فعال برای تحقیق و تفسیر نسبیت عام، هندسه دیفرانسیلی و توپولوژی، نظریه ذرات انرژی بالا، نظریه میدان توپولوژی و نظریه ریسمان تبدیل شده است [۲۷].

بنابراین از آنجایی که مدل‌های گرانشی سه بعدی در ساخت نظریه‌های سازگار برای گرانش کوانتومی کارایی بسیاری دارد، مطالعه آن‌ها از دیدگاه نظری و همچنین در بدست آوردن حل‌های سیاهچاله‌ای بسیار مورد توجه قرار گرفته است. بررسی خواص کلاسیکی و مخصوصاً کوانتومی سیاهچاله‌ها در ابعاد پایین‌تر بستر مناسبی برای پی بردن به فیزیک سیاهچاله‌های چهاربعدی است. یک سیاهچاله سه بعدی با مولفه‌های جرم، بار و تکانه زاویه‌ای بسیار شبیه به همتای چهار بعدی خود است و به راحتی می‌توان آن را به چهار بعد تعمیم داد [۳۲].

فضا زمان با ثابت کیهان‌شناسی مثبت، فضا زمان دوسپته و با ثابت کیهان‌شناسی منفی پاد دوسپته نامیده می‌شود. از حل معادلات میدان اینشتین در فضا زمان پاد دوسپته حل سیاهچاله بدست می‌آید اما فضا زمان دوسپته منجر به حل سیاهچاله‌ای نمی‌شود. این گونه سیاهچاله را به اختصار BTZ می‌نامند [۳۳] که از مخفف اسم بنادوس^۹، تیتلبوم^{۱۰} و زانلی^{۱۱} سه شخصی که این حل را بدست آوردن، گرفته شده است.

۲-۳ سیاهچاله BTZ

سیاهچاله‌های BTZ یک مدل ساده برای سیاهچاله‌های ۱+۲ بُعدی است. ولی اهمیت اصلی این سیاهچاله‌ها در نظریه میدان‌های کوانتومی است. کنش زیر را در نظر می‌گیریم [۳۲] [۳۳]

$$s = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} [R + 2l^{-2}] d^2x dt + B, \quad (1.3)$$

^۹ Maximo Banados

^{۱۰} Claudio Teitelboim

^{۱۱} Jorge Zanelli

که در اینجا B جمله سطحی، R اسکالر ریچی و l شعاع سیاهچاله است که با ثابت کیهان شناسی به صورت زیر ارتباط دارد

$$-\Lambda = l^{-2}.$$

با ورودش گیری از کنش (۱.۳) بر حسب متریک $g_{\mu\nu}$ ، معادلات اینشتین به صورت زیر بدست می آید

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + 2l^{-2}) = 0. \quad (2.3)$$

فرم هامیلتونی کنش (۱.۳)

$$s = \int (\pi^{ij} g_{ij} - N^\perp \mathcal{H}_\perp - N^i \mathcal{H}_i) d^3x dt + B', \quad (3.3)$$

می باشد. B' جمله سطحی، $\mathcal{H}_\perp$ و $\mathcal{H}_i$ مولد تغییر شکل سطح هستند

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &= 2\pi g^{-1/2} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - (\pi^i_i)^2 \right) - (2\pi)^{-1} g^{1/2} (R + 2/l^2), \\ \mathcal{H}_i &= -2\pi \pi^j_i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

g_{ij} متریک فضایی و $K^{ij} = - (1/2\pi) g^{-1/2} (\dot{K}^{ij} - K g^{ij})$ تکانه مزدوج آن است و K^{ij} انحنای بیرونی است و تنها مولفه تکانه $\pi^r_\phi = \frac{l}{2\pi} p(r)$ می باشد. با ورودش گیری از کنش (۳.۳) بر حسب $N^\perp$ و N^i معادلات قیدی $\mathcal{H}_\perp = 0$ و $\mathcal{H}_i = 0$ حاصل می شود. برای بدست آوردن متریک فرض می کنیم که میدان مانا و دارای تقارن استوانه ای است. معادلات حرکت حاصل از کنش (۱.۳) توسط سیاهچاله متریک زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2, \\ 0 &< \phi < 2\pi, \quad t_1 < t < t_2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

از این رو معادلات را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم

$$s = -(t_{\Psi} - t_{\chi}) \int (N(r)\mathcal{H}(r) + N^{\phi}\mathcal{H}_{\phi}) dr + B, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{H} \equiv 2\pi N(r)\mathcal{H}_{\perp}, \quad (7.3)$$

$$\mathcal{H}_{\phi} = -2lp', \quad (8.3)$$

$$N(r) = N^{-1}N^{\phi}. \quad (9.3)$$

با ورودش‌گیری از کنش (6.3) بر حسب N و N^{ϕ} مولدهای $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}_{\phi}$ صفر می‌شوند. بنابراین $N^{\Psi}(r)$ و $N^{\phi}(r)$ به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} N^{\Psi}(r) &= -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \\ N^{\phi}(r) &= -\frac{J}{2r^2}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

در اینجا $-\infty < t < \infty$ ، $0 \leq r < \infty$ و $0 \leq \phi \leq 2\pi$ هستند. دو ثابت انتگرال‌گیری M و J به ترتیب بارهای پایستار از ناوردایی زمانی (جرم) و ناوردایی زاویه‌ای (پایستگی تکانه زاویه‌ای) هستند. جمله $N^{\Psi}(r)$ برای دو مقدار r صفر می‌شود.

$$r_{\pm} = l \left\{ \frac{M}{2} \left[1 \pm \left[1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2 \right]^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (11.3)$$

برای آنکه این حل توصیف کننده یک سیاهچاله باشد باید شرط‌های زیر برقرار باشد

$$|J| \leq Ml, \quad M > 0.$$

علامت J جهت چرخش سیاهچاله را مشخص می‌کند. در حالت $J = Ml$ دو ریشه بر هم منطبق می‌شوند و به این حالت فرینه می‌گویند. حالت $J = M = 0$ را حالت خلاء می‌گویند.

به کمک معادله (11.3) J و M بر حسب r_+ و r_- به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} J &= \frac{2r_+r_-}{l}, \\ M &= \frac{r_+^2 + r_-^2}{l^2}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

بنابراین می‌توان متریک را برحسب r_+ و r_- به صورت زیر باز نویسی کرد

$$ds^2 = - \frac{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}{r^2 l^2} dt^2 + \frac{r^2 l^2}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)} dr^2 + r^2 \left(d\phi + \frac{r_+ r_-}{l r^2} dt \right) dt \quad (13.3)$$

رابطه (13.3) متریک یک سیاهچاله BTZ با جرم M و تکانه زاویه‌ای J را نشان می‌دهد که r_+ و

r_- دو افق رویداد آن هستند.

فصل ۴

ترمودینامیک سیاهچاله‌ها

۴-۱ مقدمه

پیش از کشف تابش سیاهچاله‌ها مشخص شده بود که سیاهچاله‌ها نیاز به توصیف ترمودینامیکی دارند. ویلر اولین شخصی بود که تناقض در وجود سیاهچاله در نظریه نسبیت عام کلاسیک و قانون غیر کاهشی بودن آنتروپی را دریافت. در واقع اگر تصور کنیم که یک سیاهچاله جسم داغی که طبیعتاً دارای آنتروپی است را ببلعد، از دید ناظر خارج از سیاهچاله آنتروپی بخشی از جهان که در دسترس است کاهش یافته است [۱۹]. آزمایش‌های ذهنی که شامل نسبیت عام کلاسیک و ترمودینامیک بود منجر به این شد که در سال ۱۹۷۱ بکنشتاین حدس بزند که یک سیاهچاله ایستا باید دارای یک آنتروپی ذاتی باشد. یعنی ورود یک جسم داغ به داخل سیاهچاله نه تنها بار، جرم و تکانه زاویه‌ای انتقال می‌دهد بلکه آنتروپی نیز منتقل می‌کند. بنابراین آنتروپی سیاهچاله افزایش می‌یابد. این آنتروپی ذاتی متناسب با مساحت افق رویداد است. بنابراین بین افق رویداد و ترمودینامیک ارتباط کلی وجود دارد. حضور افق در یک فضا زمان منجر به از دست دادن اطلاعات می‌شود زیرا نمی‌توان رویدادهای بعد از افق را مشاهده کرد. به طور مستقیم از دست دادن اطلاعات مستلزم رشد آنتروپی است. بنابراین هر افق رویداد به عنوان یک سطح با آنتروپی خاص رفتار می‌کند و تابشی با دمای خاص منتشر می‌کند.

آنتروپی یک سیستم توسط لگاریتم تعداد میکروحالت‌های داخلی سیستم تعریف می‌شود که بر اساس اطلاعات ماکروسکوپیکی در دسترس، قابل تشخیص نیست. از آنجایی که میدان گرانشی سیاهچاله ایستا در داخل و خارج از افق توسط جرم سیاهچاله تعیین می‌شود ممکن است انتظار داشته باشیم که یک سیاهچاله فقط یک میکروحالت داشته باشد و بنابراین آنتروپی آن صفر باشد. از آنجایی که یک سیاهچاله تمام انرژی‌هایی که از افق رویدادش می‌گذرد را جذب می‌کند، اگر سیاهچاله همیشه دارای آنتروپی صفر باشد انرژی حرارتی را جذب می‌کند و آنتروپی جهان را کاهش می‌دهد. این امر با قانون دوم ترمودینامیک در تناقض است. مگر اینکه فرض کنیم سیاهچاله دارای یک آنتروپی ذاتی است که در فرایند جذب افزایش می‌یابد [۵].

