

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده فیزیک
گروه اتمی مولکولی-نجوم

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
فیزیک گرایش نجوم و اخترفیزیک

عنوان

کیهان شناسی در نظریه دوگانه گرانش متریک-پلاتینی با جفت شدگی ماده باریونی

نگارش

سیدرضا جلالی

اساتید راهنما

دکتر محمد حسین ژولیده حقیقی
و
دکتر سید شهاب الدین شهیدی شادکام

بهمن ۱۴۰۳

صلى الله عليه وسلم



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده فیزیک

تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه

هیأت داوران پس از مطالعه‌ی پایان‌نامه و شرکت در جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه تهیه شده تحت عنوان کیهان‌شناسی در نظریه دوگانه گرانش متریک-پلاتینی با جفت‌شدگی ماده باریونی توسط سیدرضا جلالی صحت و کفایت تحقیق انجام شده را برای اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی فیزیک گرایش نجوم و اخترفیزیک در تاریخ بهمن ۱۴۰۳ مورد تأیید قرار دادند.

۱. استاد راهنمای اول: دکتر محمد حسین ژولیده حقیقی
امضا

۲. استاد راهنمای دوم: دکتر سید شهاب‌الدین شهیدی شادکام
امضا

۳. استاد ممتحن اول: دکتر جواد تقی‌زاده فیروزجایی
امضا

۴. استاد ممتحن دوم: دکتر اباصلت رستمی
امضا

۵. نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر جواد تقی‌زاده فیروزجایی
امضا



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده فیزیک

اظهارنامه دانشجو

اینجانب سیدرضا جلالی به شماره دانشجویی ۴۰۱۰۴۲۴۴ دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش نجوم و اخترفیزیک دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه با عنوان:

کیهان‌شناسی در نظریه دوگانه گرانش متریک-پلاتینی با جفت‌شدگی ماده باریونی

توسط اینجانب انجام و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی و غیره) با اینجانب رفتار خواهد شد. در ضمن، مسئولیت هرگونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذیصلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده‌ی اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ‌گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

Sirza Jalali

نام و نام خانوادگی: سیدرضا جلالی امضا



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده فیزیک

حق طبع، نشر و مالکیت نتایج

حق چاپ و تکثیر این پایان نامه متعلق به نویسندگان آن می باشد. بهره برداری از این پایان نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می گردد، بلامانع است:

- بهره برداری از این پایان نامه برای همگان و با ذکر منبع، بلامانع است.
- بهره برداری از این پایان نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما و با ذکر منبع، بلامانع است.
- بهره برداری از این پایان نامه تا تاریخ _____ ممنوع است.

۱. استاد راهنمای اول: دکتر محمد حسین ژولیده حقیقی امضا

۲. استاد راهنمای دوم: دکتر سید شهاب الدین شهیدی شادکام امضا

چکیده

یکی از تعمیم‌های جالب بر نظریه نسبیت عام اینشتین، نظریه‌ای است که در آن علاوه بر هموستار کریستوفل، یک هموستار آفین دلخواه مستقل نیز وجود دارد. در این نظریات که به نظریات دوگانه متریک-پالاتینی معروف هستند، کنش گرانشی را با ترکیبی از دو اسکالر انحنای می‌سازیم که یکی از آن‌ها با هموستار کریستوفل و دیگری با هموستار آفین مستقل ساخته می‌شوند. به‌طور خلاصه این نظریات را می‌توان حالت‌های خاصی از نظریات چند اسکالر-تانسوری در نظر گرفت و تحول عالم کنونی در این مدل‌ها همخوانی قابل قبولی با مشاهدات کیهانی دارد. بنابراین نظریه دوگانه متریک-پالاتینی به عنوان نظریه گرانش تعمیم‌یافته در نظر گرفته می‌شود.

در این پایان‌نامه ما به تعمیمی از نظریه دوگانه متریک-پالاتینی خواهیم پرداخت که بین انحنای حاصل از هموستار آفین و ماده باریونی یک برهم‌کنش غیرکمیینه و کمیینه وجود دارد که در حالت غیرکمیینه سعی داریم جفت‌شدگی ماده-هندسه را با در نظر گرفتن پتانسیل خطی و ضربی مورد بررسی و کنکاش قرار دهیم. در انتها نیز داده‌های به دست آمده از مدل مان را با مدل استاندارد Λ CDM مقایسه خواهیم کرد.

کلمه‌های کلیدی: گرانش دوگانه متریک-پالاتینی، برهم‌کنش ماده-هندسه، کیهان‌شناسی، پارامتر هابل، نظریه اسکالر-تانسوری.

فهرست مطالب

ب	فهرست شکل‌ها
ج	فهرست علائم و اختصارات
د	قراردادها و نشانگان
۱	نسبیت عام
۱	۱-۱ مقدمه و مفاهیم اولیه انحنای
۳۲	۲-۱ صورت‌بندی لاگرانژی در نسبیت عام و مفهوم کنش
۴۳	۳-۱ رهیافت وردشی برای بدست آوردن معادلات میدان
۴۹	۲ کیهان‌شناسی
۴۹	۱-۲ مقدمه و هندسه فضا-زمان
۵۴	۲-۲ سینماتیک
۶۱	۳-۲ دینامیک
۷۵	۴-۲ جهان ما
۷۹	۳ گرانش دوگانه متریک-پالاتینی
۷۹	۱-۳ نظریات اسکالر-تانسوری و تبدیلات هم‌مدیس
۹۹	۲-۳ کنش و معادلات میدان گرانش دوگانه متریک-پالاتینی
۱۰۴	۳-۳ گرانش دوگانه تعمیم یافته $f(R, \mathcal{R})$
۱۰۷	۴ نظریه دوگانه متریک-پالاتینی تعمیم یافته $f(R, L_m)$
۱۰۷	۱-۴ تعریف کنش و معادلات کیهان‌شناختی در حالت غیر کمینه
۱۱۸	۲-۴ حالت جفت‌شدگی کمینه
۱۲۴	۳-۴ نتیجه‌گیری
۱۲۵	مراجع

فهرست شکل‌ها

۱۱۶	نمودار پارامتر کندشوندگی نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z	۲-۴
۱۱۶	نمودار تحول پارامتر هابل نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z	۱-۴
۱۱۷	نمودار میدان اسکالر ψ نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z	۴-۴
۱۱۷	نمودار میدان اسکالر ϕ نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z	۳-۴
۱۱۷	نمودار مقایسه پارامترها و ضرایب مدل ما نسبت به یکدیگر	۵-۴
	نمودار پارامتر کندشوندگی در حالت جفت‌شدگی کمینه نسبت به پارامتر	۷-۴
۱۲۲	انتقال به سرخ z	
	نمودار تحول پارامتر هابل در حالت جفت‌شدگی کمینه نسبت به پارامتر	۶-۴
۱۲۲	انتقال به سرخ z	
	نمودار میدان اسکالر ϕ نسبت به پارامتر انتقال به سرخ در حالت جفت‌شدگی	۸-۴
۱۲۲	کمینه	
۱۲۳	نمودار مقایسه پارامترها و ضرایب مدل کمینه نسبت به یکدیگر	۹-۴

فهرست علائم و اختصارات

Ω	پارامتر چگالی	λ
ρ_{crit}	چگالی انرژی بحرانی	v
λ	طول موج	V
v	سرعت	p
V	حجم	T
p	فشار	$a(t)$
T	انرژی جنبشی	F
$a(t)$	ضریب مقیاس	c
F	نیرو	z
c	سرعت نور	H
z	انتقال به سرخ	w
H	پارامتر هابل	
w	پارامتر جفت شدگی	
λ		
kgm^{-3}		
m		
ms^{-1}		
m^3		
Pa		
J		
λ		
N		
ms^{-1}		
λ		
$\text{kms}^{-1}\text{Mpc}$		
λ		

قراردادها و نشانگان

در این پایان‌نامه، علامت تانسور متریک به شکل $(-, +, +, +)$ اتخاذ شده است که این علامت‌گذاری یک متریک مثبت معین بر روی ابررویه‌های فضاگونه تحمیل می‌کند. متریک $g_{\mu\nu}$ به کار رفته در این متن از هموستار لوی-چیویتا بر اساس معادله (۴۶-۱) تبعیت می‌کند و همچنین برای تانسور انحنای ریمان از تعریف (۴۹-۱) استفاده می‌کنیم. قابل ذکر است که در بخش‌هایی از این پایان‌نامه از مفاهیم متریک و هموستار معمول گفته شده، استفاده نکرده‌ایم که در آن صورت به تفصیل به آن اشاره خواهیم کرد.

اندیس‌هایی که با حروف یونانی $\alpha, \beta, \dots$ نشان داده شده‌اند، مقادیر فضا-زمان گونه ۰, ۱, ۲, ۳ به خود می‌گیرند و اندیس‌هایی که با حروف لاتین $a, b, \dots$ نمایش داده می‌شوند مقادیر فضاگونه ۱, ۲, ۳ را اتخاذ می‌کنند. لازم به ذکر است که برای تعریف مفاهیم بنیادی ریاضیاتی در فصل ۱ و همچنین بخش ۳-۱-۱، از اندیس‌های محض استفاده کرده‌ایم که آن‌ها را نیز با حروف لاتین نمایش داده‌ایم. این اندیس‌ها، نشان دهنده یک نگاشت چندجمله‌ای به عنوان مثال $A_b^a \in V_b^a = V \otimes V^*$ می‌باشند. قابل ذکر است که اندیس‌های محض، مشخص کننده مولفه‌های تانسور نیستند بلکه صرفاً بخشی از نمادگذاری برای اندیس‌ها محسوب می‌شوند. همچنین سعی شده است از واحد پلانک در این پایان‌نامه استفاده شود که در آن $G = c = \hbar = K_B = 1$ می‌باشند اما در برخی از بخش‌ها، به عمد از این گزاره تبعیت نمی‌کنیم.

فصل ۱

نسبیت عام

۱-۱ مقدمه و مفاهیم اولیه انحنای

برای درک بهتر نسبیت عام، ابتدا نگاه تاریخی مختصری به پیدایش مفهوم گرانش می‌اندازیم. آیزاک نیوتون^۱ برای اولین بار تفسیر خود را از گرانش، اینگونه بیان داشت که گرانش به واسطه نیروی بین دو جسم (حاصل از جرم‌هایشان) ایجاد می‌شود [۱].

سایه سیطره این توضیح تا زمانی که آلبرت اینشتین^۲ در سال ۱۹۱۵ بیان خود را از گرانش منتشر کرد، پا برجا بود [۲]. اینشتین در توصیف خود، گرانش را به هندسه فضا-زمان ارتباط داد و آن را حاصل از انحنای فضا-زمان^۳ دانست که برای پیشبرد کار خود، مجبور به استفاده از هندسه نااقلیدسی^۴ شد. از این رو برای درک بهتر مفاهیم نسبیت عام، احتیاج است که مفاهیم آن را از هندسه دیفرانسیلی و مشخصا هندسه منیفلدها^۵ و ام‌بگیریم. در این بخش، به مفاهیم مهم و اولیه از آن می‌پردازیم که رنگ و بوی ریاضیاتی دارد. در فصل ۲ از این مفاهیم به شکل فیزیکی استفاده خواهیم کرد.

درک شهودی‌مان از انحنای به‌طور کلی، از رویه‌های^۶ دو بعدی‌ای که در فضای اقلیدسی^۷ سه بعدی معمولی^۸ $\mathbb{R}^3$ نشانده شده‌اند، نشأت می‌گیرد. مفهوم انحنای، به دو شکل داخلی و خارجی تعریف می‌شود. انحنای خارجی^۹ می‌تواند در فضایی با ابعاد بالاتر نشانده شود، در حالی که این نشانیدن، برای انحنای داخلی^{۱۰} وجود ندارد [۳]. در این بخش، چون توجه‌مان به انحنای فضا-زمان می‌باشد بنابراین مفهوم انحنای داخلی را بسط می‌دهیم. قابل ذکر است که منیفلد فضا-زمان M با متریک g_{ab} در فضای مرتبه

^۱ Isaac Newton ^۲ Albert Einstein ^۳ Space-time curvature ^۴ Non-Euclidean geometry ^۵ Manifolds
^۶ surface ^۷ Euclidean space ^۸ Extrinsic curvature ^۹ Intrinsic curvature

بالا تر نشانده نمی شود.

مفهوم انحنا را می توان با استفاده از انتقال موازی^۱ بر روی صفحه یا کره تعریف کرد. درک شهودی مان از این نشأت می گیرد که جهت بردار، هنگامی که بر روی یک مسیر حرکت می کند نباید تغییر کند (که همیشه بر فضای مماس^۲ به آن منیفلد باقی می ماند). هنگامی که یک بردار را بر روی صفحه، انتقال موازی می دهیم، جهت آن بر روی حالت اولیه خود باز می گردد ولی بر روی کره، هنگامی که این انتقال موازی صورت می گیرد، چنین اتفاقی نمی افتد. ازین رو انتقال موازی، یک مفهوم پایه ای می باشد که صفحه را به عنوان یک فضای تخت یا کره را به عنوان یک فضای خمیده مشخص می کند [۴-۶].

یک مشخصه بدیل دیگر برای انحنا، می تواند با مفهوم ژئودزی^۳ تعریف شود. ژئودزی یک خم است که انتقال موازی مماس آن بر روی خودش می افتد که این در واقع ممکن ترین خم است. می توان گفت که یک فضا خمیده است اگر و تنها اگر ژئودزی های موازی، تحت انتقال موازی، موازی نشوند که این به معنی رد شدن اصل موضوعه پنجم اقلیدس^۴ می باشد [۷].

تنها ساختار معین منیفلد فضا است که هیچ درک طبیعی ای از انتقال موازی آن نداریم. چرا که فضاهای مماس V_p و V_q واقع بر دو نقطه مختلف p و q ، فضاهای برداری مختلفی به شمار می آیند. ازین رو هیچ راهی برای تشخیص آن که بردار واقع بر نقطه p همان بردار در نقطه q باشد، نداریم. بنابراین تعریف انتقال موازی، چیزی بیشتر از ساختار منیفلد را ایجاب می کند. نکته مهم این است که چگونه انتقال موازی دادن یک بردار را می توان هم ارز با مشتق گرفتن از یک میدان برداری در راستای یک خم در نظر گرفت. اگر بدانیم که چطور می توان بردارها را در راستای یک خم انتقال موازی دهیم، می توانیم مشتق یک میدان برداری را در جهت یک خم تعریف کنیم و به طور مشابه همانطور که برای مفهوم مشتق داریم، می توانیم یک بردار که انتقال موازی داشته است را تعریف کنیم که مشتق آن در راستای یک خم معین صفر شود.

بنابراین در بخش ۱-۱-۲ به مفهوم عملگر مشتق می پردازیم. در این بخش نشان می دهیم که برای یک متریک معین، یک تعریف یکتا از انتقال موازی وجود دارد که ضرب داخلی همه زوج بردارها در آن حفظ می شود. بنابراین وجود یک متریک باعث مفهوم یکتایی از انتقال موازی و همچنین بیان داخلی از انحنای منیفلد می شود.

نکته مهم دیگر این است که بازگشت یک بردار به مقدار اولیه اش، هنگامی که حول یک خم بسته بی نهایت کوچک، انتقال موازی داده می شود به مشکل برمی خورد که این به واسطه عدم جابجایی مشتق ها می باشد. در بخش ۱-۱-۳ به رفع این مشکل می پردازیم و در بخش ۱-۱-۴ به مفهوم ژئودزی و

^۱ Parallel transport ^۲ Tangent space ^۳ Geodesic ^۴ Euclid's fifth postulate

در انتها به روش‌های محاسباتی برای رسیدن به انحناى فضا-زمان خواهیم رسید و این موضوع را به تفصیل بیان خواهیم کرد.