یک سیاهچاله دلخواه مانند یک سیستم ترمودینامیکی پس از فرایندهای آرام، به حالت تعادل می‌رسد. در این حالت با پارامترهای Q ، J و M که به ترتیب نشان دهنده بار، اندازه حرکت زاویه‌ای و جرم سیاهچاله هستند، به طور کامل توضیح داده می‌شود. مساحت افق رویداد A یک سیاهچاله پایدار تابعی از این پارامترها است [۱۹]

$$A = 4\pi \left(2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right). \quad (1.4)$$

در این فصل $1 = G = c$ قرار می‌دهیم. به راحتی از این رابطه جرم را برحسب A ، Q و J بدست می‌آید

$$M = \left[\frac{\pi \left[\left(Q^2 + \frac{A}{4\pi} \right)^2 + 4J^2 \right]}{A} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

تغییر انرژی درونی دو حالت پایدار سیاهچاله با اندکی تفاوت بین پارامترها به صورت زیر حاصل می‌شود

$$dM = \frac{k}{8\pi} dA + \Omega^H dJ + \Phi^H dQ \quad (3.4)$$

که در اینجا k ، Ω^H و Φ^H به ترتیب گرانش سطحی، سرعت زاویه‌ای و پتانسیل الکتریکی هستند که

به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$k = 4\pi \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}{A},$$

$$\Omega^H = 4\pi \frac{J}{MA},$$

$$\Phi^H = 4\pi \frac{Qr_+}{A}.$$

r_+ شعاع افق رویداد از رابطه

$$r_+ = \left(\frac{A}{4\pi} \right)^{1/2},$$

و با توجه به رابطه (۱.۴) به صورت زیر بدست می‌آید

$$r_+ = \left(2M^2 - Q^2 + 2M \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right)^{1/2}$$

رابطه (۳.۴) شبیه به قانون اول ترمودینامیک به صورت

$$dE = \theta dS^H + \Omega^H dJ + \Phi^H dQ, \quad (4.4)$$

است. در رابطه (۴.۴) $\theta = \hbar T_H$ است که در اینجا T_H نشان دهنده دمای هاوکینگ است که به

صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_H = \frac{k}{2\pi}. \quad (5.4)$$

از مقایسه رابطه (۳.۴) و (۴.۴)

$$S^H = \frac{A}{4\hbar}, \quad (6.4)$$

بدست می‌آید که S_H آنروپی بکنشتاین-هاوکینگ است.

به طور مثال برای سیاهچاله بدون بار و غیر چرخانی به جرم خورشید ($M_s = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$)

مساحت افق رویداد و آنروپی به صورت زیر حاصل می‌شود

$$A = 1.987 \times 10^{61}, \quad S^H = 63.1 \times 10^{120}. \quad (7.4)$$

۲-۴ فرمول انتگرالی جرم سیاهچاله

یک سیستم پایدار دارای سیاهچاله را در نظر می‌گیریم. سرعت زاویه‌ای Ω^H ، گرانش سطحی k و پتانسیل الکتریکی Φ^H بر روی افق رویداد یک سیاهچاله پایدار، ثابت هستند. باردن، کارتر و هاوکینگ به طور جداگانه در سال ۱۹۷۳ جرم سیاهچاله در بینهایت، M^∞ ، را روی یک سطح تخت متقارن پایدار به صورت زیر بدست آوردند [۳۴]، [۳۵] و [۳۶]

$$M^\infty = \int_{\Sigma} (\mathfrak{z} T_{\nu}^{\mu} - T \delta_{\nu}^{\mu}) \xi_{(t)}^{\nu} d\sigma_{\mu} + \mathfrak{z} \Omega^H J^H + \frac{k}{4\pi} A. \quad (۸.۴)$$

در اینجا T_{ν}^{μ} تانسور انرژی تکانه کل، Ω^H سرعت زاویه‌ای، J^H تکانه زاویه‌ای، k گرانش سطحی و A مساحت افق رویداد است. انتگرال‌گیری روی سطح تخت Σ انجام می‌شود. سطح Σ ، سطح دو بعدی ∂B افق رویداد را قطع میکند. سطح Σ را طوری انتخاب می‌کنیم که بردار کیلینگ $\xi_{(\Phi)}^{\mu}$ مماس بر ∂B و Σ عمود بر بردار کیلینگ $\xi_{(\Phi)}^{\mu}$ باشد. این فرمول ارتباط بین یک سیاهچاله که در بینهایت مشاهده می‌شود و ویژگی‌های هندسی افق رویداد را بیان می‌کند.

۳-۴ فرمول دیفرانسیلی جرم سیاهچاله

فرمول انتگرالی جرم (۸.۴) امکان محاسبه اختلاف جرم dM^∞ را برای دو پیکربندی مانا یا ایستا شامل سیاهچاله فراهم می‌کند. تغییرات متریک را با $\delta g_{\mu\nu}$ نشان می‌دهیم. آن را با یک پیمانه دلخواه $\delta\lambda_{(\mu;\nu)}$ تغییر می‌دهیم

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} + \delta\lambda_{(\mu;\nu)},$$

به طوری که

$$\delta\xi_{(\Phi)}^{\mu} = \delta\xi_{(t)}^{\mu} = 0.$$

بنابراین تغییرات جرم به فرم زیر نوشته می‌شود [۳۷]

$$dM^\infty = \Omega^H dJ^H + \frac{k}{8\pi} dA - \delta \int_{\Sigma} T_{\nu}^{\mu} \xi_{(t)}^{\nu} d\sigma_{\mu} - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \xi_{(t)}^{\alpha} d\sigma_{\alpha}. \quad (۹.۴)$$

$T_{\nu}^{(m)\mu}$ تانسور انرژی تکانه برای شاره کامل می‌باشد، چرخش اطراف سیاهچاله با سرعت Ω است و سیستم قبل و بعد از اضافه کردن پارامتر بار ایستا و متقارن است. رابطه کلی به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۸] و [۳۹]

$$dM^{\infty} = \Omega^H dJ^H + \Phi^H dQ + \frac{k}{\lambda\pi} dA + \delta q, \quad (۱۰.۴)$$

که در اینجا

$$\begin{aligned} \delta q = & \int \Omega \delta (d^{\star} J^{(m)} + \xi^{\alpha(\Phi)} A_{\alpha} d^{\star} Q) - \int (\xi_{(t)}^{\alpha} + \Omega \xi_{(\Phi)}^{\alpha}) A_{\alpha} \delta (d^{\star} Q) \\ & + \int T \delta (d^{\star} S^{(m)}) + \int \bar{\mu} \delta (d^{\star} N), \end{aligned} \quad (۱۱.۴)$$

کل بار اجرام تا سطح سیاهچاله است. در رابطه (۱۱.۴)، $d^{\star} J^{(m)}$ المان تکانه زاویه‌ای ماده

$$d^{\star} J^{(m)} = T_{\nu}^{(m)\mu} \xi_{(\Phi)}^{\nu},$$

$d^{\star} Q$ المان بار

$$d^{\star} Q = j^{\mu} d\sigma_{\mu},$$

j^{μ} جریان الکتریکی، θ دمای موضعی

$$\bar{\theta} = \left[-(\xi_{(t)} + \Omega \xi_{(\Phi)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \theta,$$

$d^{\star} S^{(m)}$ المان آنتروپی ماده، μ پتانسیل شیمیایی ماده

$$\bar{\mu} = \frac{\mu \bar{\theta}}{\theta},$$

و $d^{\star} N$ توزیع موضعی تعداد ذرات است.

اگر ماده و میدان خارج از سیاهچاله وجود نداشته باشد، جمله آخر در رابطه (۱۰.۴) حذف می‌شود و

برای سیاهچاله کر-نیومن به فرم معادله (۳.۴) در می‌آید.

عبارات انتگرالی و دیفرانسیلی که برای جرم بیان کردیم در واقع روابط اصلی برای توصیف قوانین

ترمودینامیک در فیزیک سیاهچاله‌ها است. به عنوان مثال رابطه (۱۰.۴) بیان کننده قانون اول ترمودینامیک است.

۴-۴ قوانین ترمودینامیک سیاهچاله‌ها

در این بخش ما می‌خواهیم شباهت بین سیاهچاله و ترمودینامیک را بررسی کنیم. به این منظور چهار قانون مطابق یا به عبارتی فراتر از چهار قانون ترمودینامیک بیان می‌کنیم. ابتدا طبق نظریه ترمودینامیک سیاهچاله‌ها کمیات زیر را معرفی می‌کنیم

$$\theta = \frac{\hbar k}{2\pi}, \quad S^H = \frac{A}{4\hbar}, \quad E = M, \quad (12.4)$$

که به ترتیب نقش دما، آنتروپی و انرژی درونی سیاهچاله را ایفا می‌کنند. این چهار قانون عبارتند از

- قانون صفرم: گرانش سطحی k یک سیاهچاله ایستای در حالت تعادل در همه جای سطح افق رویداد ثابت است. این قانون معادل قانون صفرم ترمودینامیک است که بیان می‌کند دما در نقاط مختلف یک جسم در حال تعادل یکسان است.