۱-۱-۱ مفهوم تانسور متریک

برای شروع، از مفهوم تانسورها مخصوصاً تانسور متریک^۱ استفاده می‌کنیم، چرا که الفبای نسبیت عام با اشیاء ریاضیاتی‌ای به نام تانسورها بیان می‌شود. مفهوم جابجایی بردارها یا مفهوم تانسورها به عنوان کمیت‌هایی که دارای وابستگی خطی (یا چندخطی^۲) به جابجایی‌ها می‌باشند، بسیار مهم‌اند. در این بخش، هدفمان پرداختن به تعریف ریاضیاتی دقیق تانسورها و همچنین بیان ویژگی‌های مهم آن است [۸]. فرض کنید V یک فضای برداری دارای بعد متناهی بر روی اعداد حقیقی باشد. (در این مورد، موضوعی که از اهمیت ویژه برخوردار است، فضای مماس $V = V_p$ می‌باشد.) حال فرض می‌کنیم که V^* ، گردایه‌ای^۳ از نگاشت‌های خطی^۴ به صورت $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. اگر بر روی چنین نگاشتی، جمع و ضرب اسکالرها را تعریف کنیم، به ساختار فضای برداری طبیعی بر روی V^* می‌رسیم که به V^* فضای برداری دوگان^۵ نسبت به V می‌گوییم و مولفه‌های آن را بردار دوگان می‌نامیم. اگر $v_1, \dots, v_n$ را پایه V در نظر بگیریم، آنگاه می‌توانیم مولفه‌های $v^{1*}, \dots, v^{n*} \in V^*$ را با استفاده از رابطه زیر تعریف کنیم

$$v^{\mu*}(v_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad (1-1)$$

که در آن $\delta^\mu_\nu = 1$ می‌باشد اگر اندیس‌های μ و ν برابر باشند، در غیر این صورت $\delta^\mu_\nu = 0$ است. (رابطه (۱-۱)، تعریف کننده اثر $v^{\mu*}$ بر روی مولفه‌های پایه می‌باشد. همچنین اثر آن بر روی بردار دلخواه $v \in V$ به واسطه رابطه (۱-۱) و همچنین شرط خطی بودن، مشخص می‌شود.) بنابراین می‌توان $\{v^{\mu*}\}$ را پایه V^* فرض کرد که به آن پایه دوگان^۶ نسبت به پایه $\{v_\mu\}$ از فضای V می‌گوییم. مشخصاً این گزاره نشان می‌دهد که $\dim V^* = V$ می‌باشد. تناظر $v^{\mu*} \longleftrightarrow v_\mu$ ، موجب یک نگاشت تکریخت^۷ بین V و V^* می‌شود ولی این نگاشت تکریخت، بستگی به انتخاب پایه $\{v_\mu\}$ ندارد، بنابراین هیچ راه معمولی برای تشخیص V^* با V نداریم (مگر آن که بر روی V یک ساختار معین مانند یک پایه یا یک متریک داشته باشیم).

حال می‌توانیم ساخت فوق را به کار گیریم و با فضای برداری V^* شروع کنیم، ازین رو فضای برداری دوگان مضاعف^۸ نسبت به V را به دست می‌آوریم که آن را با V^{**} نشان می‌دهیم. بردار v^{**} در V^{**} یک

^۱ Metric tensor ^۲ Multilinear ^۳ Collection ^۴ Linear maps ^۵ Dual vector space ^۶ Dual basis ^۷ Isomorphism ^۸ Double dual vector space

نگاشت خطی از V^* به $\mathbb{R}$ است. اگرچه V^{**} ، یک نگاشت تکریخت به فضای برداری اصلی V می‌باشد. به هر بردار $v \in V$ می‌توان یک نگاشت در V^{**} مرتبط کرد که مقدار آن بر روی بردار $w^* \in V^*$ برابر با $w^*(v)$ است. در این صورت، یک نگاشت خطی یک به یک از V به V^{**} به دست می‌آوریم که باید پوشا^۲ باشد چرا که داریم $\dim V = \dim V^{**}$. بنابراین می‌بینیم که دوگان مضاعف یک بردار، مفهوم جدیدی را بازتولید نمی‌کند. پس می‌توان V^{**} را همان فضای بردار اصلی V دانست.

حال می‌توانیم به مفهوم تانسور بیردازیم. فرض می‌کنیم V ، یک فضای برداری با بعد متناهی است و V^* نیز فضای برداری دوگان آن می‌باشد. یک تانسور، T ، از مرتبه (k, l) بر روی فضای V ، یک نگاشت چندخطی است که به شکل زیر نوشته می‌شود

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_l \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2-1)$$

به بیان دیگر، با k بردار دوگان معین و l بردار معمولی، تانسور T ، یک عدد تولید می‌کند که اگر همه آن‌ها را بجز یک بردار یا بردار دوگان ثابت در نظر بگیریم، در آن صورت این یک نگاشت خطی بر روی متغیر باقی‌مانده می‌باشد.

بنابراین مطابق با تعریف فوق، یک تانسور مرتبه $(0, 1)$ ، دقیقاً یک بردار دوگان است و به‌طور مشابه تانسور مرتبه $(1, 0)$ ، یک مولفه بردار V^{**} می‌باشد. اگرچه، چون V^{**} را با V یکی دانستیم، پس یک تانسور $(1, 0)$ ، همان بردار معمولی است. به دلیل یکسانی V^{**} با V ، ممکن است تانسورهای مرتبه بالاتر را به روش‌های متفاوتی ببینیم. به عنوان مثال تانسور مرتبه $(1, 1)$ ، یک نگاشت چندجمله‌ای به صورت $\mathbb{R} \rightarrow V^* \times V$ است. ازین رو با مشخص کردن $v \in V$ ، تانسور مرتبه $(0, v)$ ، مولفه V^{**} است که با مولفه V یکی است. بنابراین با یک بردار معین در V ، تانسور T ، یک بردار دیگر در V ، به شکل خطی تولید می‌کند. به بیان دیگر، یک تانسور از مرتبه $(1, 1)$ ، یک نگاشت خطی از V به V می‌باشد و بالعکس. به‌طور مشابه نیز تانسور T ، به عنوان یک نگاشت خطی از V^* به V^* می‌باشد.

با اعمال قواعد فوق برای جمع و نگاشت‌های ضرب اسکالری، گردایه $T(k, l)$ از تمامی تانسورهای مرتبه (k, l) ، دارای ساختار فضای برداری هستند. با توجه به ویژگی چندخطی بودن، یک تانسور می‌تواند با دادن مقدارش به بردارها در پایه $\{v_\mu\}$ از فضای V و همچنین پایه‌های دوگان $\{v^{\nu*}\}$ از فضای دوگان V^* ، به‌طور یکتایی مشخص شود. چرا که n^{k+l} روش مستقل برای پر کردن جایگاه‌های تانسور مرتبه (k, l) با بردارهای پایه (که در آن $n = \dim V = \dim V^*$ می‌باشد) وجود دارند که در آن بعد فضای برداری $T(k, l)$ برابر با n^{k+l} می‌باشد.

^۱ One-to-one or injective linear map ^۲ Surjective

حال دو عملگر ساده در عین حال مهم بر روی تانسورها معرفی می‌کنیم. ابتدا از عملگر ادغام^۱ شروع می‌کنیم [۸]. ادغام نسبت به i -امین (بردار دوگان) و j -امین (بردار) جایگاه یک تانسور، نگاشتی است به شکل $C : T(k, l) \rightarrow T(k-1, l-1)$ که در ادامه توضیح خواهیم داد. اگر T ، یک تانسور از مرتبه (k, l) باشد، آنگاه داریم

$$CT = \sum_{\sigma=1}^n T(\dots, v^{\sigma*}, \dots; \dots, v_{\sigma}, \dots), \quad (3-1)$$

که در آن $\{v_{\sigma}\}$ ، یک پایه V است و همچنین $v^{\sigma*}$ نیز پایه دوگان می‌باشد. باید توجه کرد که ادغام تانسور مرتبه $(1, 1)$ که به عنوان یک نگاشت خطی از V به V در نظر گرفته می‌شد، حال تنها یک رد از نگاشت می‌باشد. بنابراین تانسور CT ، مستقل از انتخاب پایه $\{v_{\mu}\}$ می‌باشد.

عملگر دوم نیز به ضرب خارجی^۲ معروف است [۸]. با فرض تانسور معین T از مرتبه (k, l) و تانسور T' از مرتبه (k', l') ، می‌توانیم تانسور جدیدی از مرتبه $(k+k', l+l')$ بسازیم که با ضرب خارجی تانسور T و T' شناخته شده و با $T \otimes T'$ نمایش داده می‌شود. حال اگر بردارهای دوگان $v^{1*}, \dots, v^{k+k'*}$ از مرتبه $(k+k')$ و همچنین بردارهای $w_1, \dots, w_{l+l'}$ از مرتبه $(l+l')$ را در نظر بگیریم، آنگاه $T \otimes T'$ را که بر این بردارها اثر می‌کند، حاصل ضرب $T(v^{1*}, \dots, v^{k*}; w_1, \dots, w_l)$ و $T'(v^{k+1*}, \dots, v^{k+k'*}; w_{l+1}, \dots, w_{l+l'})$ تعریف می‌کنیم.

بنابراین یکی از روش‌ها، برای ساخت تانسورهای جدید، انجام ضرب داخلی بردارها و بردارهای دوگان است. به تانسوری که با استفاده از ضرب داخلی بیان می‌شود، تانسور ساده^۳ می‌گوییم. اگر $\{v_{\mu}\}$ یک پایه برای V و همچنین $\{v^{\nu*}\}$ ، بردار دوگانش باشد، می‌توان نشان داد که تعداد n^{k+l} تانسور ساده $v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1*} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l*}$ منجر به پایه $T(k, l)$ می‌شود. بنابراین، هر تانسور از مرتبه (k, l) ، می‌تواند به صورت جمع تانسورهای ساده در این گرایه بیان شود

$$T = \sum_{\mu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l*}. \quad (4-1)$$

ضرایب بسط پایه $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ را مولفه‌های تانسور T نسبت به پایه $\{v_{\mu}\}$ می‌نامیم. قابل ذکر است که در اینجا از قرارداد استاندارد برای نمادگذاری مولفه‌های تانسور استفاده می‌کنیم به این معنی که اندیس‌های μ_i مرتبط با بردارها و اندیس‌های ν_j نیز مرتبط با بردارهای دوگان هستند.

برای نمایش دو عملگر ادغام و ضرب خارجی بر اساس مولفه‌های تانسوری، به این شکل عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم که مولفه‌های تانسور T با رابطه $(4-1)$ داده شود، آنگاه ادغام، CT ، تانسور دارای مولفه‌هایی

^۱ Contraction operator ^۲ Outer product ^۳ Simple tensor

به شکل زیر است

$$(CT)^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1}} = \sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_{l-1}}. \quad (5-1)$$

اگر مولفه‌های تانسور T' به شکل $T'^{\mu'_1 \dots \mu'_{k'}}_{\nu'_1 \dots \nu'_{l'}}$ باشد، آنگاه ضرب خارجی $S = T \otimes T'$ دارای مولفه‌های زیر می‌باشد

$$S^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}}. \quad (6-1)$$

گفته فوق را می‌توان به هر فضای برداری با بعد متناهی دلخواهی اعمال کرد. حال به موردی که برای ما بیشتر اهمیت دارد و آن هم فضای مماس است، می‌پردازیم که در آن V یک فضای مماس، V_p در نقطه p بر روی منیفلد M است. در این مورد V_p^* را فضای کتانژانت^۱ در نقطه p می‌نامیم و بردارها در فضای V_p^* ، به بردارهای کتانژانت شناخته می‌شوند. به بردارهای موجود در V_p ، بردارهای پادورا^۲ و به همچنین به بردارهای موجود در V_p^* ، بردارهای هم‌وردا^۳ گفته می‌شود. با داشتن یک دستگاه مختصات معین، می‌توان پایه‌های مختصات $\partial/\partial x^1 \dots \partial/\partial x^n$ از فضای V_p را ساخت که در آن پایه دوگان V_p^* را به شکل $dx^1 \dots dx^n$ نمایش می‌دهند. بنابراین تاکید می‌کنیم که dx^μ نمادی برای نگاشت خطی است که به شکل $dx^\mu(\partial/\partial x^\nu) = \delta^\mu_\nu$ نشان داده می‌شود.

نکته‌ای که باید به آن اشاره کنیم این است که اگر دستگاه مختصات را تغییر دهیم، مولفه‌های $v'^{\mu'}$ از بردار v در پایه جدید، مرتبط با مولفه‌های آن v^μ در پایه قدیم است که به واسطه قانون تبدیل برداری زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند

$$v'^{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}. \quad (7-1)$$

حال اگر w_μ را مولفه‌های بردار دوگان w نسبت به پایه دوگان $\{dx^\mu\}$ در نظر بگیریم، آنگاه از معادلات (۱-۱) و (۷-۱) برمی‌آید که تحت تبدیل مختصات، مولفه‌هایش تبدیل می‌شود به [۹]

$$w'_{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n w_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}. \quad (8-1)$$

به‌طور کلی، مولفه‌های تانسور T از مرتبه (k, l) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_{k'}}_{\nu'_1 \dots \nu'_{l'}} = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu'_{l'}}}. \quad (9-1)$$

معادله فوق به قانون تبدیل تانسوری معروف است [۹].

معادله (۹-۱) یک ویژگی مهم برای تعریف یک تانسور است. این تعریف دارای یک مزیت است که نشان می‌دهد تعریف یک کمیت به عنوان تانسور، هنگامی که مانند نگاشت چند جمله‌ای بر روی بردارها و بردارهای دوگان می‌باشد، راحت‌تر است از حالتی که آن‌ها را به عنوان گردایه‌ای از اعداد مرتبط با یک دستگاه مختصات که طبق معادله (۹-۱) تغییر می‌کند، در نظر بگیریم.

تخصیص یک تانسور بر روی V_p برای هر نقطه p در منیفلد M را میدان تانسوری می‌نامیم. یک میدان تانسوری هم‌وردا w را هموار $^1(C^\infty)$ می‌نامیم اگر برای هر میدان برداری هموار v ، تابع $w(v)$ هموار باشد. همچنین تانسور T از مرتبه (k, l) را هموار می‌نامیم اگر برای همه میدان‌های برداری هم‌وردای هموار $w^1, \dots, w^k$ و میدان‌های برداری پادوردای هموار $v_1, \dots, v_l$ ، تابع $T(w^1, \dots, w^k; v_1, \dots, v_l)$ هموار باشد. می‌توان به‌طور مشابه مفهوم میدان تانسوری را برای خاصیت C^k نیز تعریف کرد.

حال به تعریف مفهوم متریک می‌پردازیم. متریک به‌طور شهودی، به مجذور فاصله بی‌نهایت کوچک، مرتبط با یک جابجایی بی‌نهایت کوچک اشاره دارد. مفهوم جابجایی بی‌نهایت کوچک به‌طور دقیق از بردار مماس اتخاذ می‌شود. بنابراین چون مجذور فاصله بی‌نهایت کوچک، باید نسبت به جابجایی، از مرتبه دوم باشد، پس متریک g ، باید یک نگاشت خطی از $V_p \times V_p$ به اعداد باشد یعنی یک تانسور از مرتبه $(2, 0)$. علاوه بر آن، متریک باید دارای ویژگی تقارن 2 و ناتبه‌گنی 3 نیز باشد. منظورمان از تقارن این است که به ازای همه $v_1, v_2 \in V_p$ داریم $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$. همچنین معنی ناتبه‌گنی این می‌باشد که $g(v, v_1) = 0$ است تنها در حالتی که به ازای هر $v \in V_p$ داشته باشیم $v_1 = 0$. بنابراین متریک g ، بر روی منیفلد M ، میدان تانسوری متقارن و ناتبه‌گن از مرتبه $(2, 0)$ است. به عبارت دیگر می‌توان گفت که یک متریک (نه لزوماً مثبت معین 4)، یک ضرب داخلی 5 بر روی فضای مماس در هر نقطه می‌باشد.

در پایه مختصات می‌توان متریک g را بر اساس مولفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ به شکل زیر بسط داد [۱۰]

$$g = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (10-1)$$

گاهی اوقات نیز می‌توانیم برای معرفی تانسور متریک از نمادگذاری ds^2 استفاده کنیم که در آن داریم

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (11-1)$$

معادله فوق همان مفهوم مجذور فاصله بی‌نهایت کوچک را توصیف می‌کند.