- قانون اول: اگر یک سیاهچاله باردار چرخان با آنتروپی S ، بار Q و اندازه حرکت زاویه‌ای J به حالتی با آنتروپی $S + dS$ ، بار $Q + dQ$ و اندازه حرکت زاویه‌ای $J + dJ$ برود خواهیم داشت

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ + \delta q.$$

- قانون دوم: طی هیچ فرایند کلاسیکی مساحت افق رویداد و در نتیجه آنتروپی کاهش نمی‌یابد. یعنی

$$dA \geq 0 \quad \Rightarrow \quad dS \geq 0$$

علامت قانون دوم در ترمودینامیک و همچنین در فیزیک سیاهچاله‌ها برگشت‌ناپذیری ذاتی هر سیستم را نشان می‌دهد و به همین ترتیب جهت زمان را نیز مشخص می‌کند. در ترمودینامیک قانون کاهش ناپذیری به معنی این است که بخشی از انرژی درونی به کار تبدیل نمی‌شود. به همین صورت قانون کاهش ناپذیری مساحت افق رویداد به این معناست که بخشی از انرژی درونی با گذشت زمان افزایش می‌یابد و قابل استخراج نیست.

* تعمیم قانون دوم: اگر دو سیاهچاله باهم جمع شوند، افق رویداد سیاهچاله نهایی از مجموع افق رویدادهای سیاهچاله‌های اولیه بیشتر خواهد بود. این مشابه قانون دوم ترمودینامیک است که بیان می‌کند آنتروپی همیشه در حال افزایش است.

- قانون سوم: قانون سوم ترمودینامیک به بیان‌های مختلفی ارائه شده است. یکی از قوی‌ترین بیان‌ها توسط پلانک ارائه شده است که می‌گوید، اگر دمای سیستم به صفر میل کند آنگاه آنتروپی نیز به صفر میل می‌کند. به بیان دیگر، هنگامی که انرژی یک سیستم به حداقل مقدار خود میل می‌کند، آنتروپی سیستم به مقدار قابل چشم‌پوشی می‌رسد.
- در فیزیک سیاهچاله‌ها قانون سوم بیان می‌کند که هیچ فرایند کلاسیکی وجود ندارد که بتواند گرانش سطحی k را به صفر کاهش دهد [۲۴].

فصل ۵

ترمودینامیک سیاهچاله آنتی دوسیه سه بعدی در حضور میدان پنجمگر

داده‌های مشاهداتی بسیار دقیق تایید می‌کنند که جهان در حال انبساط شتابدار است [۴۰] که ممکن است به دلیل وجود انرژی تاریک باشد. در کیهان‌شناسی انرژی تاریک یک نوع از انرژی است که همه فضا را در بر می‌گیرد و سرعت انبساط جهان را افزایش می‌دهد. در حقیقت انرژی تاریک حدود ۷۰ درصد از جهان را تشکیل می‌دهد [۴۱]. دو نوع از کاندیداهایی که برای انرژی تاریک معرفی شده‌اند یکی ثابت کیهان‌شناسی که یک چگالی انرژی ثابت است و به صورت همگن جهان را در بر می‌گیرد و نوع دیگر میدان اسکالر است، کمیت‌های دینامیکی که چگالی انرژی آنها در فضا زمان قابل تغییر است.

به عنوان مثالی برای میدان اسکالر می‌توانیم ماده پنجمگر^۱ را نام ببریم. در واقع پنجمگر یک میدان اسکالر است که در همه جای جهان وجود دارد و یک کاندیدا برای انرژی تاریک است [۴۲] و توسط معادله حالت $p_q = \omega_q \rho_q$ مشخص می‌شود. در اینجا p_q فشار، ρ_q چگالی انرژی و پارامتر معادله حالت برای ماده پنجمگر $-\frac{1}{3} < \omega_q < -1$ است. مطالعه سیاهچاله‌ها در حضور انرژی تاریک به

^۱quintessence

درک بهتر ما از فیزیک سیاهچاله‌ها کمک خواهد کرد.

اولین حل سیاهچاله‌ای برای یک فضای متقارن کروی در حضور میدان پنجمگهر توسط کیسلو^۲ بدست آمد [۴۳]. پس از آن مطالعه سیاهچاله‌های متقارن کروی ایستا در حضور ماده پنجمگهر بسیار مورد توجه قرار گرفت [۴۴]. ما یک حل سیاهچاله آنتی دوسیه در حضور میدان پنجمگهر در سه بعد را بدست آورده و ترمودینامیک آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱-۵ مدل

در این بخش ما به بررسی سیاهچاله سه بعدی در حضور ماده پنجمگهر خواهیم پرداخت. ماده پنجمگهر می‌تواند به عنوان یک سیال با پارامتر معادله حالت $-\frac{1}{3} < \omega_q < -1$ در نظر گرفته شود [۴۵]. لاگرانژی ماده پنجمگهر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_m = -\frac{1}{4}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi). \quad (۱.۵)$$

از تعریف تانسور انرژی تکانه داریم

$$T_{\mu\nu} = L_m g_{\mu\nu} + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad (۲.۵)$$

همچنین تانسور انرژی تکانه را می‌توان به فرم شاره کامل نوشت

$$T_{\mu\nu} = (\rho_q + p_q)u_\mu u_\nu + p_q g_{\mu\nu}. \quad (۳.۵)$$

به کمک تعریف بردار یکه

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu\phi}{\sqrt{-\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi}}, \quad (۴.۵)$$

و مقایسه دو رابطه (۲.۵) و (۳.۵) چگالی انرژی و فشار را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$p_q = -\frac{1}{4}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi), \quad (۵.۵)$$

$$\rho_q = -\frac{1}{4}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi). \quad (۶.۵)$$

^۲Kiselev

متریک فضا زمان سه بعدی متقارن کروی ایستا را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{A(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (7.5)$$

تابع $A(r)$ به کمک معادلات میدان اینشتین

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{L^2}g_{\mu\nu} = \Lambda\pi T_{\mu\nu}, \quad (8.5)$$

بدست می‌آید. L شعاع آنتی دوسیه^۲ است.

مولفه‌های زمانی و مکانی تانسور انرژی تکانه برای یک متریک متقارن کروی ایستا برای فضا زمان D بُعدی را می‌توان به شکل زیر نوشت. در واقع کلی‌ترین حالت تانسور درجه دو را می‌توان با مولفه

متریک و مولفه فضایی به صورت زیر ساخت [۴۵][۴۶][۴۷]

$$T^0_0 = \alpha(r),$$

$$T^j_j = 0,$$

$$T^j_i = \beta(r)r_i r^j + \gamma(r)\delta^j_i. \quad (9.5)$$

در اینجا r^i مولفه‌های فضایی هستند. از میانگین‌گیری مولفه T^j_i بر روی فضا خواهیم داشت

$$\langle T^j_i \rangle = \eta(r)\delta^j_i, \quad (10.5)$$

که

$$\eta(r) = -\frac{1}{D-1}\beta(r)r^2 + \gamma(r), \quad (11.5)$$

و معادله حالت برای ماده پنجمگهر به صورت زیر است

$$\eta(r) = -\omega_q \alpha(r). \quad (12.5)$$

^۲به فضایی با انحنای منفی فضای آنتی دوسیه گفته می‌شود.

در اینجا از

$$\langle r_i r^j \rangle = \frac{r_n r^n}{D-1} \delta_i^j, \quad (13.5)$$

استفاده کرده‌ایم. از اینرو تانسور انرژی تکانه برای ماده پنجمگهر در D بُعد به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} T_{\cdot}^{\cdot} &= \rho_q, \\ T_{\cdot}^j &= 0, \\ T_i^j &= (D-1)\omega_q \rho_q \left\{ -[1 + (D-1)\eta] \frac{r_i r^j}{r_n r^n} + \eta \delta_i^j \right\}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

بنابراین تانسور انرژی تکانه برای ماده پنجمگهر در ۳ بُعد به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} T_{\cdot}^{\cdot} &= \rho_q, \\ T_{\cdot}^i &= 0, \\ T_j^i &= 2\omega_q \rho_q \left[-(1+2c) \frac{r^j r_i}{r^2} + c \delta_i^j \right]. \end{aligned} \quad (15.5)$$

در اینجا c یک مقدار ثابت است که در ادامه بدست می‌آوریم.

مولفه‌های تانسور ریچی برای متریک (۷.۵) به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} R_{\cdot}^{\cdot} &= -\frac{A'(r) + rA''(r)}{2r}, \\ R_{\cdot}^1 &= -\frac{A'(r) + rA''(r)}{2r}, \\ R_{\cdot}^2 &= -\frac{A'(r)}{r}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

به کمک رابطه (۱۰.۱) اسکالر ریچی را بدست می‌آوریم

$$R = \frac{2A'(r)}{r} - A''(r). \quad (17.5)$$

اکنون با استفاده از مولفه‌های تانسور ریچی (۱۶.۵) و اسکالر ریچی (۱۷.۵) و معادلات میدان اینشتین

(۸.۵)، مولفه‌های تانسور انرژی تکانه را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} T_{\cdot}^{\cdot} &= T_{\cdot}^{\cdot} = -\frac{A'}{2r} - \frac{1}{L^2}, \\ T_{\cdot}^{\cdot} &= \frac{A''}{2} - \frac{1}{L^2}. \end{aligned} \quad (18.5)$$

لازم به ذکر است که در اینجا بنا به قرار داد $\Lambda\pi G = 1$ گرفتیم و از آنجایی که $R_{\cdot}^{\cdot} = R_{\cdot}^{\cdot}$ بدست می‌آید، بنابراین برای این سیاهچاله $T_{\cdot}^{\cdot} = T_{\cdot}^{\cdot}$ است. با استفاده از دو معادله (۱۵.۵) و (۱۸.۵) خواهیم داشت

$$T_{\cdot}^{\cdot} = \rho_q = 2\omega_q \rho_q [-(1 + 2c) + c]. \quad (19.5)$$

با محاسبات ساده مقدار c را بدست می‌آوریم

$$c = -\frac{2\omega_q + 1}{2\omega_q}. \quad (20.5)$$

بنابراین تانسور انرژی تکانه به صورت زیر حاصل می‌شود [۴۴]

$$\begin{aligned} T_{\cdot}^{\cdot} &= T_{\cdot}^{\cdot} = \rho_q, \\ T_{\cdot}^{\cdot} &= \rho_q(2\omega_q + 1). \end{aligned} \quad (21.5)$$