¹ Smooth ² Symmetry ³ Non-degeneracy ⁴ Positive definite ⁵ Inner product

با یک متریک معین g ، می‌توان پایه راست‌هنگار $v_1, \dots, v_n$ فضای مماس در هر نقطه p را پیدا کرد یعنی پایه‌ای که در آن $g(v_\mu, v_\nu) = 0$ است اگر $\mu \neq \nu$ ، در غیر این صورت $g(v_\mu, v_\mu) = \pm 1$. قابل ذکر است که تعداد بردارهای پایه با $g(v_\mu, v_\mu) = +1$ و یا با $g(v_\mu, v_\mu) = -1$ ، مستقل از انتخاب پایه مختصات می‌باشند. به تعداد $+$ و $-$ موجود در متریک، علامت متریک^۲ می‌گوییم. در هندسه دیفرانسیلی معمولی، با متریک‌های مثبت معین سروکار داریم یعنی متریک‌هایی با علامت $++ \dots +$ [۱۰، ۱۱]. از طرف دیگر برای متریک فضا-زمان، علامت متریک، به شکل $++ + -$ می‌باشد. متریک‌های مثبت معین را ریمانی^۳ می‌نامیم و به متریک‌های فضا-زمانی (یعنی دارای یک علامت منفی و باقی مانده آن مثبت) لورنتسی^۴ می‌گوییم.

همان‌طور که در بالا تعریف کردیم، در هر نقطه $p \in M$ ، متریک g ، یک تانسور از مرتبه $(2, 0)$ بر روی V_p است یعنی یک نگاشت چندخطی به شکل $V_p \times V_p \rightarrow \mathcal{R}$. اگرچه می‌توان متریک g را به عنوان یک نگاشت خطی از V_p به V_p^* ، به واسطه $g(\cdot, v) \rightarrow v$ دانست. به دلیل ناتبستگی g ، این نگاشت هم یک به یک و هم پوشا می‌باشد. همچنین قابل ذکر است که می‌توان نگاشت معکوس^۵ نیز تعریف کرد. بنابراین می‌توان از متریک g استفاده کرد، تا تناظر یک به یک بین بردارها و بردارهای دوگان برقرار کرد. بنابراین پر واضح است که به دلیل این تناظر، با استفاده از یک متریک معین g ، الزامی به معرفی بردارهای دوگان نداریم. به این دلیل است که اکثر فیزیکدانان با مفهوم بردارهای دوگان آشنا نیستند.

۱-۱-۲ عملگرهای مشتق و انتقال موازی

یک عملگر مشتق^۶ ∇ (که به آن گاهی مشتق هم‌وردا^۷ نیز گفته می‌شود) بر روی منیفلد M ، نگاشتی است که هر میدان تانسوری هموار (صرفاً مشتق‌پذیر) از نوع (k, l) را به میدان تانسوری هموار از نوع $(k, l+1)$ می‌برد. در نمادگذاری اندیسی، اگر $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathfrak{T}(k, l)$ ، آنگاه میدان تانسوری حاصل از اعمال ∇ بر روی T را به شکل $\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ می‌نویسیم. قابل ذکر است که ∇_a یک بردار دوگان نیست و تنها مرسوم است که برای نوشتن مشتق هم‌وردا از اندیسی روبروی آن استفاده کنیم. عملگر مشتق گفته شده از پنج ویژگی زیر تبعیت می‌کند: (۱) خطی بودن: به ازای همه $A, B \in \mathfrak{T}(k, l)$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم

$$\nabla_c (\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}. \quad (12-1)$$

^۱ Orthonormal basis ^۲ Metric signature ^۳ Riemannian metric ^۴ Lorentzian metric ^۵ Inverse map ^۶ Derivative operator ^۷ Covariant operator

(۲) قاعده لاینیتس^۱: به ازای همه $A \in \mathfrak{T}(k, l)$ و $B \in \mathfrak{T}(k', l')$ داریم

$$\begin{aligned} \nabla_c [A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} B^{a_1' \dots a_{k'}}_{b_1' \dots b_{l'}}] &= [\nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}] B^{a_1' \dots a_{k'}}_{b_1' \dots b_{l'}} \\ &+ A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} [\nabla_c B^{a_1' \dots a_{k'}}_{b_1' \dots b_{l'}}]. \end{aligned} \quad (۱۳-۱)$$

(۳) جابه‌جایی با خاصیت ادغام: به ازای همه $A \in \mathfrak{T}(k, l)$ داریم

$$\nabla_d (A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_d A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}. \quad (۱۴-۱)$$

(۴) سازگاری با مفهوم بردارهای مماس به عنوان مشتق‌های جهتی^۲ بر روی میدان اسکالر: به ازای همه $f \in \mathfrak{F}$ و همه $t^a \in V_p$ داریم

$$t(f) = t^a \nabla_a f. \quad (۱۵-۱)$$

(۵) عاری از پیچش^۳: به ازای همه $f \in \mathfrak{F}$ داریم

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f. \quad (۱۶-۱)$$

باید ذکر کنیم که شرط (۱۶-۱) می‌تواند در برخی از نظریات در نسبیت عام اعمال نشود که تحت این عمل، یک تانسور T^c_{ab} وجود دارد که در آن اندیس‌های a و b پادمقارن است، آنگاه داریم $\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c_{ab} \nabla_c f$ که در آن تانسور T^c_{ab} را تانسور پیچش^۴ می‌نامیم. اگر شرط (۱۵-۱) و (۱۶-۱) را باهمدیگر تلفیق کنیم و از قاعده لاینیتس استفاده کنیم، آنگاه جابجاگر دو میدان برداری v^a و w^a را بر اساس هر عملگر مشتق ∇_a بدست می‌آوریم. با اعمال این گزاره بر هر تابع هموار f خواهیم داشت

$$\begin{aligned} [v, w](f) &= v\{w(f)\} - w\{v(f)\} \\ &= v^a \nabla_a (w^b \nabla_b f) - w^a \nabla_a (v^b \nabla_b f) \\ &= \{v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b\} \nabla_b f, \end{aligned} \quad (۱۷-۱)$$

بنابراین داریم

$$[v, w]^b = v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b. \quad (۱۸-۱)$$

حال باید وجود عملگرهای مشتق را اثبات کنیم. برای این کار، ψ را یک دستگاه مختصات فرض می‌کنیم که $\{\partial/\partial x^\mu\}$ و $\{dx^\mu\}$ پایه‌های مختصات مربوط به آن است. آنگاه در این منطقه، با فرض وجود این مختصات می‌توانیم عملگر مشتق معمولی ∂_a را همانطور که در ادامه توضیح می‌دهیم، تعریف کنیم. به ازای هر میدان تانسوری هموار $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ ، که مولفه‌های تانسورش را در این پایه مختصات به شکل $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ در نظر می‌گیریم، $\partial_a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ را یک تانسور تعریف می‌کنیم که مولفه‌هایش در این پایه مختصات، مشتق‌های جزئی به شکل $\partial T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} / \partial x^\sigma$ هستند. عملگر مشتق جزئی ساخته شده، تمامی پنج شروط گفته شده را رعایت می‌کند و شرط (۱-۱۶) در آن نه تنها برای میدان‌های اسکالر بلکه برای میدان‌های تانسوری نیز صادق است. این نکته را باید ذکر کنیم که عملگرهای مشتق جزئی ساخته شده در هر دستگاه مختصات جدیدی مانند ψ' ، متفاوت از عملگرهای مختلف در مختصات دیگراند بنابراین مشتق از مولفه‌های پرایم‌دار تانسوری که در دستگاه مختصات ψ تعریف شده است با مشتق از تانسوری که در دستگاه پرایم‌دار ψ' می‌باشد، برابر نیست. ازین رو عملگر مشتق جزئی معمولی، وابسته به مختصات است که به‌طور طبیعی با ساختار منیفلد مرتبط نیست.

حال به این سوال می‌پردازیم که عملگرهای مشتق تا چه اندازه یکتا هستند؟ با استفاده از شرط (۱-۱۵)، هر دو عملگر مشتق ∇_a و $\tilde{\nabla}_a$ باید با اعمال بر میدان‌های اسکالری در توافق باشند. اکنون می‌خواهیم عدم توافقی که بر سر اعمال آن بر تانسورهای از مراتب بالاتر اتفاق می‌افتد را مورد کاوش خود قرار دهیم. فرض می‌کنیم که w_b یک میدان برداری دوگان است و تفاضل $\tilde{\nabla}_a(fw_b) - \nabla_a(fw_b)$ برای یک میدان اسکالر دلخواه f نیز وجود دارد. با استفاده از قاعده لاینیتس داریم

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(fw_b) - \nabla_a(fw_b) &= (\tilde{\nabla}_a f)w_b + f(\tilde{\nabla}_a w_b) - (\nabla_a f)w_b - f(\nabla_a w_b) \\ &= f(\tilde{\nabla}_a w_b - \nabla_a w_b), \end{aligned} \quad (19-1)$$

که در آن دوباره از ویژگی (۱-۱۵) استفاده کردیم. از معادله فوق می‌توانیم دریابیم که این تفاضل تنها به تغییرات w_b در نقطه p بستگی دارد. این نکته را باید بیان داریم که تفاضل $w'_b - w_b$ در نقطه p صفر می‌شود. ازین رو درمی‌یابیم توابع هموار $f_{(\alpha)}$ نیز در نقطه p صفر می‌شود که در آن همه میدان‌های برداری دوگان هموار $\mu_b^{(\alpha)}$ به شکل

$$w'_b - w_b = \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)}. \quad (20-1)$$

تعریف می‌شود. بنابراین با استفاده از معادله (۱۹-۱) در نقطه p داریم

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_a(w'_b - w_b) - \nabla_a(w'_b - w_b) &= \sum_{\alpha} \{\tilde{\nabla}_a(f_{(\alpha)}\mu_b^{(\alpha)}) - \nabla_a(f_{(\alpha)}\mu_b^{(\alpha)})\} \\ &= \sum_{\alpha} f_{(\alpha)} \{\tilde{\nabla}_a\mu_b^{(\alpha)} - \nabla_a\mu_b^{(\alpha)}\} = 0,\end{aligned}\quad (21-1)$$

چرا که در نقطه p ، $f_{(\alpha)} = 0$ می‌باشد. در نهایت به دست می‌آوریم

$$\tilde{\nabla}_a w_b - \nabla_a w_b = \tilde{\nabla}_a w'_b - \nabla_a w'_b. \quad (22-1)$$

که توانستیم ادعای خود را اثبات کنیم.

بنابراین نشان دادیم که تفاضل $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ ، نگاشت بردارهای دوگان در نقطه p به تانسورهای از مرتبه $(0, 2)$ در همان نقطه p می‌باشد. از شرط (۱۲-۱) نیز درمی‌یابیم که این نگاشت خطی است. به تبع آن $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$ ، یک تانسور از مرتبه $(1, 2)$ در نقطه p تعریف می‌کند که آن را با C^c_{ab} نمایش می‌دهیم. بنابراین برای هر دو عملگر مشتق $\tilde{\nabla}_a$ و ∇_a یک میدان تانسوری C^c_{ab} وجود دارد به قسمی که

$$\nabla_a w_b = \tilde{\nabla}_a w_b - C^c_{ab} w_c. \quad (23-1)$$

معادله فوق، عدم توافق اعمال عملگرهای مشتق $\tilde{\nabla}_a$ و ∇_a را بر روی میدان‌های برداری دوگان نشان می‌دهد.

به واسطه شرط (۱۶-۱) تانسور C^c_{ab} دارای تقارن است. اگر فرض کنیم که $w_b = \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b f$ باشد، آنگاه داریم

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C^c_{ab} \nabla_c f, \quad (24-1)$$

از آنجا که هر دوی $\nabla_a \nabla_b f$ و $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f$ بر روی اندیس‌های a و b متقارن‌اند، پس از این شرط بر می‌آید که

$$C^c_{ab} = C^c_{ba}. \quad (25-1)$$

قابل ذکر است که اگر دارای تانسور پیچش باشیم، آنگاه رابطه فوق صادق نیست.

حاصل تفاضل اعمال عملگرهای $\tilde{\nabla}_a$ و ∇_a بر روی میدان‌های برداری و همه میدان‌های تانسوری مرتبه بالاتر، با معادله (۲۳-۱)، ویژگی (۱۵-۱) و قاعده لاینیتس تعیین می‌شود. به ازای هر میدان برداری t^a و میدان تک-فرم w_a ، با استفاده از ویژگی (۱۵-۱) درمی‌یابیم

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(w_b t^b) = 0. \quad (26-1)$$

به بیان دیگر، با استفاده از قاعده لاینیتس داریم

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(w_b t^b) = (C^c_{ab} w_c) t^b + w_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b. \quad (۲۷-۱)$$

بنابراین با جایگزینی بر روی اندیس‌های ادغام شده به ازای همه w_b خواهیم داشت

$$w_b [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b + C^b_{ac} t^c] = 0. \quad (۲۸-۱)$$

که نشان می‌دهد

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C^b_{ac} t^c. \quad (۲۹-۱)$$

در ادامه اگر شیوه قبل را دنبال کنیم، می‌توانیم فرمولی عمومی برای اعمال ∇_a بر روی یک میدان تانسوری دلخواه بر اساس $\tilde{\nabla}_a$ و C^c_{ab} بدست آوریم. به ازای $T \in \mathcal{T}(k, l)$ در می‌یابیم

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_i C^{b_i}_{ad} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_j C^d_{ac_j} T^{b_1 \dots b_l}_{c_1 \dots d_j \dots c_l}. \quad (۳۰-۱)$$

بنابراین تفاضل بین دو عملگر مشتق $\tilde{\nabla}_a$ و ∇_a ، کاملاً به واسطه میدان تانسوری C^c_{ab} مشخص شده است. بالعکس می‌توان نشان داد که اگر $\tilde{\nabla}_a$ یک عملگر مشتق باشد، آنگاه C^c_{ab} یک میدان تانسوری هموار دلخواه است که بر روی اندیس‌های پائین آن تقارن وجود دارد، ازین رو عملگر ∇_a داده شده با معادله (۳۰-۱)، نیز یک عملگر مشتق می‌باشد. این نشان می‌دهد که در انتخاب عملگر مشتق دارای آزادی عمل می‌باشیم، چنان که بر روی یک منیفلد n بعدی، تانسور C^c_{ab} که دارای $n^2(n+1)/2$ مولفه مستقل است، در هر نقطه‌ای مشخص می‌باشد.

هدف از بیان مفصل گفته‌های اظهار شده، رسیدن به این کاربرد مهم از معادله (۳۰-۱) است که در آن می‌توانیم عملگر مشتق $\tilde{\nabla}_a$ را با مشتق جزئی ∂_a جابه‌جا کنیم. در این حالت، به جای میدان تانسوری C^c_{ab} از Γ^c_{ab} استفاده می‌کنیم که به نماد کریستوفل^۱ معروف است [۱۲، ۱۳]. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b_{ac} t^c. \quad (۳۱-۱)$$

از آنجایی که می‌دانیم، چطور می‌توان عملگر مشتق معمولی مرتبط با یک دستگاه مختصات معین را محاسبه کرد بنابراین در معادله (۳۱-۱) نیز با دانستن نماد کریستوفل Γ^c_{ab} می‌توانیم عملگر مشتق ∇_a را محاسبه کنیم.

^۱ Christoffel symbol

باید توجه کنیم که نماد کریستوفل Γ^c_{ab} یک میدان تانسوری مرتبط با عملگر مشتق ∇_a می باشد و همچنین دستگاه مختصاتی که در آن ∂_a تعریف شده است. بنابراین اگر دستگاه مختصات خود را تغییر دهیم در نتیجه، عملگر مشتق را باید از ∂_a به ∂'_a تغییر دهیم که به تبع آن نیز نماد کریستوفل Γ^c_{ab} به تانسور جدید Γ'^c_{ab} تغییر می کند. ازین رو مولفه های مختصه نماد کریستوفل Γ^c_{ab} در مختصات بدون پرایم با مولفه های Γ'^c_{ab} در مختصات پرایم دار با استفاده از قانون تبدیل تانسوری، مرتبط نخواهند بود چرا که تانسورها را نیز همانند مختصات تغییر می دهیم.

با استفاده از یک عملگر مشتق ∇_a از پیش تعریف شده، می توانیم مفهوم انتقال موازی یک بردار در امتداد یک خم C با مماس t^a را تعریف کنیم. هنگامی به یک بردار v^a معین در هر نقطه ای از خم C ، می گوییم انتقال موازی پیدا کرده است که در امتداد یک خم تحت معادله زیر حرکت کند

$$t^a \nabla_a v^b = 0. \quad (32-1)$$

به طور عمومی تر، می توانیم این معادله را برای یک میدان تانسوری با مرتبه دلخواه نیز داشته باشیم

$$t^a \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = 0. \quad (33-1)$$

با انتخاب دستگاه مختصات و استفاده از معادله (۳۱-۱)، رابطه (۳۲-۱) را این گونه می نویسیم

$$t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b_{ac} v^c = 0, \quad (34-1)$$

یا می توانیم مولفه ها را در پایه مختصات و با در نظر گرفتن پارامتر t در امتداد خم C بازنویسی کنیم [۱۲]

$$\frac{dv^\nu}{dt} + \sum_{\mu, \lambda} t^\mu \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda = 0. \quad (35-1)$$

این نشان می دهد که انتقال موازی v^a تنها به مقدار v^a بر روی خم بستگی دارد. ازین رو ممکن است ویژگی های انتقال موازی بردارها را تنها در امتداد یک خم تعریف شده، بر خلاف میدان برداری در نظر بگیریم. همچنین با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی، درمی یابیم که همیشه برای معادله فوق، با در نظر گرفتن مقدار اولیه v^a ، یک جواب خاص وجود دارد. بنابراین یک بردار در نقطه p بر روی خم منحصرأ می تواند یک بردار انتقال موازی داده شده در هر کجا بر روی خم تعریف کند. از این مفهوم انتقال موازی می توان برای یکسان سازی (یعنی نگاشت به یکدیگر) فضاهای مماس V_p و V_q در نقاط p و q استفاده کرد، به شرطی که یک عملگر مشتق و یک خم همبند بین نقاط p و q وجود داشته باشد. ساختار ریاضیاتی نشات

گرفته از ویژگی وابسته به خم فضاهای مماسی از نقاط مختلف را هموستار^۱ می‌گوییم [۶]. به طور معکوس نیز می‌توانیم از مفهوم عمومی هموستار شروع کنیم و با استفاده از آن، مفهوم عملگر مشتق را تعریف کنیم. بنابراین همان طور که مشاهده کردیم، تنها با داشتن یک ساختار منیفلد معین، عملگرهای مشتق مجزایی وجود دارند که هیچ کدام از آن بر دیگری ارجعیتی ندارند. حال می‌خواهیم نشان دهیم که اگر یک متریک g_{ab} بر روی منیفلد داشته باشیم، گزینش طبیعی عملگر مشتق به طور یکتایی انتخاب شده است. چرا که متریک باعث تحمیل یک شرط طبیعی بر روی مفهوم انتقال موازی می‌شود. به این منظور فرض می‌کنیم که دو بردار v^a و w^a وجود دارند که اگر ضرب داخلی شان، $g_{ab}v^aw^a$ ، را بر روی هر خمی انتقال موازی دهیم، دست نخورده باقی می‌مانند. بنابراین برای v^a و w^a که معادله (۱-۳۲) را ارضا می‌کند، احتیاج داریم

$$t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) = 0. \quad (1-36)$$

حال با استفاده از قاعده لاینیتس بدست می‌آوریم

$$t^a v^b w^c \nabla_a g_{bc} = 0. \quad (1-37)$$

رابطه فوق برای همه خم‌ها و بردارهایی که انتقال موازی پیدا کرده‌اند اگر و تنها اگر صادق است که داشته باشیم [۱۴]

$$\nabla_a g_{bc} = 0. \quad (1-38)$$

معادله (۱-۳۸) همان شرط اضافه‌ای است که بر عملگر مشتق تحمیل کرده‌ایم و برای تعیین آن از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

فرض می‌کنیم g_{ab} یک متریک است، آنگاه یک عملگر مشتق ∇_a به طور یکتایی وجود دارد که در آن $\nabla_a g_{bc} = 0$ می‌باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم $\tilde{\nabla}_a$ هر عملگر مشتقی می‌تواند باشد به عنوان مثال عملگر مشتق معمولی مرتبط با یک دستگاه مختصات. حال تلاش می‌کنیم این گزاره را برای C^c_{ab} حل کنیم. ازین رو عملگر مشتق تعیین شده به واسطه $\tilde{\nabla}_a$ و C^c_{ab} ویژگی مطلوب را ارضا خواهد کرد. این قضیه را با نشان دادن این که حل یکتایی برای C^c_{ab} وجود دارد، اثبات خواهیم کرد.

با استفاده از معادله (۱-۳۰)، C^c_{ab} معادله زیر را ارضا می‌کند

$$0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d_{ab} g_{dc} - C^d_{ac} g_{bd}, \quad (1-39)$$

یعنی

$$C_{cab} + C_{cab} = \tilde{\nabla}_a g_{bc}, \quad (۴۰-۱)$$

که با جایگذاری اندیس داریم

$$C_{cba} + C_{abc} = \tilde{\nabla}_b g_{ac}, \quad (۴۱-۱)$$

$$C_{bca} + C_{acb} = \tilde{\nabla}_c g_{ab}. \quad (۴۲-۱)$$

با یک بار جمع کردن و سپس تفریق معادلات (۴۱-۱) و (۴۲-۱) از یکدیگر و با استفاده از خاصیت تقارن تانسور C^c_{ab} به دست می آوریم

$$۲C_{cab} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab}, \quad (۴۳-۱)$$

یعنی

$$C^c_{ab} = \frac{1}{۲} g^{cd} [\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab}]. \quad (۴۴-۱)$$

این انتخاب یکتا از C^c_{ab} ، معادله (۳۸-۱) را ارضا می کند و بدین شکل اثبات فرضیه مان کامل می شود. بنابراین به طور مشخص با توجه به اثبات گفته شده با استفاده از نماد کریستوفل و مشتق هم ورده خواهیم داشت

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{۲} g^{cd} [\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}]. \quad (۴۵-۱)$$

بنابراین مولفه های پایه مختصات نماد کریستوفل به شکل زیر بازنویسی می شوند

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{۲} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \{ \partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \}. \quad (۴۶-۱)$$

پس می توانیم Γ^c_{ab} را (ازین رو ∇_a) با گرفتن مشتق های جزئی از مولفه های پایه مختصات متریک محاسبه کنیم. قابل ذکر است که زین پس برای سادگی در روابط، از قرارداد جمع اینشتین^۱ استفاده می کنیم که به معنی حذف جمع سری بر روی اندیس های تکراری می باشد.

^۱ Einstein summation convention

۳-۱-۱ انحنا

در این بخش با استفاده از انتقال موازی وابسته به مسیر، به بیان داخلی انحنا می‌پردازیم و آن را با تانسور انحنا^۱ ریمان^۱ تعریف خواهیم کرد و در ادامه به ذات وابسته به مسیر انتقال موازی دست خواهیم یافت. فرض می‌کنیم که ∇_a یک عملگر مشتق است و w_b نیز میدان برداری دوگان می‌باشد. f را نیز یک تابع هموار در نظر می‌گیریم. حال اعمال دو عملگر مشتق ∇_a و ∇_b را بر روی $f w_b$ محاسبه خواهیم کرد

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b (f w_c) &= \nabla_a (\nabla_b f w_c + f \nabla_b w_c) \\ &= (\nabla_a \nabla_b f) w_c + \nabla_b f \nabla_a w_c + \nabla_a f \nabla_b w_c + f \nabla_a \nabla_b w_c,\end{aligned}\quad (47-1)$$

با کم کردن عبارت $\nabla_b \nabla_a (f w_c)$ از رابطه فوق به دست می‌آوریم

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f w_c = f (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c. \quad (48-1)$$

از این معادله بر می‌آید (طبق استدلال گفته شده برای معادله (۱۹-۱)) که تانسور $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c$ در نقطه p تنها وابستگی به مقدار w_c در نقطه p دارد. پس می‌توان نتیجه گرفت که $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$ یک نگاشت خطی از بردارهای دوگان در نقطه p به تانسورهایی از مرتبه $(0, 3)$ در همان نقطه p تعریف می‌کند که اثر آن، تانسورهایی از مرتبه $(1, 3)$ می‌باشند. ازین رو نشان دادیم که یک میدان تانسوری $R_{abc}{}^d$ برای همه میدان‌های بردار دوگان w_c وجود دارد یعنی

$$\nabla_a \nabla_b w_c - \nabla_b \nabla_a w_c = -R_{abc}{}^d w_d, \quad (49-1)$$

که در آن $R_{abc}{}^d$ به تانسور انحنا^۱ ریمان معروف است [۶، ۱۲].

حال نشان خواهیم داد که این تانسور مستقیماً با این گزاره ارتباط دارد که: یک بردار به هنگام انتقال موازی حول یک خم بسته کوچک به مقدار اولیه خود باز نخواهد گشت. برای این کار، یک حلقه بسته کوچک در نقطه $p \in \mathcal{M}$ با انتخاب یک رویه دوبعدی S گذرنده از p و مختصات t و s بر روی آن در نظر می‌گیریم که برای سادگی در آن مختصه $p = (0, 0)$ انتخاب شده است. حال حلقه‌ای را در نظر می‌گیریم که با حرکت Δt در امتداد خم $s = 0$ و سپس حرکت ΔS در امتداد خم $t = \Delta t$ و در نهایت، بازگشتان به Δt و Δs شکل گرفته است. اکنون فرض می‌کنیم که v^a یک بردار در نقطه p است (که لزوماً مماس بر رویه S نیست). در ادامه می‌خواهیم انتقال موازی بردار v^a را حول حلقه ساخته شده، محاسبه کنیم. ساده‌ترین

^۱ Riemann curvature tensor

راه برای محاسبه تغییر در v^a زمانی است که با فرض w_b به عنوان یک میدان برداری دوگان دلخواه، به نقطه p بازگردیم و تغییر را در اسکالر $v^a w_a$ وقتی که حلقه را برعکس طی می‌کنیم، به دست آوریم. با فرض اینکه تغییر در اسکالر $v^a w_a$ را با δ_1 نشان می‌دهیم، برای Δt کوچک در طی حرکت بر روی اولین بخش از مسیر داریم

$$\delta_1 = \Delta t \frac{\partial}{\partial t} (v^a w_a) \Big|_{(\Delta t/2, 0)}. \quad (50-1)$$

که در آن با محاسبه مشتق در نقطه میانی، درمی‌یابیم که این عبارت توصیف کننده دقیق مرتبه دوم در جابجایی Δt است. بنابراین می‌توان نوشت

$$\delta_1 = \Delta t T^b \nabla_b (v^a w_a) \Big|_{(\Delta t/2, 0)} = \Delta t v^a T^b \nabla_b w_a \Big|_{(\Delta t/2, 0)}, \quad (51-1)$$

که در آن T^b مماس بر خم‌های ثابت s و $T^b \nabla_b v^a = 0$ ، طبق معادله (۱-۳۲)، است. با انجام رهیافتی مشابه با چیزی که الان گفته شد می‌توانیم روابط δ_2 ، δ_3 و δ_4 را محاسبه کنیم. ترکیب دو ورودش‌گیری Δt ، یعنی δ_1 و δ_3 منجر می‌شود به

$$\delta_1 + \delta_3 = \Delta t \left[v^a T^b \nabla_b w_a \Big|_{(\Delta t/2, 0)} - v^a T^b \nabla_b w_a \Big|_{(\Delta t/2, \Delta s)} \right]. \quad (52-1)$$

همین کار را می‌توان به‌طور مشابه برای δ_2 و δ_4 نیز انجام داد. حال درمی‌یابیم که با $\nabla S \rightarrow 0$ ، جملات داخل براکت در معادله فوق صفر می‌شوند و این نشان می‌دهد که تغییر مرتبه اول در Δt ، Δs و همچنین تغییر کل در اسکالر $v^a w_a$ نیز برابر با صفر می‌شوند که این یعنی انتقال موازی تا مرتبه اول در Δt و Δs وابسته به مسیر است. برای محاسبه تغییر مرتبه دوم در $v^a w_a$ نیز از این فرآیند تبعیت می‌کنیم. خم $t = \Delta t/2$ را در نظر می‌گیریم. v^a و $T^b \nabla_b w_a$ را در امتداد این خم از $(\Delta t/2, 0)$ تا $(\Delta t/2, \Delta s)$ انتقال موازی می‌دهیم. واضح است که تا مرتبه اول در Δs ، v^a در $(\Delta t/2, \Delta s)$ برابر با انتقال موازی v^a در $(\Delta t/2, 0)$ در امتداد این خم می‌باشد. چرا که انتقال موازی تا مرتبه اول وابسته به مسیر است. به بیان دیگر، تا مرتبه اول، عبارت $T^b \nabla_b w_a$ در $(\Delta t/2, \Delta s)$ از انتقال موازی این کمیت از $(\Delta t/2, 0)$ با مقدار $\Delta s S^c \nabla_c (T^b \nabla_b w_a)$ تفاوت خواهد داشت که در آن S^c مماس بر خم‌های ثابت t است. ازین رو عبارت داخل براکت تنها یک کمیت ادغام شده با v^a است. بنابراین تا مرتبه دوم در Δt و Δs داریم

$$\delta_1 + \delta_3 = -\Delta t \Delta s v^a S^c \nabla_c (T^b \nabla_b w_a), \quad (53-1)$$

که برای دقت باید همه تانسورها را در p محاسبه کنیم. با همین رهیافت برای δ_2 و δ_4 ، تغییر کل را در $v^a w_a$

بدست می آوریم

$$\begin{aligned}\delta(v^a w_a) &= \Delta t \Delta s v^a \{T^c \nabla_c (S^b \nabla_b w_a) - S^c \nabla_c (T^b \nabla_b w_a)\}, \\ &= \Delta t \Delta s v^a T^c S^b (\nabla_c \nabla_b - \nabla_b \nabla_c) w_a, \\ &= \Delta t \Delta s v^a T^c S^b R_{cba}{}^d w_d;\end{aligned}\quad (۵۴-۱)$$

که در خط دوم ازین واقعیت استفاده کردیم که میدان برداری مختصه دار T^a و S^b با یکدیگر جابه جا می شوند و همچنین از تعریف تانسور انحنا ی ریمان نیز بهره گرفتیم. معادله فوق به ازای همه w_a اگر و تنها اگر تغییر کل در v^a (به طور دقیق تر تا مرتبه دوم در Δs و Δt) به شکل زیر باشد برقرار است

$$\delta v^a = \Delta t \Delta s v^d T^c S^b R_{cbd}{}^a, \quad (۵۵-۱)$$

که این همان نتیجه باب میل مان است که نشان می دهد تانسور انحنا ی ریمان به طور مستقیم، انتقال موازی وابسته به مسیر را اندازه می گیرد.