با حل معادله میدان اینشتین توسط مولفه‌های تانسور انرژی تکانه (۲۱.۵) مولفه متریک به صورت زیر بدست می‌آید

$$A(x) = x^2 + \left(\frac{\mu}{x}\right)^{2\omega_q} - \beta, \quad (22.5)$$

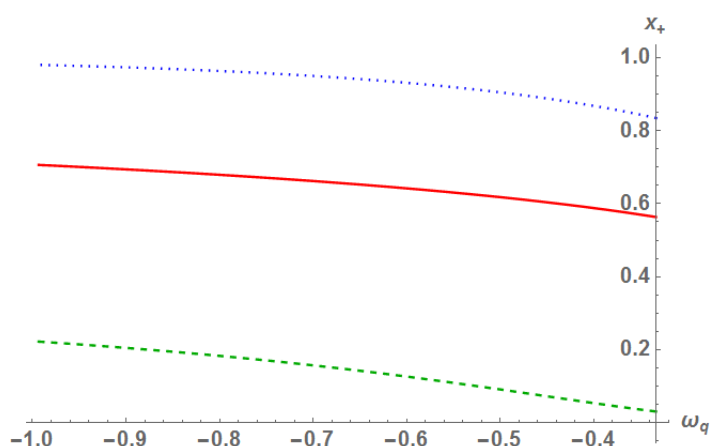
که در اینجا β ثابت انتگرال‌گیری است. $\beta > 0$ و x و μ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$x = \frac{r}{L}, \quad \mu = \frac{2M}{L}.$$

در حل بالا M جرم سیاهچاله است که از تقریب نیوتنی بدست می‌آید. با توجه به جمله اول و دوم متریک، تکینگی‌های موجود را بدست می‌آوریم. در واقع با صفر در نظر گرفتن معادله (۲۲.۵)

$$A(x_+) = x_+^2 + \left(\frac{\mu}{x_+}\right)^{2\omega_q} - \beta = 0, \quad (23.5)$$

و با حل عددی x_+ ، تکینگی و در نتیجه افق رویداد سیاهچاله را می‌توان بدست آورد. در شکل (۱-۵) رفتار مکان افق سیاهچاله را برای مقادیر مختلف جرم μ و β رسم کرده‌ایم. از مشاهده نمودار (۱-۵)



شکل ۱-۵: منحنی بالا $\beta = 1$ و $\mu = 5$ ، منحنی وسط $\beta = 1$ و $\mu = 1$ ، منحنی پایین $\beta = 0.1$ و $\mu = 1$

در می‌یابیم که با کاهش ω_q طول افق رویداد به‌طور جزئی افزایش می‌یابد، اما با تغییر پارامتر β تغییرات طول افق رویداد چشم‌گیر و قابل ملاحظه است. همچنین تغییر جرم μ نیز تا حدود قابل ملاحظه‌ای عامل تغییرات طول افق رویداد می‌شود. بنابراین می‌توان گفت به ترتیب پارامتر β و μ نسبت به ω_q تأثیر بیشتری بر طول افق رویداد سیاهچاله دارند.

۲-۵ ترمودینامیک سیاهچاله

در این بخش رفتار ترمودینامیکی سیاهچاله را بررسی کرده و در مورد پایداری آن بحث خواهیم کرد. ابتدا با استفاده از معادله (۲۳.۵) جرم سیاهچاله را بر حسب افق رویداد آن بدست می‌آوریم (برای

سادگی کار در ادامه افق رویداد را با x نشان می‌دهیم.

$$\mu = x(\beta - x^2)^{\frac{1}{2\omega_q}}. \quad (24.5)$$

۱-۲-۵ دمای هاوکینگ

دمای هاوکینگ یک سیاهچاله با توجه به عدم وجود یک تکینگی مخروطی^۴ در افق سیاهچاله به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T = \frac{k}{2\pi}. \quad (25.5)$$

در معادله (۲۵.۵)، k گرانش سطحی سیاهچاله است و آن را می‌توان به عنوان مولفه زمانی متریک بدست آورد، یعنی

$$k = -\frac{1}{2} \left(\frac{dg_{..}}{dr} \right)_{r=r_+}, \quad (26.5)$$

بنابراین

$$k = \frac{1}{L} \left[x - \frac{\omega_q}{\mu} \left(\frac{\mu}{x} \right)^{2\omega_q+1} \right]. \quad (27.5)$$

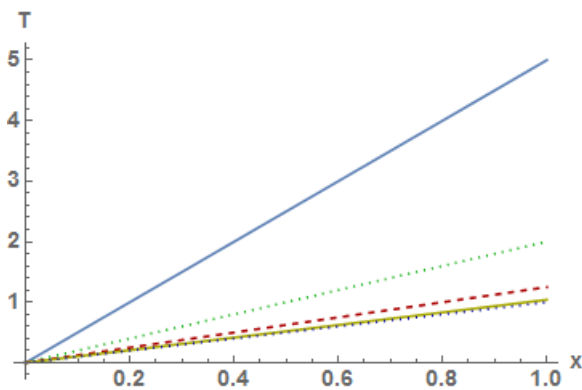
از اینرو دمای هاوکینگ سیاهچاله به صورت زیر بدست می‌آید

$$T = \frac{1}{2\pi L} \left(x - \frac{\omega_q}{\mu} \left(\frac{\mu}{x} \right)^{2\omega_q+1} \right). \quad (28.5)$$

با رسم چند نمودار که به روش عددی ترسیم شده در مورد دمای هاوکینگ بحث خواهیم کرد.

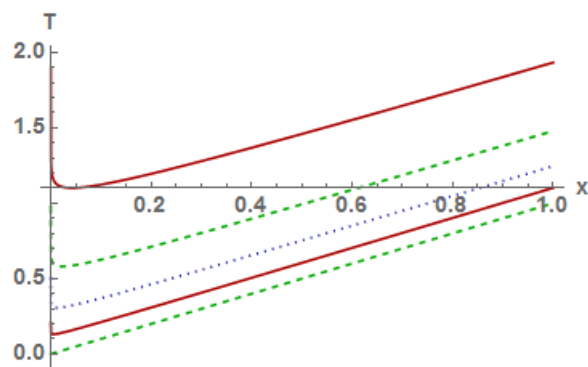
- در شکل (۲-۵) $\omega_q = -1$ می‌باشد و دما بر حسب افق رویداد را برای چند مقدار μ مقایسه می‌کنیم.

^۴ انواع مختلفی از تکینگی‌ها وجود دارد که هرکدام ویژگی‌های مختلفی دارند و دارای خصوصیات نظریه‌هایی هستند که در ابتدا بیان شده‌اند. از انواع تکینگی‌ها می‌توان تکینگی مخروطی و تکینگی منحنی را نام برد. تکینگی مخروطی (Conical Singularity) زمانی رخ می‌دهد که نقطه‌ای وجود داشته باشد که فضا زمان مانند یک مخروط در اطراف این نقطه به نظر برسد و تکینگی در نوک مخروط قرار گیرد.



شکل ۵-۲: به ترتیب از بالا به پایین نمودارها مربوط به $\mu = 5, \mu = 2, \mu = 1, \mu = 0.5$ و $\mu = 1000$ است.

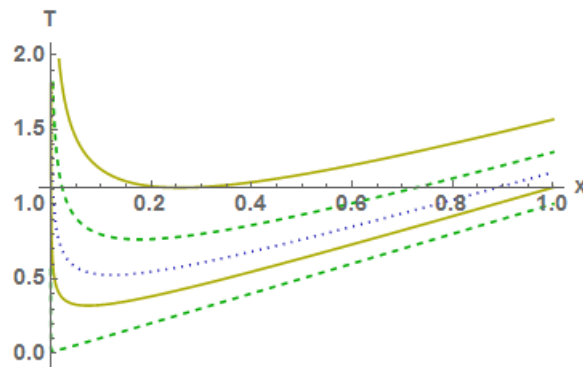
● در شکل (۳-۵) $\omega_q = -0.48$ می باشد و دما بر حسب افق رویداد را برای چند مقدار μ مقایسه می کنیم.



شکل ۵-۳: به ترتیب از بالا به پایین نمودارها مربوط به $\mu = 5, \mu = 2, \mu = 1, \mu = 0.5$ و $\mu = 1000$ است.

● در شکل (۴-۵) $\omega_q = -0.35$ می باشد و دما بر حسب افق رویداد را برای چند مقدار μ مقایسه می کنیم.

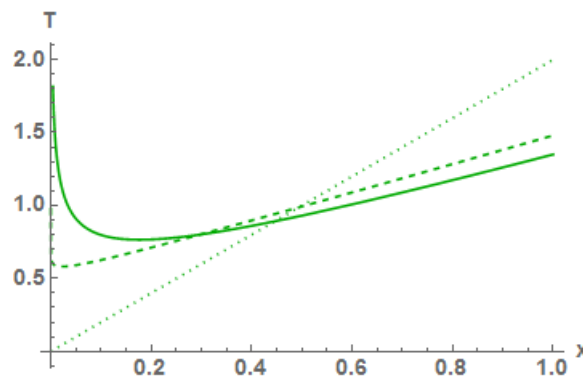
از نمودارهای بالا مشاهده می کنیم که برای پارامتر حالت های کوچک، دما با شعاع افق سیاهچاله تقریباً بصورت خطی افزایش می یابد. یعنی برای سیاهچاله های بزرگ تر دمای هاوکینگ بیشتر است. این نتیجه قابل قبول است زیرا طبق تعریف، دما با گرانش سطحی رابطه مستقیم دارد و در این حالت گرانش سطحی یک تابع خطی از شعاع افق است. برای پارامترهای حالت بزرگتر



شکل ۴-۵: به ترتیب از بالا به پایین نمودارها مربوط به $\mu = 0.5$, $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 5$ و $\mu = 1000$ است.