با استفاده از معادله (۴۹-۱) می توانیم اثر جابجاگر عملگرهای مشتق بر روی میدان های تانسوری دلخواه را بر اساس تانسور ریمان به دست آوریم. برای پیدا کردن عبارتی برای یک میدان برداری t^a ، فرض می کنیم که w_b یک میدان برداری دوگان است. آنگاه با استفاده از ویژگی (۱۶-۱) به همراه قاعده لاینیتس و معادله (۴۹-۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\bullet &= (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(t^c w_c) \\ &= \nabla_a (w_c \nabla_b t^c + t^c \nabla_b w_c) - \nabla_b (w_c \nabla_a t^c + t^c \nabla_a w_c) \\ &= w_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c \\ &= w_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c w_d R_{abc}{}^d.\end{aligned}\quad (۵۶-۱)$$

بنابراین به دست می آوریم

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c = -R_{abd}{}^c t^d. \quad (۵۷-۱)$$

که با استفاده از استدلال استقرایی برای یک میدان تانسوری دلخواه $T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}$ داریم

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} = - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots e \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots e \dots d_l}. \quad (۵۸-۱)$$

حال در ادامه به ویژگی‌های مهم تانسور انحنا می‌پردازیم که ازین قراراند:

$$۱) R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d. \quad (۵۹-۱)$$

$$۲) R_{[abc]}{}^d = 0. \quad (۶۰-۱)$$

۳) برای عملگر مشتق ∇_a مرتبط با متریک $\nabla_a g_{bc} = 0$ داریم

$$R_{abcd} = -R_{abdc}. \quad (۶۱-۱)$$

۴) اتحاد بیانکی^۱ برای آن صادق است [۶]

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0. \quad (۶۲-۱)$$

ویژگی اول از تعریف خود تانسور ریمان یعنی معادله (۴۹-۱) می‌آید. برای اثبات ویژگی دوم، با فرض w_b به عنوان میدان برداری دوگان دلخواه و هر عملگر مشتق ∇_b داریم

$$\nabla_{[a} \nabla_b w_{c]} = 0. \quad (۶۳-۱)$$

با جایگزینی ∂_a با ∇_a و استفاده از خاصیت جابجاپذیری عملگر مشتق و تقارن تانسور $C_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c$ طبق شرط (۲۵-۱) به دست می‌آوریم

$$0 = 2\nabla_{[a} \nabla_b w_{c]} = \nabla_{[a} \nabla_b w_{c]} \nabla_{[b} \nabla_a w_{c]} = R_{[abc]}{}^d w_d, \quad (۶۴-۱)$$

که برای همه w_d این ویژگی را اثبات می‌کند. ویژگی سوم نیز از اعمال رابطه (۵۸-۱) بر روی متریک g_{ab} به دست می‌آید. ازین رو درمی‌یابیم

$$0 = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abc}{}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}, \quad (۶۵-۱)$$

که از آن به ویژگی سوم خواهیم رسید. با استفاده از این سه ویژگی می‌توانیم تقارن موجود در تانسور ریمان را اثبات کنیم

$$R_{abcd} = R_{cdab}. \quad (۶۶-۱)$$

سرانجام برای اثبات اتحاد بیانکی، با اعمال جابجاگر عملگرهای مشتق ∇_a و ∇_b بر روی مشتق میدان برداری دوگان با استفاده از معادله (۱-۵۸) داریم

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \nabla_c w_d = R_{abc}{}^e \nabla_e w_d + R_{abd}{}^f \nabla_c w_f. \quad (۱-۶۷)$$

یا به بیان دیگر

$$\nabla_a (\nabla_b \nabla_c w_d - \nabla_c \nabla_b w_d) = \nabla_a (R_{bcd}{}^e w_e) = w_e \nabla_a R_{bcd}{}^e + R_{bcd}{}^e \nabla_a w_e. \quad (۱-۶۸)$$

حال اگر بر روی اندیس‌های a ، b و c در معادلات (۱-۶۷) و (۱-۶۸) پادمتقارن وجود داشته باشد، طرف چپ معادلات با هم برابر شده و منجر به رابطه زیر می‌شود

$$R_{[abc]}{}^e \nabla_e w_d + R_{[ab|d]}{}^f \nabla_c w_f = w_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e + R_{bc|d]}{}^e \nabla_a w_e, \quad (۱-۶۹)$$

که مفهوم نمادگذاری $|d|$ نشان از پادمتقارن بودن اندیس d دارد. اولین جمله در طرف چپ معادله فوق با استفاده از ویژگی دوم (۱-۶۰) از تانسور ریمان صفر است ازین رو دومین جمله در هر دو طرف با هم خط می‌خورند و در نهایت به ویژگی چهارم می‌رسیم

$$w_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0. \quad (۱-۷۰)$$

حال مهم است که به بخش رد و بدون رد تانسور ریمان بپردازیم. با استفاده از بخش پادمتقارن ویژگی یکم و سوم، رد تانسور ریمان بر روی دو اندیس اول و دو اندیس آخر برابر با صفر می‌شود. قابل به ذکر است که رد آن بر روی اندیس‌های دوم و چهارم (یا به طور هم‌ارز اول و سوم) به تانسور ریچی^۱ معروف است

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b. \quad (۱-۷۱)$$

با استفاده از ویژگی تانسور ریمان داریم

$$R_{ac} = R_{ca}. \quad (۱-۷۲)$$

همچنین می‌توانیم انحنای اسکالر R ^۲ را با رد تانسور ریچی تعریف کنیم [۱۲]

$$R = R_a{}^a \quad (۱-۷۳)$$

بخش بدون رد تانسور ریمان نیز به تانسور وایل C_{abcd} ^۱ منجر می‌شود و برای منیفلدهایی با ابعاد $n \geq 3$ با رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۵]

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}. \quad (۷۴-۱)$$

تانسور وایل ویژگی‌های متقارن یکم تا سوم تانسور ریمان، بعلاوه، بدون رد بودن بر روی همه اندیس‌هایش را ارضا می‌کند. همچنین از آنجا که تحت تبدیلات هم‌مدیس متریک، رفتار خوبی از خود نشان می‌دهد، بعضی اوقات به تانسور هم‌مدیس^۲ معروف است.

با ادغام اتحاد بیانکی، معادله مفیدی برای تانسور ریچی R_{ab} به دست می‌آوریم

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0. \quad (۷۵-۱)$$

با بالا بردن اندیس d به واسطه متریک و ادغام بر روی اندیس‌های b و d خواهیم داشت

$$\nabla_a R^a{}_c + \nabla_b R^b{}_c - \nabla_c R = 0, \quad (۷۶-۱)$$

یا

$$\nabla^a G_{ab} = 0, \quad (۷۷-۱)$$

که در آن داریم

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (۷۸-۱)$$

G_{ab} به تانسور اینشتین^۳ معروف است که در معادله اینشتین ظاهر می‌شود و رابطه (۷۶-۱) نقش مهمی در سازگاری معادله اینشتین دارد [۱۶، ۱۷].

۴-۱-۱ ژئودزی

به‌طور شهودی، ژئودری‌ها خطوطی هستند که تا حداقل ممکن، خم می‌باشند که این سراسرترین شیوه برای رسم خطوط در هندسه خمیده است [۱۲]. با وجود یک عملگر مشتق معین ∇_b ، یک ژئودزی را، خمی که بردار مماس آن در امتداد خودش به‌طور موازی انتشار یافته است، تعریف می‌کنیم، یعنی خمی که مماس آن T^a ، معادله زیر را ارضا می‌کند

$$T^a \nabla_a T^b = 0. \quad (۷۹-۱)$$

به خاطر آن که می‌خواهیم تا حد ممکن خم را مستقیم در نظر بگیریم، ممکن است بخواهیم که بردار مماس بر نقطه‌ای از خم را، هنگامی که به طور مستقیم انتشار می‌یابد، در همان جهت خودش در نظر بگیریم ولی این الزام وجود ندارد که با همان طول باشد. بنابراین این گفته می‌تواند منجر به شرط ضعیف‌تر زیر شود

$$T^a \nabla_a T^b = \alpha T^b, \quad (۸۰-۱)$$

که در آن α تابعی دلخواه بر روی خم است. برای آنکه نشان دهیم یک خم معین، معادله (۸۰-۱) را ارضا می‌کند کافی است آن را دوباره پارامتری کنیم که در این صورت معادله (۷۹-۱) را ارضا می‌کند. بنابراین کلیت موضوع را در این که تنها خم‌ها می‌توانند معادله (۷۹-۱) را ارضا کنند، از دست نخواهیم داد. پارامترسازی‌ای که منجر به معادله (۷۹-۱) شود را، پارامترسازی آفین^۱ می‌گوییم. بنابراین تعریفمان از ژئودزی ایجاب می‌کند که به طور آفین پارامتری شده باشد.

برای درک بهتر از معادله ژئودزی، لازم است مولفه‌های آن را بر اساس پایه مختصات بنویسیم. بنابراین

داریم

$$\frac{dT^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^\sigma T^\nu = 0. \quad (۸۱-۱)$$

قابل ذکر است که $T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ می‌باشد و ازین رو در پایه مختصات، معادله ژئودزی به شکل زیر می‌شود

[۱۸]

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (۸۲-۱)$$

معادله فوق، یک دستگاه جفت شده از معادلات دیفرانسیلی معمولی از مرتبه n برای n تابع $x^\mu(t)$ می‌باشد. از نظریه معادلات دیفرانسیلی معمولی، مشخص است که همیشه یک جواب یکتا برای هر مقدار اولیه معین از x^μ و dx^μ/dt وجود دارد. به این معنی داریم که به ازای $p \in \mathcal{M}$ معین و هر بردار مماس $T^a \in V_p$ ، همیشه یک ژئودزی یکتا گذرنده از p با بردار مماس T^a وجود دارد.

وجود و یکتایی ژئودزی به ما اجازه می‌دهد که دستگاه‌های مختصاتی را بسازیم که بتوانیم در آن اهداف محاسباتی را به طور مناسب انجام دهیم. فرض می‌کنیم که $p \in \mathcal{M}$ است. می‌توانیم یک نداشت نمایی^۲ از فضای مماس V_p به $\mathcal{M}$ تعریف کنیم که در واقع نگاشتی از هر $T^a \in V_p$ به نقطه‌ای در $\mathcal{M}$ است که در پارامتر آفین واحد از p ، در امتداد ژئودزی گذرنده از p با مماس T^a قرار گرفته است. قبل از آن که پارامتر آفین را $t = ۱$ قرار دهیم، با انتخاب بردار مماس بزرگ T^a ، ممکن است به تکنیکی برسیم.

^۱ Affine parameterization ^۲ Exponential map

قابل ذکر است که ژئودزی‌ها ممکن است در ارضای شرط یک‌به‌یک بودن نگاشت نمایی، صدق نکنند. اگرچه که می‌توانیم در همسایگی (به‌قدر کافی کوچک) مبدا V_p ، نگاشت نمایی یک به یک تعریف کنیم. چرا که V_p یک فضای مماس n بعدی است که می‌توانیم آن را با $\mathbb{R}^n$ مشخص کنیم و ازین رو هدف استفاده از این نگاشت نمایی، برای دستیابی به یک دستگاه مختصات است که به مختصات عمودی ریمانی^۱ در p معروف است. این مختصات دارای یک ویژگی مهم‌اند که در آن همه ژئودزی‌های گذرنده از p به خطوط مستقیم گذرنده از مبدا $\mathbb{R}^n$ نگاشت شده‌اند. از معادله (۱-۸۲) برمی‌آید که در این دستگاه مختصات، مولفه‌های نماد کریستوفل $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$ در نقطه p برابر با صفر است. در واقع این چیزی است که مختصات عمودی ریمانی را مهم می‌سازد چرا که می‌توانیم بر روی یک نقطه معین محاسبات انجام دهیم.

در حالتی که عملگر مشتق ∇_a از متریک g_{ab} نشأت می‌گیرد، نوع دومی از دستگاه مختصات به نام مختصات عمودی گاووسی^۲ یا مختصات هم‌زمان^۳ وجود دارد و هنگامی برای انجام محاسبات استفاده می‌شود که در آن یک ابرروی^۴ معین S داشته باشیم که یعنی یک زیرمنیفلد $(n-1)$ بعدی، که در یک منیفلد n بعدی M نشانده شده است. در هر نقطه $p \in S$ ، فضای مماس V_p از منیفلد S به‌طور طبیعی می‌تواند به عنوان زیرفضای $(n-1)$ بعدی از فضای مماس V_p از منیفلد M در نظر گرفته شود. بنابراین یک بردار $n^a \in V_p$ وجود خواهد داشت که به همه بردارها در V_p (نسبت به متریک g_{ab}) عمود است که به این بردار n^a ، عمود بر S گفته می‌شود. در متریک ریمانی، n^a نمی‌تواند در $\tilde{V}_p$ قرار گیرد ولی در حالتی که متریک دارای علامت نامعین است، n^a می‌تواند بردار پوچ^۵، $g_{ab}n^an^b = 0$ ، باشد ازین رو n^a در $\tilde{V}_p$ قرار می‌گیرد و S را در این حالت ابرروی پوچ در نقطه p می‌نامیم. قابل ذکر است که اگر S در هیچ جایی صفر نباشد باید n^a را با شرط $g_{ab}n^an^b = \pm 1$ بهنجار کنیم.

برای تعریف مختصات عمودی گاووسی برای هر ابرروی غیر صفر می‌توانیم این رهیافت را در پیش گیریم که به ازای هر $p \in S$ ، یک ژئودزی یکتای گذرنده از p با مماس n^a بسازیم. سپس یک مختصات دلخواه $(x^1, \dots, x^{n-1})$ بر روی S (بخشی از) S انتخاب می‌کنیم و به هر نقطه در همسایگی (آن بخش از) S در امتداد ژئودزی با پارامتر t برچسبی می‌زنیم که بر روی آن قرار دارد و همچنین مختصات $x^1, \dots, x^{n-1}$ از نقطه $p \in S$ که ژئودزی از آن نشأت می‌گیرد. ژئودزی‌هایی که از S نشأت می‌گیرند، می‌توانند از تکینگی‌ها عبور کنند یا به آن وارد شوند اما در همسایگی (به قدر کافی کوچک) هر نقطه $p \in S$ ، نگاشت $q \rightarrow (x^1, \dots, x^{n-1}, t)$ یک کارت^۶ تعریف می‌کند که در ادامه تلاش می‌کنیم آن را بسازیم.

مختصات عمودی گاووسی دارای این ویژگی نیز می‌باشد که ژئودزی‌ها به همه ابرروی‌های S_t با معادله

^۱ Riemannian normal coordinates ^۲ Gaussian normal coordinates ^۳ Synchronous coordinates
^۴ Hypersurface ^۵ Null vector ^۶ Chart

$t = A$ عموداند که در آن A یک ثابت است. برای آن که این موضوع را اثبات کنیم، کافی ست نشان دهیم که میدان مماس بر ژئودزی n^a به همه میدان‌های پایه مختصات $X_1^a, \dots, X_{n-1}^a$ عمود باقی می‌ماند که ازین رو فضای مماس به S_t را تولید می‌کند. اگر هر کدام از این میدان‌ها را با X^a نشان دهیم، آنگاه داریم

$$n^b \nabla_b (n_a X^a) = n_a n^b \nabla_b X^a = n_a X^a \nabla_b n^a = \frac{1}{\gamma} X^b \nabla_b (n^a n_a) = 0. \quad (۸۳-۱)$$

اولین تساوی در معادله فوق، از معادله ژئودزی می‌آید. تساوی دوم از این که n^a و X^b (المان‌های پایه مختصات بر روی M) با هم جابه‌جا می‌شوند، نشأت می‌گیرد. تساوی سوم مستقیماً از قاعده لاینیتس بر می‌آید و همچنین تساوی آخر، از این واقعیت نتیجه می‌شود که شرط بهنجارش $n^a n_a = \pm 1$ بر روی S به‌واسطه انتقال موازی حفظ می‌شود که در آن $n^a n_a$ بر روی M ثابت است. چون $n_a X^a$ بر روی S ، صفر است، بنابراین معادله (۸۳-۱) نشان می‌دهد که این شرط بر روی S نیز حفظ می‌شود. ازین رو به آنچه که می‌خواستیم، دست یافتیم.

ویژگی دیگر ژئودزی یک عملگر مشتق، از متریکی نشأت می‌گیرد که طول خم‌های هم‌بند نقطه‌های معین را بیشینه می‌کند چنان که به‌واسطه متریک اندازه‌گیری شده‌اند. برای یک خم (صرفاً مشتق‌پذیر) هموار C بر روی منیفلد M با متریک ریمانی g_{ab} ، طول l خم C ، به شکل زیر نوشته می‌شود

$$l = \int (g_{ab} T^a T^b)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (۸۴-۱)$$

که در آن T^a مماس به C بوده و t پارامتر خم است. برای یک متریک با علامت لورنتسی $(-+++)$ ، یک خم را زمان‌گونه^۱ می‌گوییم اگر نرم مماس‌اش همه جا منفی باشد یعنی $g_{ab} T^a T^b < 0$ ؛ پوچ یا صفر^۲ می‌گوییم اگر $g_{ab} T^a T^b = 0$ و فضاگونه^۳ می‌نامیم اگر $g_{ab} T^a T^b > 0$. برای خم‌های فضاگونه، طول را می‌توانیم با استفاده از معادله (۸۴-۱) تعریف کنیم [۱۸]. برای خم پوچ، بدیهی است که این طول صفر است و برای زمان‌گونه با تعریف زمان ویژه^۴ τ داریم

$$\tau = \int (-g_{ab} T^a T^b)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (۸۵-۱)$$

باید ذکر کنیم، طول خم‌هایی که از زمان‌گونه به فضاگونه تغییر می‌کنند، تعریف نشده‌اند. توجه کنید که چون مماس ژئودزی، انتقال موازی یافته است و ازین رو نرم آن ثابت است، ژئودزی‌ها در منیفلد لورنتسی^۵ نمی‌توانند از فضاگونه یا زمان‌گونه یا پوچ، تغییر کنند. همچنین باید بیان کنیم که طول (یا زمان ویژه) یک

^۱ Timelike ^۲ Null ^۳ Spacelike ^۴ Proper time ^۵ Lorentz manifold

خم، بستگی به آنکه چطور پارامتری شده است، ندارد. اگر یک پارامترسازی به شکل $s = s(t)$ انجام دهیم و مماس جدید را به شکل $S^a = (dt/ds)T^a$ تعریف کنیم، طول جدید به شکل زیر خواهد بود

$$l' = \int [g_{ab}S^aS^b]^{\frac{1}{2}} ds = \int [g_{ab}T^aT^b]^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{ds} ds = l. \quad (۸۶-۱)$$

حال می‌خواهیم شرطی را استخراج کنیم که در آن یک خم را بین دو نقطه ابتدایی و انتهایی بیشینه می‌کند به این معنی که تحت تغییر شکل^۱ هموار دلخواهی از طول خم‌ها، نقاط ابتدایی و انتهایی آن ثابت باقی بمانند. برای محاسبه تغییر طول خم به‌واسطه این تغییر شکل کوچک، با انتخاب کارت و کار بر روی $\mathbb{R}^n$ شروع می‌کنیم. با تعریف یک خم فضائگونه و نوشتن معادله (۸۴-۱) در پایه مختصات داریم

$$l = \int_a^b \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right]^{\frac{1}{2}} dt, \quad (۸۷-۱)$$

که در آن $C(a) = p$ و $C(b) = q$ ، نقاط ابتدایی و انتهایی خم C می‌باشند. مسئله بیشینه کردن طول l شبیه به همان مسئله در لاگرانژی کنش مکانیک است. وردش‌گیری در l به شکل زیر است

$$\delta l = \int_a^b \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d(\delta x^\beta)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right\} dt. \quad (۸۸-۱)$$

بدون از دست دادن کلیت موضوع (چرا که طول، به‌طور مستقل پارامتری شده است)، فرض می‌کنیم که خم اصلی نیز پارامتری شده است، پس داریم

$$g_{ab}T^aT^b = 1 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}. \quad (۸۹-۱)$$

با انتخاب این پارامترسازی، شرط بیشینه‌سازی به صورت زیر می‌شود

$$\begin{aligned} \bullet &= \int_a^b \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d(\delta x^\beta)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \delta x^\sigma \right\} dt \\ &= \int_a^b \left\{ -\frac{d}{dt} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \right\} \delta x^\beta dt. \end{aligned} \quad (۹۰-۱)$$

هیچ جمله مرزی‌ای در انتگرال جز به جز ایجاد نمی‌شود چرا که δx^β در نقاط ابتدایی و انتهایی صفر است. معادله فوق برای یک δx^β دلخواه نیز صادق خواهد بود اگر و تنها اگر

$$-g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0. \quad (۹۱-۱)$$

با استفاده از معادله (۹۶-۱) برای $\Gamma^\sigma_{\alpha\lambda}$ ، مشاهده می‌کنیم که معادله فوق همان معادله ژئودزی (۸۲-۱) می‌باشد. بنابراین یک خم، طول بین نقاط ابتدایی و انتهایی را بیشینه می‌کند، اگر و تنها اگر یک ژئودزی

باشد. با انجام همین رهیافت برای زمان ویژه، می‌بینیم که این خم، همان ژئودزی زمان‌گونه می‌باشد. با انجام این استنتاج می‌توانیم ببینیم که معادله ژئودزی از وردش‌گیری لاگرانژی زیر بدست می‌آید

$$L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}. \quad (۹۲-۱)$$

در بسیاری از حالت‌ها، راحت‌ترین راه برای محاسبه نماد کریستوفل $\Gamma^\sigma_{\alpha\lambda}$ در پایه مختصات معین، از لاگرانژی فوق شروع می‌شود و در ادامه با نوشتن معادلات اویلر-لاگرانژ متناظر و در انتها خوانش $\Gamma^\sigma_{\alpha\lambda}$ به‌واسطه مقایسه با معادله (۸۲-۱) صورت می‌گیرد.

بر روی یک منیفلد با متریک ریمانی، همیشه می‌توان خم‌هایی با طول بلند دلخواهی یافت که هر دو نقطه را به هم وصل می‌کنند. اگرچه طول از پایین مقید خواهد بود و خم با کوتاه‌ترین طول همبند بین دو نقطه لزوماً بیشینه طول و ازین رو ژئودزی است. بنابراین کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه، همیشه مستقیم‌ترین مسیر ممکن خواهد بود. اگرچه ژئودزی معین همبند دو نقطه، لزومی ندارد که کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌ها باشد. برای یک منیفلد با متریک لورنتسی، دو نقطه معین که با یک خم زمان‌گونه به هم وصل شده‌اند، همیشه می‌توان خم‌هایی زمان‌گونه با زمان ویژه کوچک دلخواه همبند آن نقاط پیدا کرد. در بعضی از فضا-زمان‌ها، زمان ویژه خم‌های زمان‌گونه همبند دو نقطه معین، لزومی ندارد که از بالا مقید باشند؛ اما اگر یک خم با بزرگ‌ترین زمان ویژه وجود داشت، حتماً باید یک ژئودزی زمان‌گونه باشد. اگرچه باید دوباره اشاره کنیم که لزومی ندارد یک ژئودزی معین، زمان ویژه بین دو نقطه را بیشینه کند.

حال هدف نهایی‌مان این است که معادله انحراف ژئودزی^۱ را بدست آوریم که این معادله مربوط به میل ژئودزی‌ها، برای شتاب گرفتن به سمت هم یا دور شدن از هم به انحنای منیفلد می‌باشد. این بحث یک ویژگی دیگر از انحنا را به ما می‌دهد که نقش مهمی در معادله اینشتین و قضیه تکیه‌ای ایجاد می‌کند [۱۹]. فرض می‌کنیم که خانواده تک-پارامتری همواری از ژئودزی‌ها را با $\gamma_s(t)$ نشان می‌دهیم که برای هر $s \in \mathbb{R}$ ، خم γ_s یک ژئودزی است (که با پارامتر آفین t پارامتری شده است) و همچنین نگاشت $(t, s) \rightarrow \gamma_s(t)$ ، هموار و یک‌به‌یک است و وارون هموار نیز دارد. حال فرض می‌کنیم که Σ نشان دهنده زیرمنیفلد دو بعدی احاطه شده با خم‌های γ_s است که در آن پارامترهای s و t را به عنوان مختصات Σ انتخاب می‌کنیم. اکنون میدان برداری $T^a = (\partial/\partial t)^a$ ، مماس بر خانواده‌هایی از ژئودزی‌هاست و ازین رو داریم

$$T^a \nabla_a T^b = 0. \quad (۹۳-۱)$$

^۱ Geodesic deviation equation

میدان برداری $X^a = (\partial/\partial s)^a$ ، نشان دهنده جابه‌جایی بی‌نهایت کوچک به نزدیک ژئودزی است که به بردار انحراف معروف است. در X^a آزادی پیمانه‌ای وجود دارد به این معنی که X^a تحت تغییر پارامترسازی آفین ژئودزی $\gamma_s(t)$ با افزودن ضریب T^a تغییر می‌کند یعنی $t \rightarrow t' = b(s)t + c(s)$. باید اشاره کنیم در این حالت که ژئودزی‌ها از عملگرهای مشتق مرتبط با متریک g_{ab} نشأت می‌گیرند، X^a می‌تواند عمود بر T^a انتخاب شود. یعنی اگر t را با ضریب وابسته به s بازمقیاس کنیم، می‌توانیم اطمینان حاصل کنیم که $g_{ab}T^aT^b$ (که به طور خودکار در امتداد هر ژئودزی‌ای ثابت است) با s تغییر نمی‌کند. چرا که X^a و T^a ، میدان‌های برداری مختصات‌داری هستند که با هم جابه‌جا می‌شوند

$$T^b \nabla_b X^a = X^b \nabla_b T^a. \quad (۹۴-۱)$$

بنابراین با در پیش گرفتن رهیافتی همانند معادله (۸۳-۱)، می‌بینیم که $X^a T_a$ در امتداد هر ژئودزی‌ای، ثابت است. اگر $\gamma_s(t)$ را با اضافه کردن یک ثابت (وابسته به s) به t ، دوباره پارامتری کنیم، می‌توانیم اطمینان حاصل کنیم که خم $C(s)$ دربرگیرنده نقاطی با $t = 0$ است که عمود به همه ژئودزی‌هاست. بنابراین با دوباره پارامتری کردن آفین $\gamma_s(t)$ در $t = 0$ داریم $X_a T^a = 0$ ، ازین رو در همه جا $X^a T_a = 0$ می‌باشد. کمیت $v^a = T^b \nabla_b X^a$ ، نرخ تغییر در امتداد یک ژئودزی، با جابه‌جایی بی‌نهایت کوچک به نزدیک ژئودزی را می‌دهد. بنابراین می‌توانیم v^a را به عنوان سرعت نسبی بی‌نهایت کوچک، نزدیک به ژئودزی‌ها بیان کنیم. همچنین می‌توانیم به این شکل، شتاب نسبی را در این خانواده تعریف کنیم

$$a^a = T^c \nabla_c v^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a). \quad (۹۵-۱)$$

حال باید معادله‌ای که a^a را به تانسور ریمان مربوط می‌سازد، بدست آوریم

$$\begin{aligned} a^a &= T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) = T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) \\ &= (T^c \nabla_c X^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a \\ &= (X^c \nabla_c T^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d. \end{aligned} \quad (۹۶-۱)$$

معادله فوق به معادله انحراف ژئودزی معروف است که آخرین ویژگی انحنا می‌باشد که به آن دست یافتیم [۲۰، ۲۱]. برای همه خانواده‌هایی از ژئودزی‌ها $a^a = 0$ است، اگر و تنها اگر $R_{cbd}{}^a = 0$ باشد. بنابراین، بعضی از ژئودزی‌ها با شتاب از یکدیگر دور یا به هم نزدیک می‌شوند اگر و تنها اگر $R_{cbd}{}^a \neq 0$.

۵-۱-۱ روش‌هایی برای محاسبه انحنا

در این بخش به محاسبه تانسور انحنا می‌پردازیم، چرا که برای حل معادله اینشتین به محاسبه انحنا نیازمندیم. دوروش برای انجام این محاسبه را در این بخش توضیح خواهیم داد: (۱) روش مولفه مختصات (۲) روش‌های پایه راست‌هنگار (تتراد^۱ یا چارتابی) [۲۲، ۲۳].

روش مولفه مختصات

برای انجام این محاسبه، ابتدا دستگاه مختصات را تعریف می‌کنیم. عملگر مشتق ∇_a را در این دستگاه مختصات به شکل ∂_a در نظر می‌گیریم و در مورد نماد کریستوفل Γ^c_{ab} نیز از معادله (۱-۴۶) استفاده می‌کنیم. اکنون برای یک میدان برداری دوگان w_a داریم

$$\nabla_b w_c = \partial_b w_c - \Gamma^d_{bc} w_d. \quad (۱-۹۷)$$

بنابراین

$$\nabla_a \nabla_b w_c = \partial_a (\partial_b w_c - \Gamma^d_{bc} w_d) - \Gamma^e_{ab} (\partial_e w_c - \Gamma^d_{ec} w_d) - \Gamma^e_{ac} (\partial_b w_e - \Gamma^d_{be} w_d). \quad (۱-۹۸)$$

ازین رو معادله (۱-۴۹) را می‌توانیم به شکل زیر نیز بازنویسی کنیم

$$R_{abc}{}^d w_d = [-2\partial_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^e_{c[a}\Gamma^d_{b]e}] w_d, \quad (۱-۹۹)$$

که در آن از جابه‌جایی مشتق‌های معمولی و همچنین تقارن موجود در Γ^a_{bc} استفاده کردیم. از آنجا که معادله فوق برای همه w_d صادق است، پس می‌توانیم آن را از طرفین رابطه حذف کنیم. بنابراین با گرفتن مولفه‌های تانسور ظاهر شده در رابطه فوق در پایه مختصات مربوط به کارت‌مان، به رابطه زیر دست خواهیم یافت

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}, \quad (۱-۱۰۰)$$

که در آن از تعریف عملگر مشتق معمولی به عنوان مشتق جزئی مولفه‌های مربوط به مختصات مان استفاده کردیم.

^۱Tetrad

بنابراین برای محاسبه R_{abc}^d از متریک g_{ab} شروع می‌کنیم. ابتدا مولفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ را در پایه مختصات به دست می‌آوریم و سپس نماد کریستوفل را طبق معادله (۱-۴۶) محاسبه می‌کنیم. با استفاده از معادله فوق نیز می‌توان انحنای ریچی را به شکل زیر نوشت

$$R_{\mu\rho} = R_{\mu\nu\rho}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}. \quad (1-101)$$

لازم به ذکر است که می‌توان مولفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ در پایه مختصات را بر اساس یک ماتریس نمایش داد. مولفه‌های معکوس متریک $g^{\mu\nu}$ را با معکوس کردن این ماتریس انجام می‌دهیم. همچنین می‌توان دترمینان متریک را به شکل زیر تعریف کرد

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (1-102)$$

سپس المان حجمی طبیعی بر روی $\mathcal{M}$ ، که از متریک $g_{\mu\nu}$ استخراج شده است را به شکل $\sqrt{|g|} dx^1 \cdots dx^n$ تعریف می‌کنیم.

حال برای نماد کریستوفل ادغام شده داریم

$$\Gamma_{a\mu}^a = \Gamma_{\nu\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}}. \quad (1-103)$$

با استفاده فرمول مربوط به ماتریس معکوس نیز می‌توانیم به رابطه زیر دست یابیم

$$g^{\nu\alpha} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}}. \quad (1-104)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\Gamma_{a\mu}^a = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln \sqrt{|g|}. \quad (1-105)$$

در نهایت با استفاده از معادله فوق، به دست می‌آوریم

$$\nabla_a T^a = \partial_a T^a + \Gamma_{ab}^a T^b = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{|g|} T^{\mu}). \quad (1-106)$$

روش‌های پایه مختصات، دارای این مزیت هستند که رهیافت مستقیم مکانیکی، برای محاسبه انحنا فراهم می‌کنند. از طرفی دیگر، حتی در ساده‌ترین موردها، انجام این محاسبات بسیار وقت‌گیراند و ذات غیر هندسی این محاسبات کار را برای فهمیدن خطاهای جبری دشوار می‌کنند.

روش‌های پایه راست‌هنگار (یا چارتایی)

یک پایه مختصات $\{\partial/\partial x^\mu\}$ تنها در صورتی می‌تواند پایه راست‌هنگار باشد که در فضا-زمان تخت دکارتی باشد. بنابراین یک غیر هولونومی^۱ یعنی یک غیر مختصه^۲، یک پایه راست‌هنگار میدان‌های برداری دوگان^۳ $(e_\mu)^a$ معرفی می‌کنیم که رابطه زیر را ارضا می‌کند

$$(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu}, \quad (107-1)$$

که در آن $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ می‌باشد. اندیس‌های یونانی μ و ν دارای برد $1, \dots, n$ می‌باشد و بردار پایه را برچسب می‌زنند و همچنین اندیس لاتین a نمادگذاری اندیسی معمولی است که نشان می‌دهد e_μ یک بردار است. در چهار بعد، بعضی اوقات به $\{(e_\mu)^a\}$ تتراد یا چارتایی می‌گویند. رابطه فوق معادله مفید زیر را نشان می‌دهد

$$\eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_a = \delta^a_b, \quad (108-1)$$

که در آن δ^a_b یک نگاشت همانی بر روی بردارهاست و $\eta^{\mu\nu}$ معکوس $\eta_{\mu\nu}$ می‌باشد. برای محاسبه انحنا از روش چارتایی، رهیافتی کاملاً جداگانه از روش قبل اتخاذ می‌کنیم. برای این کار باید به سه اجزای کلیدی اشاره کنیم: (۱) عملگر مشتق با متریک سازگار است یعنی $\nabla_a g_{bc} = 0$ (۲) عملگر مشتق بدون پیچش است. (۳) تانسور ریمان مرتبط با عملگر مشتقی است که با رابطه (۱-۴۹) داده می‌شود. در روش پایه مختصات، این سه اجزای گفته شده به ترتیب با معادلات (۱-۴۵)، (۱-۲۵) و (۱-۱۰۱) بیان شده‌اند. اجزای یکم و دوم، که در ادامه اشاره می‌کنیم، کاملاً به شیوه‌ای متفاوت از روش پایه مختصات نشان داده می‌شوند.