رابطه بین گرانش سطحی و شعاع افق غیرخطی می‌شود. همان‌طور که از شکل هم پیداست، با افزایش شعاع افق، دما ابتدا کاهش می‌یابد و پس از آن تقریباً بصورت خطی شروع به افزایش می‌کند. در واقع در شعاع‌های کم سهم پنجم‌گهر غالب است و در شعاع‌های بالاتر سهم میدان پنجم‌گهر کاهش می‌یابد و سیستم بصورت خطی رفتار می‌کند.

● و در آخر نمودار دما برای سه مقدار $\omega_q = -1$, $\omega_q = -0.84$ و $\omega_q = -0.35$ که در هر سه $\mu = 1$ می‌باشد.



شکل ۵-۵: خط ممتد برای $\omega_q = -0.35$ ، خط چین برای $\omega_q = -0.48$ و نقطه چین برای $\omega_q = -1$ می‌باشد.

در این نمودار هم مشاهده می‌کنیم که با کاهش پارامتر چگالی حالت سیستم به سمت غیرخطی شدن پیش می‌رود. همچنین در $x = 0$ برای پارامتر حالت $\omega_q = -1$ شعاع افق صفر می‌شود

و برای پارامترهای حالت $\omega_q = -0.48$ و $\omega_q = -0.35$ شعاع افق به سمت بی‌نهایت می‌رود.

۵-۲-۲ آنروپی

یکی دیگر از مقادیر ترمودینامیکی مهم، آنروپی سیاهچاله است. با توجه به اینکه دمای یک سیاهچاله را با استفاده از قانون اول ترمودینامیک و در نظر گرفتن سیاهچاله به عنوان یک سیستم ترمودینامیکی می‌توان به عنوان یک تابع انرژی در نظر گرفت، داریم

$$dE = TdS. \quad (29.5)$$

بنابراین آنروپی به صورت زیر بدست می‌آید

$$S = \int_0^M \frac{1}{T} dE. \quad (30.5)$$

M جرم سیاهچاله است. با تغییر متغیر انتگرال‌گیری به مختصات شعاعی آنروپی به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$S = \frac{L^2}{2} \int_0^{x_+} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{1}{T} dx. \quad (31.5)$$

بنابراین به کمک روابط (24.5) و (28.5) خواهیم داشت

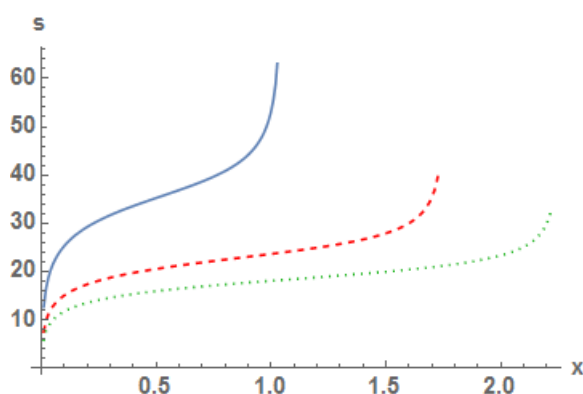
$$S = \frac{L^2 \pi}{\omega_q} \int_0^{x_+} x(\beta - x^2)^{\frac{1}{2}\omega_q - 1} \frac{-\beta\omega_q + x^2(1 + \omega_q)}{x^2 - \left(\frac{\mu}{x}\right)^{2\omega_q\omega_q}} dx. \quad (32.5)$$

انتگرال بالا بصورت تحلیلی قابل محاسبه نیست. ابتدا به صورت عددی به کمک نرم افزار ممتیکا چند نمودار رسم کرده و نمودارهای حاصل را مورد بحث قرار می‌دهیم و در ادامه چند حالت حدی را بررسی خواهیم کرد.

- ابتدا پارامترهای μ و ω_q را با مقادیر زیر ثابت در نظر می‌گیریم

$$\mu = 1/1, \quad \omega_q = -1,$$

و نمودار آنتروپی بر حسب افق رویداد را با سه مقدار مختلف β در شکل (۵-۶) رسم می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که با جرم ثابت برای سیاهچاله، با افزایش افق رویداد سیاهچاله، آنتروپی



شکل ۵-۶: خط ممند برای مقدار $\beta = 1/1$ منحنی خط‌چین برای مقدار $\beta = 3/1$ و منحنی نقطه‌چین برای مقدار $\beta = 5/1$ می‌باشد.

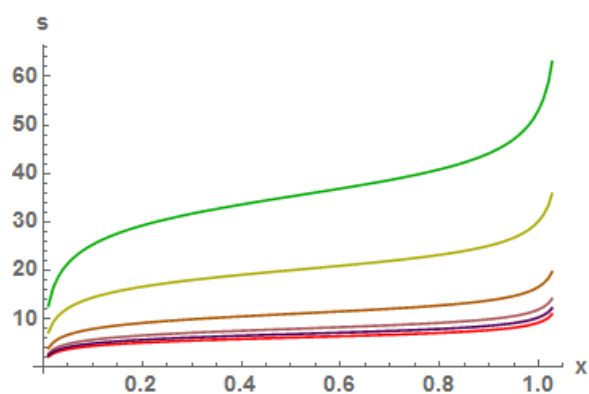
افزایش می‌یابد. مشاهده می‌کنیم که با کاهش مقدار β مکان تکینگی در آنتروپی کاهش می‌یابد. این بدان معناست که با کاهش مقدار β فقط سیاهچاله‌های با شعاع کمتر از نظر فیزیکی قابل قبول هستند.

- در این حالت مقادیر ω_q و β را ثابت فرض می‌کنیم، به طوریکه

$$\beta = 1/1, \quad \omega_q = -1,$$

باشند. آنگاه نمودار آنتروپی بر حسب افق رویداد را برای مقادیر مختلف جرم μ رسم می‌کنیم.

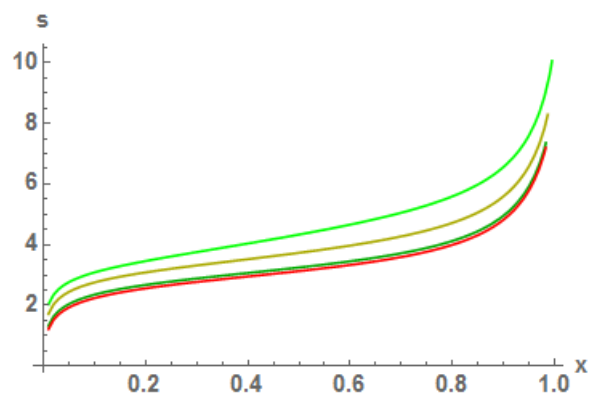
در این حالت هم مانند حالت قبل در β ثابت با افزایش مقدار μ یعنی جرم سیاهچاله، مقدار آنتروپی کاهش می‌یابد. این بدین خاطر است که سیاهچاله از پنجمگر تشکیل شده است و با افزایش مقدار میدان پنجمگر آنتروپی کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۵-۷: منحنی‌ها از بالا به پایین مربوط به $\mu = 3/1$, $\mu = 1000$, $\mu = 1/2$, $\mu = 1/5$, $\mu = 2/1$ می‌باشد.

● در حالت مورد بررسی بعدی، برای ω_q و β مقادیر ثابت زیر را قرار می‌دهیم

$$\beta = 1/1, \quad \omega_q = -0.48.$$



شکل ۵-۸: از بالا به پایین منحنی‌ها مربوط به مقادیر $\mu = 1500$, $\mu = 1000$, $\mu = 900$ و $\mu = 2000$ می‌باشند.

مشاهده می‌کنیم که بصورت کیفی رفتار آنتروپی بر حسب شعاع افق سیاه‌چاله با افزایش آنتروپی تغییر معناداری نمی‌کند.

۳-۲-۵ حالت‌های حدی

حالت‌های حدی به شرح زیر می‌باشد،

۱. اگر جرم سیاهچاله بسیار کوچک باشد یعنی $\mu \rightarrow 0$ آنتروپی به صورت زیر بدست می‌آید

$$S = \frac{\mu^2 \left(\frac{x}{\mu}\right)^{2(1+\omega_q)}}{2\omega_q(1+\omega_q)} [f_1 - (1+\omega_q)f_2], \quad (33.5)$$

که در اینجا f_1 و f_2 توابع فوق هندسی هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$f_1 = {}_2F_1\left[1 - \frac{1}{2\omega_q}, 1 + \omega_q, 2 + \omega_q, \frac{x^2}{\beta}\right]$$

$$f_2 = {}_2F_1\left[-\frac{1}{2\omega_q}, 1 + \omega_q, 2 + \omega_q, \frac{x^2}{\beta}\right]$$

با توجه به معادله (۲۳.۵) در این حالت شعاع افق نیز به $x \rightarrow 0$ میل می‌کند. بنابراین آنتروپی

تا مرتبه اول به صورت زیر بدست می‌آید

$$S = -\frac{\beta}{2(1+\omega_q)\omega_q} \frac{1+2\omega_q}{2\omega_q} \mu^2 > 0. \quad (34.5)$$

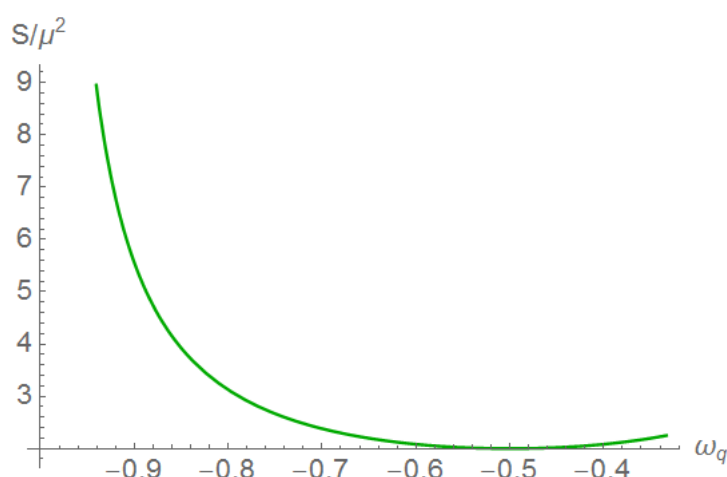
در نتیجه $S \rightarrow 0$ میل می‌کند که منطقی است. در شکل (۹-۵) رفتار $\frac{S}{\mu^2}$ را بر حسب پارامتر حالت ω_q رسم کرده‌ایم.