با تعریف هموستار تک-فرمی‌ها $w_{a\mu\nu}$ ،^۳ به شکل زیر شروع می‌کنیم

$$w_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b. \quad (109-1)$$

مولفه‌های $w_{\lambda\mu\nu}$ از $w_{a\mu\nu}$ به ضرایب دوران ریچی^۴ معروف‌اند و داریم

$$w_{\lambda\mu\nu} = (e_\lambda)^a (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b. \quad (110-1)$$

راست‌هنگاری $\{(e_\mu)^a\}$ نشان می‌دهد

$$w_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b = -(e_\nu)^b \nabla_a (e_\mu)_b = -w_{a\nu\mu}, \quad (111-1)$$

^۱ Nonholonomy ^۲ Noncoordinate ^۳ 1-forms ^۴ Ricci rotation coefficients

که در آن از شرط سازگاری با متریک $\nabla_a g_{bc} = 0$ ، استفاده کردیم. به طور معکوس، معادله فوق و معادله (۱۰۷-۱) نیز شرط $\nabla_a g_{bc} = 0$ را نشان می‌دهند. بنابراین در روش پایه راست‌هنجار، جز یکم به شکل زیر تعریف می‌شود

$$w_{a\mu\nu} = -w_{a\nu\mu}. \quad (۱۱۲-۱)$$

(توجه کنید که به طور معکوس، تقارن $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ نشأت گرفته از جز دوم است.) مقایسه پادتقارن ضرایب دوران ریچی با تقارن نماد کریستوفل این مزیت مهم را نشان می‌دهد که تعداد $n^2(n+1)/2$ مولفه از نماد کریستوفل $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ وجود دارد در حالی که تعداد $n^2(n-1)/2$ مولفه برای هموستار $w_{\lambda\mu\nu}$ ، جود دارد. تانسور ریمان را می‌توان با ضرایب دوران ریچی با استفاده از شیوه‌ای که در ادامه خواهیم گفت، بازنویسی کرد. مولفه‌های R_{abcd} در پایه راست‌هنجارمان به شکل زیر است

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{abcd}(e_\rho)^a(e_\sigma)^b(e_\mu)^c(e_\nu)^d = (e_\rho)^a(e_\sigma)^b(e_\mu)^c(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(e_\nu)_c. \quad (۱۱۳-۱)$$

اگرچه داریم

$$\begin{aligned} [\nabla_a(e_\mu)^c][\nabla_b(e_\nu)_c] &= [\nabla_a(e_\mu)^f]\delta^c_f[\nabla_b(e_\nu)_c] \\ &= \eta^{\alpha\beta}[\nabla_a(e_\mu)^f](e_\alpha)^c(e_\beta)_f[\nabla_b(e_\nu)_c]. \end{aligned} \quad (۱۱۴-۱)$$

بنابراین از تعریف هموستار تک-فرمی یعنی معادله (۱۱۰-۱) به دست می‌آوریم

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a(e_\sigma)^b\{\nabla_a w_{b\mu\nu} - \nabla_b w_{a\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta}[w_{a\beta\nu}w_{b\alpha\mu} - w_{b\beta\mu}w_{a\alpha\nu}]\}. \quad (۱۱۵-۱)$$

معادله فوق را می‌توان بر اساس ضرایب دوران ریچی نیز نوشت

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= (e_\rho)^a\nabla_a w_{\sigma\mu\nu} - (e_\sigma)^a\nabla_a w_{\rho\mu\nu} \\ &\quad - \eta^{\alpha\beta}\{w_{\rho\beta\nu}w_{\sigma\alpha\mu} - w_{\sigma\beta\mu}w_{\rho\alpha\nu} + w_{\rho\beta\nu}w_{\alpha\mu\nu} - w_{\sigma\beta\rho}w_{\alpha\mu\nu}\}, \end{aligned} \quad (۱۱۶-۱)$$

که در آن دو جمله آخر، فرض مولفه‌های $w_{a\mu\nu}$ داخل مشتق در دو جمله اول را جبران می‌کند. چرا که $w_{\sigma\mu\nu}$ یک اسکالر است و می‌توانیم عملگر مشتق ∇_a را با عملگر مشتق معمولی ∂_a جابه‌جا کنیم. بنابراین معادله فوق می‌تواند تانسور انحنا را بر اساس $w_{\sigma\mu\nu}$ نشان دهد. مولفه‌های تانسور ریچی را می‌توان با معادله زیر محاسبه کرد

$$R_{\rho\mu} = \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (۱۱۷-۱)$$

معادله (۱-۱۱۶) یا (۱-۱۱۷) به طور کامل جز سوم را توصیف می‌کند. بنابراین تنها جز دوم را باید در این رهیافت بیان کنیم. دو روش برای این کار وجود دارد: در روش اول، شرط بدون پیچش، به ما اجازه می‌دهد جابجاگر دو میدان برداری را به شکل عملگر مشتق ∇_a با معادله (۱-۱۸) بیان کنیم. بر خلاف آن، اگر معادله (۱-۱۸) برای همه میدان‌های برداری در یک پایه صادق باشد، شرط بدون پیچش عملگر مشتق ∇_a را نشان می‌دهد. بنابراین می‌توان جز دوم را با روابط جابه‌جایی میدان‌های بردار پایه به شکل زیر نوشت

$$(e_\sigma)_a [e_\mu, e_\nu]^a = (e_\sigma)_a \{ (e_\mu)^b \nabla_b (e_\nu)^a - (e_\nu)^b \nabla_b (e_\mu)^a \} = w_{\mu\sigma\nu} - w_{\nu\sigma\mu}, \quad (1-118)$$

که این منجر به $n^2(n-1)/2$ تعداد معادله برای حل $w_{\sigma\mu\nu}$ می‌شود.

یک روش دیگر این است که از تعریف هموستار تک-فرمی‌ها به شکل زیر استفاده کنیم

$$\nabla_{[a} (e_\sigma)_{b]} = \eta^{\mu\nu} (e_\mu)_{[a} w_{b]\sigma\nu}. \quad (1-119)$$

اگرچه شرط بدون پیچش نشان می‌دهد که مشتق پادمتقارن شده تک-فرمی، وابسته به عملگر مشتق است و بنابراین می‌تواند با مشتق معمولی ∂_a جایگزین شود

$$\partial_{[a} (e_\sigma)_{b]} = \eta^{\mu\nu} (e_\mu)_{[a} w_{b]\sigma\nu}. \quad (1-120)$$

به طور معکوس، صحت رابطه فوق برای همه بردارهای پایه نشان می‌دهد که ∇_a بدون پیچش است. بنابراین این معادله، بدیلی برای بیان جز دوم است.

با انداختن اندیس برداری دوگان a بر روی $w_{a\mu\nu}$ و همچنین نشان دادن فرم‌ها با حروف بزرگ پررنگ، داریم

$$\mathbf{w}_\nu^\mu = \eta^{\mu\sigma} \mathbf{w}_{\nu\sigma}. \quad (1-121)$$

برای حالتی که در آن تقارن داریم بهتر است از روش اول یعنی پایه مختصات استفاده کنیم. بنابراین در این بخش نیز به دو روش گفته شده، توانستیم تانسور انحنا را محاسبه کنیم که این امری ضروری برای پرداختن به معادلات اینشتین است.

۲-۱ صورت‌بندی لاگرانژی در نسبیت عام و مفهوم کنش

ابتدا به مفهوم صورت‌بندی لاگرانژی در نظریه میدان می‌پردازیم [۱۲، ۲۴]. فرض می‌کنیم، نظریه‌ای داریم شامل یک میدان تانسوری (یا دسته‌ای از میدان‌های تانسوری) که بر روی منیفلد $\mathcal{M}$ تعریف شده‌اند. در

این حالت، تمامی اندیس‌ها را کنار می‌گذاریم و این میدان (یا میدان‌ها) را با ψ نمایش می‌دهیم. حال $S[\psi]$ را تابعی یا تابعی‌ای^۱ از میدان ψ قرار می‌دهیم به این معنی که S نگاشتی از پیکربندی‌های میدان به اعداد، بر روی منیلفد $\mathcal{M}$ می‌باشد [۲۵]. همچنین فرض می‌کنیم که ψ_λ خانواده تک-پارامتری هموار شروع شونده از ψ می‌باشد که شرایط مرزی مناسبی را ارضا می‌کند. بنابراین $\frac{d\psi_\lambda}{d\lambda}|_{\lambda=0}$ را با $\delta\psi$ مشخص می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم که $dS/d\lambda$ در $\lambda = 0$ ، برای تمام خانواده‌های تک-پارامتری شروع شونده از ψ ، وجود داشته باشد. بعلاوه آن، فرض می‌کنیم که یک میدان تانسوری هموار χ (که دوگان میدان ψ است به این معنی که اگر ψ میدان تانسوری از نوع (k, l) باشد، آنگاه χ از نوع (l, k) خواهد بود) وجود دارد به قسمی که به ازای چنین خانواده‌هایی داریم

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_{\mathcal{M}} \chi \delta\psi, \quad (122-1)$$

که در آن ادغام همه اندیس‌ها در انتگرال (۱۲۲-۱) تعریف شده است. ازین رو S را مشتق‌پذیر تابعی^۲ در ψ می‌گوییم و χ را مشتق تابعی^۳ از S می‌نامیم و آن را به شکل زیر نشان می‌دهیم

$$\chi = \left. \frac{\delta S}{\delta\psi} \right|_{\psi}. \quad (123-1)$$

حال تابع S را اینگونه تعریف می‌کنیم [۲۵، ۲۶]

$$S[\psi] = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[\psi], \quad (124-1)$$

که در آن $\mathcal{L}$ تابع موضعی از ψ با مشتق‌های متناهی از آن است، یعنی

$$\mathcal{L}|_x = \mathcal{L}(\psi(x), \nabla\psi(x), \dots, \nabla^k\psi(x)). \quad (125-1)$$

حال فرض بر این است که S مشتق‌پذیر تابعی باشد و آن دسته از پیکربندی‌های میدان ψ که S را بیشینه می‌کنند، به طور دقیق، حل‌های معادله میدان برای ψ می‌باشند

$$\left. \frac{\delta S}{\delta\psi} \right|_{\psi} = 0. \quad (126-1)$$

در این صورت S را کنش^۴ و $\mathcal{L}$ را چگالی لاگرانژی^۵ می‌نامیم و در واقع، مشخصه $\mathcal{L}$ همان صورت‌بندی لاگرانژی نظریه میدان است. صورت‌بندی لاگرانژی در نظریه میدان، مشابه با مکانیک ذرات کلاسیک

^۱ Functional^۲ Functionally differentiable^۳ بطور کلی‌تر، اگر یک توزیع تانسوری χ وجود داشته باشد به قسمی که $\left. \frac{dS}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \chi[\delta\psi]$ آنگاه می‌گوییم که S مشتق‌پذیر تابعی است و χ را به عنوان مشتق تابعی S در ψ تعریف می‌کنیم. ^۴ Action^۵ Lagrangian density

است. در مکانیک ذرات معمولی، تابع کنش، مسیر ذره را به عنوان انتگرالی از تابع لاگرانژی بر روی ذره در نظر می‌گیرد [۲۷]. مسئله مهم وردش‌گیری، مطابق با معادله (۱-۱۲۶) به‌طور دقیق، نشأت گرفته از دو مورد است: (۱) تمرکز بر مسیرهایی با طول متناهی و (۲) بیشینه کردن کنش نسبت به مسیرهای متفاوتی که دارای نقاط انتهایی ثابت هستند. برای آن که مسئله وردش‌گیری مان را در این مورد دقیق‌تر کنیم، تمرکزمان را بر روی ناحیه فشرده U از منیفلد M جلب می‌کنیم و خانواده‌های تک-پارامتری ψ_λ را در نظر خواهیم گرفت که در آن مقدار ψ بر روی مرز U ثابت می‌باشد.

به عنوان یک مثال ساده، به صورت‌بندی لاگرانژی در نظریه میدان اسکالر کلاین-گوردون ϕ ^۱ در فضا-زمان خمیده نگاه می‌اندازیم [۲۸، ۲۹]. این چگالی لاگرانژی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{4}(\partial_a \phi \partial^a \phi + m^2 \phi^2). \quad (1-127)$$

بنابراین از رابطه فوق به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS_{KG}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} &= - \int [\partial_a \phi \cdot \partial^a (\delta \phi) + m^2 \phi \cdot (\delta \phi)] \\ &= \int [\partial_a \partial^a \phi \cdot + m^2 \phi \cdot] (\delta \phi), \end{aligned} \quad (1-128)$$

که در آن المان حجم طبیعی در فضا-زمان مینکوفسکی^۲ از قبل در انتگرال تعریف شده است و جمله مرزی در انتگرال‌گیری جز به جز، سهمی در شرط مرزی مان بر روی ϕ_λ ندارد که در آن بر روی مرز $\delta \phi = 0$ است. ازین رو S_{KG} مشتق‌پذیر تابعی است و داریم

$$\frac{\delta S_{KG}}{\delta \phi} = \partial_a \partial^a \phi + m^2 \phi. \quad (1-129)$$

رابطه فوق به معادله کلاین-گوردون^۳ معروف است. حال به عنوان مثالی دیگر به چگالی لاگرانژی برای معادلات ماکسول^۴ در فضا-زمان خمیده می‌پردازیم [۳۰]

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} = -\partial_{[a}A_{b]} \partial^{[a}A^{b]}, \quad (1-130)$$

که در آن A_a متغیر میدان می‌باشد. بنابراین معادلات (۱-۱۲۷) و (۱-۱۳۰) به عنوان نقطه شروعی برای مطالعه میدان‌های کلاین-گوردون و ماکسول در نظر گرفته می‌شوند. در واقع می‌توان با انتخاب توابع اسکالر طبیعی و ساده $\mathcal{L}_{EM}$ و $\mathcal{L}_{KG}$ از طریق معادله (۱-۱۲۶) به معادلات میدان دست یافت.

^۱ Klein-Gordon scalar field ^۲ Minkowskian spacetime ^۳ Klein-Gordon equation ^۴ Maxwell equations

برای نسبیت عام، متغیر میدان، متریک فضا-زمان g_{ab} است که بر روی منیفلد $\mathcal{M}$ تعریف شده است. در این بحث، یک نتیجه کمی نگران کننده که در ابتدا باید به حل آن پردازیم این است که المان حجم طبیعی در انتگرال (۱-۱۲۲) و (۱-۱۲۴)، المان حجمی ϵ_{abcd} است که از متریک g_{ab} با شرط $\epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n!$ تعیین شده است. (که در آن s ، تعداد منفی‌های موجود در علامت متریک g_{ab} است، یعنی اگر $s = 0$ باشد متریک، ریمانی بوده و در حالت $s = 1$ متریک، لورنتسی می‌باشد.) المان حجمی، خود به تنهایی بستگی به متغیر میدان دارد و ازین رو وردش‌گیری، زمانی به حساب می‌آید که مشتقات تابعی، محاسبه شوند. یکی از راه‌ها برای هموار کردن این موضوع، تعریف $\mathcal{L}$ است که به جای یک اسکالر باید یک تانسور ۴-اندیس پادمقارن در نظر گرفت تا به عنوان المان حجم در $\mathcal{L}$ بکار رود. این موضوع ما را موجب می‌کند که یک تصحیح مشابه از تعریف مشتق‌های تابعی ارائه دهیم ولی برای سهولت، از رهیافت دیگری استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم المان حجم ثابت $e_{abcd} = e_{[abcd]}$ بر روی منیفلد $\mathcal{M}$ وجود دارد و همه انتگرال‌های بر روی $\mathcal{M}$ باید نسبت به e_{abcd} تعریف شوند و نه ϵ_{abcd} . برای انجام این کار، یک دستگاه مختصات انتخاب می‌کنیم و e_{abcd} را به عنوان المان حجمی مختصات مربوطه در نظر می‌گیریم. اما تاکید می‌کنیم که الزامی به معرفی دستگاه مختصات نداریم. از این نکته سود می‌جوییم و این گزاره را مطرح می‌کنیم که دو المان حجمی در هر نقطه‌ای، تنها با یک ضریب اسکالر به هم مربوط می‌شوند. (یا با یکدیگر اختلاف دارند.) بنابراین داریم

$$\epsilon_{abcd} = f e_{abcd}. \quad (1-131)$$

در هر پایه‌ای که مولفه‌های غیر صفر e_{abcd} مقدار ± 1 باشند، محاسبات نشان می‌دهد که ضریب اسکالر باید برابر با $f = \sqrt{-g}$ باشد که در آن g همان دترمینان مولفه‌های ماتریس g_{ab} در آن پایه می‌باشد

$$\epsilon_{12 \dots n} = [(-1)^s \det(g_{ab})]^{\frac{1}{n}} = \sqrt{|g|}. \quad (1-132)$$

حال با المان حجمی e_{abcd} معین بر روی منیفلد $\mathcal{M}$ ، چگالی تانسوری $T^{a \dots b}_{c \dots d}$ را یک تانسور تعریف می‌کنیم که به شکل زیر نوشته می‌شود

$$T^{a \dots b}_{c \dots d} = \sqrt{-g} \tilde{T}^{a \dots b}_{c \dots d}, \quad (1-133)$$

که در آن $\tilde{T}^{a \dots b}_{c \dots d}$ یک تانسور است که مقدار آن به انتخاب e_{abcd} بستگی ندارد. برای آن که کنش S در نسبیت عام مستقل از e_{abcd} باشد، لازم است که چگالی لاگرانژی $\mathcal{L}$ ، چگالی اسکالری یا عددی^۱ باشد.