۲. برای حالت $\beta \rightarrow 0$ با توجه به معادله (۲۳.۵) شعاع افق به صفر میل می‌کند. و در این حالت

آنتروپی به صورت زیر

$$S = \beta^{\frac{1}{2\omega_q}} \ln x, \quad (35.5)$$

بدست می‌آید.



شکل ۵-۹: رفتار آنتروپی در حالت $\mu \rightarrow 0$ بر حسب پارامتر معادله حالت

۳. اگر $\mu \rightarrow \infty$ از معادله (۲۳.۵) به دست می‌آوریم که شعاع افق به $x \rightarrow \sqrt{\beta}$ میل می‌کند، و آنتروپی به صورت زیر بدست می‌آید

$$S = -1 + \mu. \quad (۳۶.۵)$$

که می‌توان از ۱ نسبت به μ صرف نظر کرد. بنابراین خواهیم داشت

$$S = \mu. \quad (۳۷.۵)$$

۴-۲-۵ ظرفیت گرمایی

برای بررسی پایداری ترمودینامیکی سیاهچاله باید ظرفیت گرمایی آن را محاسبه کنیم. ثبات گرمایی موضعی سیاهچاله با علامت ظرفیت گرمایی تعیین می‌شود. اگر ظرفیت گرمایی مثبت باشد، سیاهچاله نسبت به نوسانات گرمایی پایدار است. ظرفیت گرمایی برای یک سیاهچاله در بار ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_q = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_q = \frac{L}{\gamma} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_q \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_q. \quad (۳۸.۵)$$

به توجه به معادلات (۲۴.۵) و (۲۸.۵) برای این سیاهچاله ظرفیت گرمایی در بار ثابت به صورت زیر حاصل می‌شود

$$C_q = \frac{L^2 \pi x^2 (\beta - x^2)^{\frac{1}{2\omega_q} - 1} (x^2 (1 + \omega_q) - \beta \omega_q)}{\omega_q x^2 + \left(\frac{\mu}{x}\right)^{2\omega_q} \omega_q (1 + 2\omega_q)}. \quad (39.5)$$

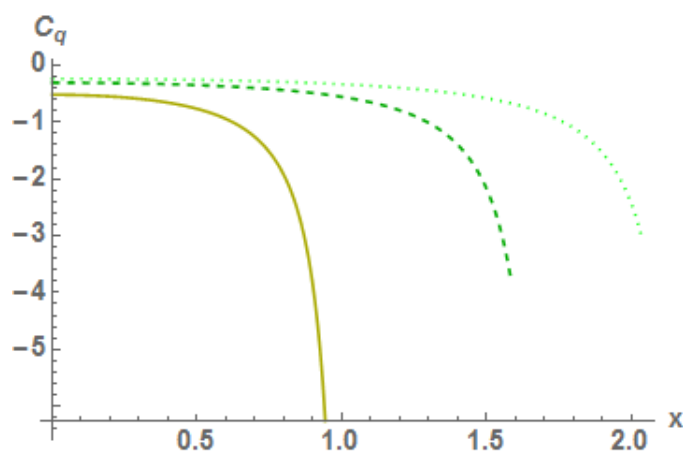
ظرفیت گرمایی (۳۹.۵) را بر حسب افق رویداد برای مقادیر مختلف ω_q ، μ و β رسم می‌کنیم و سپس برای چند حالت حدی نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم.

• ابتدا با در نظر گرفتن مقادیر ثابت

$$\omega_q = -1, \quad \mu = 1/1,$$

و مقادیر مختلف β شکل (۵-۱۰) حاصل می‌شوند.

در این حالت مشاهده می‌کنیم که با افزایش مقدار β مقدار ظرفیت گرمایی ویژه افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۱۰: رفتار ظرفیت گرمایی ویژه بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\beta = 1/1$ و $\beta = 3/1$ و $\beta = 5/1$ به ترتیب برای خطوط ممتد، خط چین و نقطه‌چین.

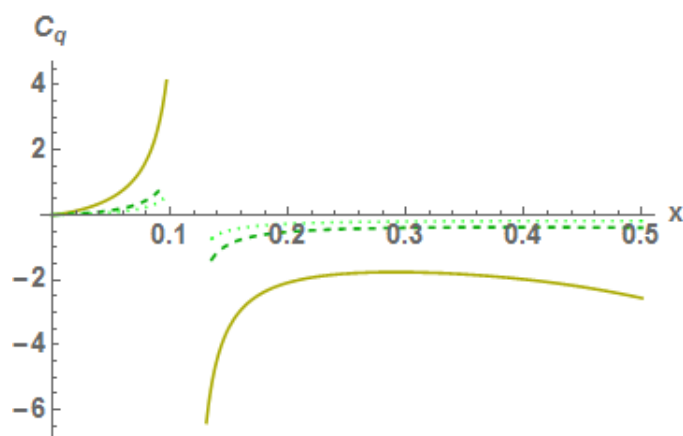
همچنین مشاهده می‌کنیم که برای تمام این حالت‌ها مقدار ظرفیت گرمایی ویژه منفی است که به معنای ناپایداری سیستم می‌باشد. این بدان معناست که برای حالت $\omega_q = -1$ سیاهچاله‌ها ناپایدار هستند. همچنین مشاهده می‌کنیم که با افزایش شعاع افق، ناپایداری سیاهچاله‌ها افزایش می‌یابد.

- با در نظر گرفتن مقادیر ثابت

$$\omega_q = -0.48, \quad \mu = 1/1,$$

و مقادیر مختلف β شکل (۱۱-۵) حاصل می‌شوند.

در این حالت مشاهده می‌کنیم که ظرفیت گرمایی ویژه برای شعاع‌های بزرگ منفی است که



شکل ۱۱-۵: رفتار ظرفیت گرمایی ویژه بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\beta = 1/1$ و $\beta = 3/1$ و $\beta = 5/1$ به ترتیب برای خطوط ممتد، خط چین و نقطه‌چین.

نشان می‌دهد که سیاه‌چاله‌ها فقط برای شعاع‌های کوچک پایدار هستند.

- با در نظر گرفتن مقادیر ثابت

$$\omega_q = -0.3, \quad \mu = 1/1,$$

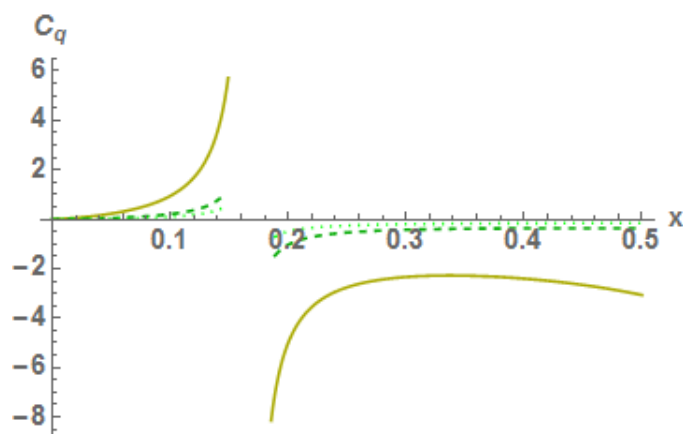
و مقادیر مختلف β شکل (۱۲-۵) حاصل می‌شوند.

در این حالت مشاهده می‌کنیم که ظرفیت گرمایی ویژه برای شعاع‌های بزرگ منفی است که

نشان می‌دهد که سیاه‌چاله‌ها فقط برای شعاع‌های کوچک پایدار هستند. البته مشاهده می‌کنیم که

با افزایش پارامتر حالت شعاع‌های مجاز افزایش پیدا کرده است. نتیجه می‌گیریم که پارامترهای

معادله حالت نزدیک‌تر به مقدار $1/3 -$ فیزیکی‌تر هستند.



شکل ۵-۱۲: رفتار ظرفیت گرمایی ویژه بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\beta = 1/1$ و $\beta = 3/1$ و $\beta = 5/1$ به ترتیب برای خطوط ممتد، خط چین و نقطه‌چین.

۵-۲-۵ حالت‌های حدی

برای ظرفیت گرمایی ویژه هم مانند آنروپی حالت‌های حدی زیر را مورد بررسی قرار خواهیم داد:

۱. در حد $\mu \rightarrow 0$ خواهیم داشت

$$C_q = - \frac{L^2 \pi^2 \left(\frac{x}{\mu}\right)^{2(1+\omega_q)} \mu^2 \beta^{\frac{1}{2\omega_q}}}{\omega_q (2 + \omega_q)}. \quad (40.5)$$

برای اینکه $C_q > 0$ به این معنا که سیاهچاله پایدار باشد، باید $-\frac{1}{3} < \omega_q < \frac{1}{4}$ باشد. در واقع این شرط محدوده عمومی برای پنجم‌گهر را در مدل ما محدود می‌کند.

۲. برای حالت $\mu \rightarrow \infty$ داریم

$$C_q = - \frac{L^2 \pi \beta}{\omega_q} (\beta - x^2)^{\frac{1}{2\omega_q} - 1} \quad (41.5)$$

برای اینکه سیاهچاله پایدار باشد باید $\omega < 0$ باشد که شرط جدیدی اعمال نمی‌کند.

۵-۲-۶ انرژی آزاد

انرژی آزاد سیاهچاله به صورت

$$F = M - TS \quad (42.5)$$

تعریف می‌شود. با استفاده از معادلات (۲۴.۵) و (۲۸.۵) انرژی آزاد بصورت زیر بدست می‌آید

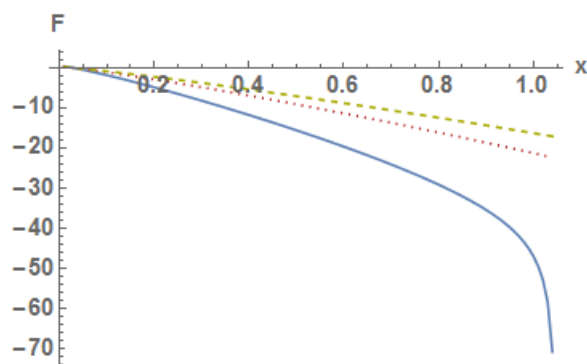
$$F = \frac{1}{2} L (\beta - x^2)^{\frac{1}{2\omega_q}} - \frac{1}{2\pi L} \left(x - \frac{\omega_q}{\mu} \left(\frac{\mu}{x} \right)^{2\omega_q+1} \right) S \quad (43.5)$$

چند نمودار انرژی آزاد بر حسب افق رویداد $(F - x)$ رسم می‌کنیم.

• ابتدا پارامتر حالت ω_q و جرم μ را با مقادیر ثابت زیر در نظر می‌گیریم

$$\omega_q = -1, \quad \mu = 1/1,$$

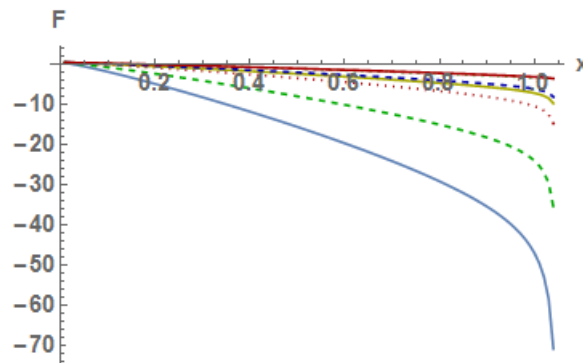
و با مقادیر مختلف β نمودار (۵-۱۳) حاصل می‌شود.



شکل ۵-۱۳: رفتار انرژی آزاد بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\beta = 1/1$ و $\beta = 3/1$ و $\beta = 5/1$ به ترتیب برای خطوط ممتد، نقطه‌چین و خط چین.

• در حالت دوم پارامتر حالت ω_q و β را با مقادیر ثابت زیر در نظر می‌گیریم

$$\omega_q = -1, \quad \beta = 1/1,$$



شکل ۵-۱۴: رفتار انرژی آزاد بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\mu = 10$ و $\mu = 5$ و $\mu = 2$ و $\mu = 1/8$ و $\mu = 1/5$ و $\mu = 1/2$ و $\mu = 1/1$ به ترتیب از بالا به پایین.

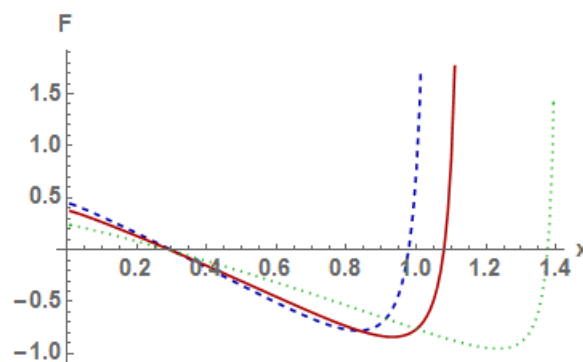
و مقادیر مختلف μ نمودار (۵-۱۴) بدست می‌آید.

با توجه به نمودارهای (۵-۱۳) و (۵-۱۴) برای پارامتر جالت $\omega = -1$ انرژی آزاد سیاهچاله همواره کاهش می‌یابد.

• در حالت سوم پارامتر حالت ω_q و جرم μ را با مقادیر ثابت زیر در نظر می‌گیریم

$$\omega_q = -0.48, \quad \mu = 1000,$$

و مقادیر مختلف β نمودار (۵-۱۵) را رسم کردیم

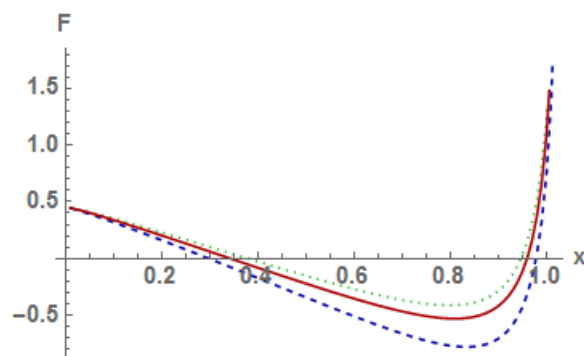


شکل ۵-۱۵: رفتار انرژی آزاد بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\beta = 2$ و $\beta = 1/3$ و $\beta = 1/1$ به ترتیب برای خط چین، خط ممند و نقطه چین.

- در این حالت پارامتر حالت ω_q و β را با مقادیر ثابت زیر در نظر می‌گیریم

$$\omega_q = -0.48, \quad \beta = 1/1,$$

و برای جرم‌های مختلف μ نمودار (۵-۱۶) را رسم می‌کنیم.



شکل ۵-۱۶: رفتار انرژی آزاد بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\mu = 1000$ و $\mu = 1500$ و $\mu = 5000$ به ترتیب برای خط چین، خط ممند و نقطه چین.

با بررسی دو نمودار (۵-۱۵) و (۵-۱۶) در می‌یابیم که با افزایش β و جرم μ ابتدا انرژی آزاد کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

- در این حالت دیگر پارامتر حالت ω_q و جرم μ را با مقادیر ثابت زیر در نظر می‌گیریم

$$\omega_q = -0.35, \quad \mu = 100000,$$

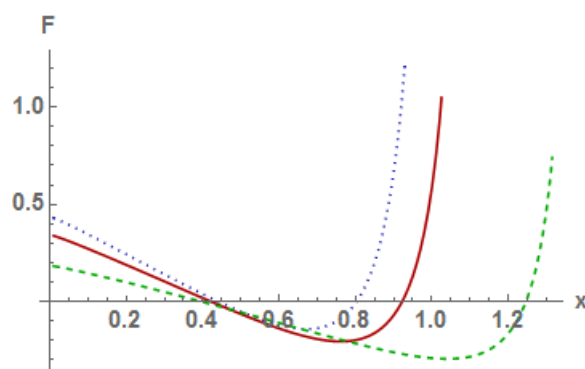
و برای β های مختلف نمودار (۵-۱۷) را رسم می‌کنیم

- در حالت آخر پارامتر حالت ω_q و β را با مقادیر ثابت زیر در نظر می‌گیریم

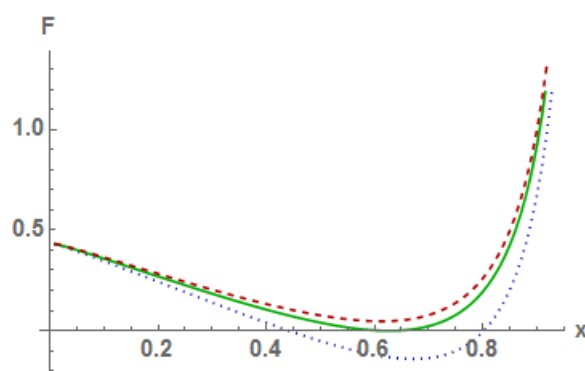
$$\omega_q = -0.35, \quad \beta = 1/1,$$

و برای جرم‌های مختلف نمودار (۵-۱۸) را رسم می‌کنیم.

از بررسی دو نمودار (۵-۱۷) و (۵-۱۸) در می‌یابیم که برای پارامتر حالت $\omega_q = -0.35$ با افزایش β و μ انرژی آزاد ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد اما تغییر انرژی در این حالت در مقایسه با حالت $\omega_q = -0.48$ در افق رویداد کوچمتری رخ می‌دهد.



شکل ۵-۱۷: رفتار انرژی آزاد بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\beta = 1/3$ و $\beta = 1/1$ و $\beta = 2$ به ترتیب برای نقطه چین، خط ممتد و خط چین.



شکل ۵-۱۸: رفتار انرژی آزاد بر حسب شعاع افق برای حالت‌های $\mu = 100000$ و $\mu = 150000$ و $\mu = 300000$ به ترتیب برای نقطه چین، خط ممتد و خط چین.

۳-۵ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه ما به بررسی یک سیاه‌چاله سه بعدی در حضور میدان پنجم‌گهر پرداختیم. میدان پنجم‌گهر بوسیله یک میدان اسکالری توصیف می‌شود که می‌توان آن را بصورت یک شارح کامل با پارامتر معادله حالت منفی در نظر گرفت. در این پایان‌نامه ما یک حل سیاه‌چاله آنتی دو سیه در حضور میدان پنجم‌گهر بدست آوردیم. متریک این سیاه‌چاله شامل یک جمله اضافه بصورت $x^{-2\omega_q}$ بود که در آن x شعاع افق بی‌بعد شده است. این جمله تاثیر بسزایی در ترمودینامیک این سیستم مخصوصاً پایداری آن ایفا می‌کند. در ادامه پایان‌نامه به بررسی ترمودینامیک این سیستم پرداختیم و دمای هاوکینگ را بدست آوردیم. مشاهده کردیم که دما با افزایش شعاع افق افزایش می‌یابد. همچنین آنتروپی هم نسبت به شعاع افق یک تابع صعودی است. البته در نمودار آنتروپی برای شعاع‌های خاصی

آنتروپی واگرا می‌شود که نتیجه آن این است که سیاهچاله از نظر فیزیکی غیرقابل قبول است. همچنین به بررسی ظرفیت گرمایی ویژه پرداختیم و مشاهده کردیم که برای پایداری سیستم باید پارامتر معادله حالت محدود شود.

مراجع

- [1] A. Walter, “ Henri Poincaré, theoretical physics, and relativity theory in Paris”, Math. Phys, 213 (2011) 239.
- [2] G. oyvind and H. Sigbjorn, “ Einestein’s general theoru of relativity: With modern applictions in cosmology”, Springer Science, Bosiness Media (2007).
- [3] V. N. Jayant, “ An introduction to relativity”, Cambridge University Press (2010).
- [4] M. C. Sean, “ Spacetime and geometry, An introduction to general relativity”, Penguin Audio (2004) .
- [5] V. F. Mukhanov and S. Winitzki, “ Introduction to Quantum Fields in Classical Back-grounds”, Department of Physics, Ludwig-Maximilians University, Munich, Germany (2004).
- [6] L. Flamm, “ Beitrge zur Einsteinischen Gravitationtheorie”, Physikalischen Zeitschrift, 17 (1916) 448.
- [7] H. Weyl, “ Zur Gravitationstheorie”, Phy, 54 (1917) 117.

- [8] A. S. eddington, “ Acomparision of Whitehead’s and Einstein’s formulas”, Nature, 113 (1924) 192.
- [9] G. lemaitre, “ L’Univers en expansion”, Bruxelles, A53 (1933) 51.
- [10] A. Einstein and N. Rosen, “ The particle problem in the general theory of relativity”, Phys, 48 (1935) 73.
- [11] J. L. Synge, “ The gravitational field of a particle”, Proc. Roy. Irish. Acad, A53 (1950) 83.
- [12] D. finkelstein, “ Past- future Asymmetry of the Gravitational field of a point particle”, Phys, 110 (1958) 965.
- [13] C. Fronsdel, “ completion and Embedding of the schwarzschild Solution”, Phys, 116 (1959) 778.
- [14] M. D. Kruskal, “ Maximal Extension of schwarzschild metric”, Phys, 119 (1960) 1743.
- [15] G. Szekeres, “ On the singularitiesof a Riemannian manifold”, Dabrecent, 7 (1960) 285.
- [16] I. D. Novikov, “ On the evolution of a semiclosed universe”, Atron, 40 (1963) 772.
- [17] I. D. Novikov, “ R- and T- rigions in a spacetime with a spherically symmetric space”, Stat sternberg Astron, 132(1964) 3.
- [18] J.R. Oppenheimer and H. Snyder, “ On continued Gravitational perturbation in generalized Kerr- NUT- de sitter spacetime”, Phys, 25 (1939) 3055.
- [19] V. P. Frolov and I. D. Novikov, ” black hole physics“, Kluwer Academic (1998).

- [20] V.P. Frolov and A. Zelnikov, "introduction to black hole physics" university of Alberta (2011).
- [21] A. B. Nielsen, "Black holes and black hole thermodynamics without event horizons", *Gen.Rel.Grav*, 41 (2009) 1539.
- [22] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby, "General Relativity An Introduction for Physicists", Cambridge University Press (2006).
- [23] K. Townsend, "Black holes", arXiv:gr-qc/9707012v1 (1997), (1997) .
- [24] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking. "The four laws of black mechanic", *Commun. Math. Phys*, PP (1973) 161.
- [25] H. Guo, H. Liu, X. Kuang and B. Wang, "Strong Cosmic Censorship in Charged de Sitter spacetime with Scalar Field Non-minimally Coupled to Curvature", arXiv:1905.09461v1 (2019).
- [26] A. Staruszkiewicz, " Gravitation theory in three-dimensional space", *Acta Physica Polonica*, 6 (1963) 735.
- [27] S. Carlip, " Quantum gravity in 2+1 dimentions", Cambridge University Press (1998).
- [28] S. Deser, and R. Jackiw, "Three-dimensional cosmological gravity: dynamics of constant curvature", *Ann. Phys*, 153 (1984) 405.
- [29] S. Deser, and R. Jackiw, " Classical and quantum scattering on a cone", *Commun. Math. Phys*, 118 (1988) 495.
- [30] S. Deser, R. Jackiw, , and G. 't Hooft, "Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space", *Ann. Phys*, 152 (1984) 220.

- [31] E. Witten, “ 2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system”, Nucl. Phys, B311 (1988) 46.
- [32] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, “ Black hole in three-dimensional space-time”, Phys. Rev. Lett, 69 (1992) 13.
- [33] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “ Geometry of the 2+1 Black Hole”, Phys. Rev, D48 (1993) 1506.
- [34] J. M. Bardeen, W. H. Press, “ Radiation fields in the Schwarzschild background”, Math. Phys, 14 (1973) 7.
- [35] B. Carter, “Black hole equilibrium states”, Math. Phys, 30 (1973) 261.
- [36] S. W. Hawking, “ A variational principle for black holes”, Math. Phys, 33 (1973) 323.
- [37] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The Four Laws of Black Hole Mechanics”, Commun. Math. Phys. 31 (1973) 161.
- [38] T. Damour, “ Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity”, Science Press, Beijing, China (1982).
- [39] B. Carter, “ Black hole equilibrium states”, Penguin Audio(1973).
- [40] A. G. Riess, “ Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, Astron. J116 (1998) 1009.
- [41] S. G. Ghosh, S. D. Maharaj, D. Baboolal and T.H.Lee, “ Lovelock black holes surrounded by quintessence”, Eur. Phys. J. C (2018) 78.
- [42] B. Ratra, P.J.E. Peebles, “ Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field”, Phys. Rev. D 37 (1988) 34.

- [43] I. Hussain, S. Ali, “General Relativity and Gravitation”, *phys*, 47 (2015) 34.
- [44] J. de Oliveira, R. D. B. Fontana, “ Three-dimensional black holes with quintessence”, *Physical Review*, D98 (2018) 4.
- [45] V. V. Kiselev, “Quintessence and black holes”, *Classical and Quantum Gravity* 20 (2003) 1187.
- [46] G. Ghosh, D. Maharaj, D. Baboolal, T. H. Lee, “ Lovelock black holes surrounded by quintessence”, *arXiv:1708* (2017).
- [47] S. Chen, B. Wang, R. Su, “Hawking radiation in a d-dimensional static spherically-symmetric black Hole surrounded by quintessence”, *arXiv:0801.2053* (2008).

ABSTRACT

Study of black hole dynamics in 3D modified gravity

By:

Samaneh Rahimi

In this thesis, for better understanding of the black hole physics, we will consider solutions to the 3D AdS black holes in the presence of a quintessence field. The quintessence can be described as a perfect fluid with equation of state parameter of $-1 < \omega < -1/3$ which impose corrections like $x^{-3\omega}$ in the black hole metric. Then we consider the thermodynamical properties of this black hole and obtain that the entropy will increase as a function of horizon radius. Also investigating the heat capacity for this black hole reveals that the equation of state parameter should be further constrained to $-1/2 < \omega < -1/3$ in order to have a healthy and stable black hole.

Ministry of Science, Research, and Technology



Damghan University

School of Physics

M.Sc. Thesis

**In Astronomy and astrophysics (gravitation and
cosmology)**

Study of black hole dynamics in 3D modified gravity

By:

Samaneh Rahimi

Supervisor:

Shahab Shahidi

Sep 2019

In The Name of God

Study of black hole dynamics in 3D modified gravity

By:

Samaneh Rahimi

THESIS

SUBMITTED TO THE SCHOOL OF GRADUATE STUDIES IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M.Sc.)

In

Astronomy and astrophysics (gravitation and cosmology)

DAMGHAN UNIVERSITY

DAMGHAN, ISLAMIC REPUBLIC OF IRAN

EVALUATED AND APPROVED BY THE THESIS COMMITTEE AS: EXCELLENT

Dr. Sh. Shahidi (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS OF GRAVITATION AND COSMOLOGY, DAMGHAN
UNIVERSITY. (SUPERVISOR)

Dr. Z. Haghan (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS OF GRAVITATION AND COSMOLOGY, DAMGHAN
UNIVERSITY. (EXAMINER)

Dr. L. shahkarami(Ph. D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES, DAMGHAN
UNIVERSITY. (EXAMINER)

Dr. Z. Haghan (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS OF GRAVITATION AND COSMOLOGY, DAMGHAN
UNIVERSITY. (Representative of the Graduate Studies)

Sep 2019