به‌طور مشابه برای اینکه $\frac{dS}{d\lambda}$ نیز مستقل از e_{abcd} باشد، باید مشتق‌های تابعی S نیز چگالی‌های تانسوری باشند.

حال نشان خواهیم داد که چگالی عددی زیر، یک چگالی لاگرانژی برای معادله میدان اینشتین در خلا است [۳۱]

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R. \quad (۱۳۴-۱)$$

کنش مربوط به چگالی لاگرانژی (۱۳۴-۱) در واقع به شکل زیر بوده که به کنش هیلبرت^۱ معروف است

$$S[g^{ab}] = \int \mathcal{L}_G e, \quad (۱۳۵-۱)$$

که در آن فرم دیفرانسیلی e برای تاکید بر استفاده از این المان حجمی اتخاذ شده است [۲۳]. به همین شکل برای سهولت بیشتر از متریک معکوس g^{ab} به جای g_{ab} به عنوان متغیر میدان استفاده می‌کنیم و برای وردش‌گیری تک-پارامتری δg^{ab} را به شکل $\frac{dg^{ab}}{d\lambda}$ تعریف می‌کنیم. ازین رو خاطر نشان می‌کنیم که چون $g^{ac}g_{cb} = \delta_b^a$ است، پس داریم $\delta g_{ab} = -g_{ac}g_{bd}\delta g^{cd}$. به این معنی است که برای این بخش، از متریک مختل نشده برای بالا یا پائین بردن اندیس‌های متریک اختلالی استفاده کردیم.

توجه کنید که چون g^{ab} و همینطور δg^{ab} متقارن‌اند، پس می‌توان تانسور پادمقارنی با هر مشتق تابعی نسبیت به g^{ab} اضافه کرد که هیچ تاثیری بر معادله (۱۲۲-۱) نگذارد. برای حذف این موضوع احتیاج است که این دست از مشتق‌های تابعی، متقارن باشند. برای خانواده تک-پارامتری شروع شونده از g^{ab} داریم

$$\frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} = \sqrt{-g}(\delta R_{ab})g^{ab} + \sqrt{-g}R_{ab}(\delta g^{ab}) + R(\delta\sqrt{-g}). \quad (۱۳۶-۱)$$

و در ادامه از معادله زیر استفاده کرده و داریم

$$\cdot = \dot{R}_{ac} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot g^{bd} \cdot \nabla_a \cdot \nabla_c \tilde{g}_{bd} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot g^{bd} \cdot \nabla_b \cdot \nabla_d \tilde{g}_{ac} + \cdot g^{bd} \cdot \nabla_b \cdot \nabla_{(c} \tilde{g}_{a)d}, \quad (۱۳۷-۱)$$

که در آن $\tilde{g}_{ab} = \frac{dg_{ab}}{d\lambda}|_{\lambda=}$ می‌باشد. در ادامه با استفاده از معادله (۱۳۷-۱) به دست خواهیم آورد

$$g^{ab}\delta R_{ab} = \nabla^a v_a, \quad (۱۳۸-۱)$$

که در آن

$$v_a = \nabla^b(\delta g_{ab}) - g^{cd}\nabla_a(\delta g_{cd}). \quad (۱۳۹-۱)$$

به‌علاوه با استفاده از معادله زیر

$$\text{tr} \left[\frac{dA}{d\tau} A^{-1} \right] = \frac{1}{\det A} \frac{d}{d\tau} (\det A), \quad (140-1)$$

داریم

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{4} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (141-1)$$

بنابراین به دست می‌آوریم

$$\frac{dS_G}{d\lambda} = \int \frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} e = \int \nabla^a v_a \sqrt{-g} e + \int (R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}) \delta g^{ab} \sqrt{-g} e. \quad (142-1)$$

در رابطه فوق جمله اول یعنی دیورژانس $\nabla^a v_a$ ، نسبت به المان حجم طبیعی $\epsilon = \sqrt{-g} e$ می‌باشد. ازین رو با قضیه استوکس^۱، این انتگرال تنها در یک جمله مرزی سهیم است. در واقع این جمله به دلیل وردش‌گیری کلی‌ای که در آن g^{ab} بر روی مرز ثابت می‌باشد، صفر نمی‌شود. در حالتی این جمله صفر است که مشتق‌های مرتبه اول g^{ab} نیز بر روی مرز ثابت باشند. اکنون این سهم را نادیده گرفته و در انتهای این بخش به محاسبه کامل آن می‌پردازیم.

بنابراین با کنار گذاشتن جمله مرزی، رابطه

$$\frac{\delta S_G}{\delta g^{ab}} = \sqrt{-g} (R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}), \quad (143-1)$$

و معادله (۱۲۶-۱)، هم‌ارز با معادله میدان اینشتین در خلا هستند. بنابراین از دیدگاه لاگرانژی، معادله اینشتین از یک راه بدیهی به دست می‌آید چرا که چگالی لاگرانژی معادله (۱۳۴-۱)، یکی از ساده‌ترین چگالی عددی‌ست که می‌توان از متریک فضا-زمان ساخت. یک نکته قابل توجه آن است که می‌توان به جای در نظر گرفتن متریک به تنهایی به عنوان متغیر میدان برای نسبیت عام، از متریک و عملگر مشتق ∇_a به عنوان متغیرهای مستقل میدان استفاده کرد. قابل ذکر است که اگر از چگالی لاگرانژی (۱۳۴-۱) استفاده کنیم ولی با این تفاوت که R_{ab} را تنها به عنوان تابعی از عملگر مشتق (یعنی مستقل از متریک g_{ab}) در نظر بگیریم و بعد، از کنش پالاتینی^۲ نسبت به g_{ab} و ∇_a وردش بگیریم یعنی

$$S[g^{ab}, \nabla_a] = \int \sqrt{-g} R_{ab} g^{ab} e, \quad (144-1)$$

درمی‌یابیم که معادله اینشتین (۱۴۳-۱) و شرط سازگاری با متریک یعنی $\nabla_a g^{ab} = 0$ هر دو بر روی عملگر مشتق وجود دارند. برای اثبات این گزاره چون عملگر مشتق ∇_a می‌تواند با استفاده از جملات

^۱ Stokes' theorem ^۲ Palatini action

ثابت دلخواهی از عملگر مشتق $\tilde{\nabla}_a$ و یک میدان تانسوری C^c_{ab} تعریف شود، وردش‌گیری از ∇_a هم‌ارز با وردش‌گیری از C^c_{ab} می‌باشد. با در نظر گرفتن وردش‌گیری تک-پارامتری از g^{ab} و ∇_a ، مناسب است که $\tilde{\nabla}_a$ را به عنوان عملگر مشتق سازگار با متریک g^{ab} در $\lambda = 0$ در نظر بگیریم. حال تفاوت عمده این حالت با وردش‌گیری که در قبل انجام دادیم در این است که به جای استفاده از معادله $\dot{R}_{ac} = -2 \cdot \nabla_{[a} \cdot C^b_{b]c}$ از معادله (۱-۱۳۷) برای محاسبه مقدار δR_{ab} استفاده می‌کنیم. در $\lambda = 0$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_G}{\delta g^{ab}} &= -2 \int g^{ab} \nabla_{[a} \delta C^c_{c]b} \sqrt{-g} e + \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} e \\ &= -2 \int g^{ab} \tilde{\nabla}_{[a} \delta C^c_{c]b} \sqrt{-g} e + \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} e \\ &\quad + \int g^{ab} [C^d_{ab} \delta C^c_{cd} + C^c_{cd} \delta C^d_{ab} - 2 C^d_{cb} \delta C^c_{ad}] \sqrt{-g} e \\ &= \int [C^d_{ab} \delta^a_c + C^d_{dc} g^{ab} - 2 C^b_a{}^a] \delta C^c_{ab} \sqrt{-g} e \\ &\quad + \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} e. \end{aligned} \quad (1-145)$$

اولین جمله در طرف راست معادله در خط دوم با استفاده از قضیه استوکس، چون $\tilde{\nabla}_a$ عملگر مشتق سازگار با متریک است، صفر می‌شود. (در این مورد هیچ جمله مرزی نداریم چرا که احتیاجی به صفر شدن δC^c_{ab} در مرز نداریم.) برای صفر کردن $\frac{\delta S_G}{\delta C^c_{ab}}$ لازم است که جمله موجود در براکت‌ها در آخرین تساوی معادله (۱-۱۴۵)، وقتی که اندیس‌های a و b متقارن‌اند، صفر شود. با کمی محاسبات جبری می‌بینیم که $C^c_{ab} = 0$ بوده و این به معنی $\nabla_a = \tilde{\nabla}_a$ است. در پایان، با صفر کردن $\frac{\delta S_G}{\delta g^{ab}}$ مثل قبل به معادله اینشتین می‌رسیم.

حال باید به دنبال رهیافتی برای محاسبه معادله اینشتین بدون در نظر گرفتن خلا، با میدان‌های ماده باشیم. برای این کار ابتدا باید به دنبال چگالی لاگرانژی مناسب برای تعریف میدان‌های ماده در فضا-زمان خمیده باشیم. برای یافتن معادلات میدان جفت شده اینشتین-ماده، چگالی لاگرانژی کل $\mathcal{L}$ را باید به صورت حاصل جمع دو چگالی لاگرانژی اینشتین $\mathcal{L}_G$ و ماده $\mathcal{L}_m$ به شکل زیر در نظر بگیریم

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \alpha_m \mathcal{L}_m, \quad (1-146)$$

که در آن α_m یک ثابت است. چون چگالی لاگرانژی $\mathcal{L}_G$ مستقل از میدان ماده می‌باشد بنابراین وردش‌گیری نسبت به آن منجر به همان معادله اینشتین می‌شود. حال با وردش‌گیری از کنش کلی S نسبت به متریک g^{ab} به معادله زیر دست می‌یابیم [۲۱]

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \Lambda \pi T_{ab}, \quad (1-147)$$

که در آن تانسور انرژی-تکانه T_{ab} ^۱ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$T_{ab} = -\frac{\alpha_m}{\lambda\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{ab}}. \quad (۱۴۸-۱)$$

باید دقت کنیم که اگر در چگالی لاگرانژی (۱-۱۴۶)، $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{KG}$ و $\alpha_{KG} = 16\pi$ باشند به معادلات جفت شده اینشتین-کلاین-گوردون می‌رسیم و همینطور اگر داشته باشیم $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{EM}$ و $\alpha_{EM} = 4$ ، آنگاه به معادلات اینشتین-ماکسول دست خواهیم یافت. به طور کلی تر می‌توان گفت که اگر چگالی لاگرانژی $\mathcal{L}_m$ را به عنوان نقطه شروع در تعریف نظریه میدان ماده در نظر بگیریم آنگاه معادله (۱-۱۴۸) را می‌توان به عنوان تعریف تانسور انرژی-تکانه آن میدان در نظر گرفت. اگر چگالی لاگرانژی برای میدان ماده بستگی به انتخاب عملگر مشتق ∇_a نداشته باشد، آنگاه معادلات اینشتین-ماده می‌توانند از وردش‌گیری جمع کنش پالاتینی و کنش ماده بدست آیند.

کنش ماده S_m باید تحت نگاشت‌های هموارریخت^۲، ناورد باشد یعنی اگر $f_\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ یک خانواده تک-پارامتری از هموارریخت‌ها باشد، آنگاه داریم $f_\lambda^*[g^{ab}, \psi] = S_m[f_\lambda^*g^{ab}, f_\lambda^*\psi]$ که در آن f_λ^* یک ضریب همدیس است. (در بخش ۳-۱-۱ به تفصیل، تبدلات همدیس را بررسی خواهیم کرد.) ازین رو برای این دست از وردش‌گیری‌ها داریم

$$\bullet = \frac{dS_m}{d\lambda} = \int \frac{\delta S_m}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \int \frac{\delta S_m}{\delta \psi} \delta \psi. \quad (۱۴۹-۱)$$

یادآوری می‌کنیم که برای چنین وردش‌گیری‌هایی، δg^{ab} دارای شکل عمومی $\delta g^{ab} = 2\nabla^{(a} w^{b)}$ می‌باشد که در آن w^a یک میدان برداری دلخواه است. حال فرض کنید که ψ معادلات میدان ماده را ارضا کند، آنگاه $\bullet = \left. \frac{\delta S_m}{\delta \psi} \right|_\psi = 0$ است و جمله دوم در معادله (۱-۱۴۹) نیز هیچ سهمی ندارد. بنابراین با استفاده از تعریف (۱-۱۴۸)، درمی‌یابیم که اگر ψ معادلات میدان ماده را ارضا کند آنگاه برای هر میدان برداری w_a همواری از تکیه‌گاه فشرده^۳ داریم

$$\bullet = \int \sqrt{-g} T_{ab} \nabla^{(a} w^{b)} \epsilon = \int T_{ab} \nabla^a w^b \epsilon = - \int (\nabla^a T_{ab}) w^b \epsilon, \quad (۱۵۰-۱)$$

که نشان می‌دهد

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (۱۵۱-۱)$$

بنابراین برای کنش هموارریختی که ناورد می‌باشد، T_{ab} همیشه به واسطه اثر معادله میدان ماده، پایسته می‌ماند [۳۲، ۳۳]. در واقع این گزاره، بیان T_{ab} به عنوان تانسور انرژی-تکانه میدان ماده را تقویت می‌کند.

باید خاطر نشان کرد که با اعمال گزاره فوق بر S_G (مستقل از هر معادله میدان)، بر می‌آید که

$$\nabla^a G_{ab} = 0. \quad (۱۵۲-۱)$$

بنابراین در صورت‌بندی لاگرانژی نسبیت عام، اتحاد بیانکی ادغام شده را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از ناوردایی کنش هیلبرت تحت نگاشت هموارریخت در نظر گرفت.

در فضا-زمان مینکوفسکی $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ ، یک رهیافت دیگر نیز برای تعریف تانسور تنش-انرژی^۱ وجود دارد که مرتبط با میدان ψ شروع شونده از لاگرانژی $\mathcal{L}$ است. برای سادگی در این بخش، $\mathcal{L}$ را تابع موضعی‌ای از η_{ab} ، ψ و $\partial_a \psi$ در نظر می‌گیریم. (البته به جز مشتق‌های مرتبه بالاتر از ψ). آنگاه معادله حرکت برای ψ برابر است با

$$\bullet = \frac{\delta S}{\delta \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \psi)} \right], \quad (۱۵۳-۱)$$

که در این مورد ψ یک میدان اسکالر است. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \psi)}$ به این معنی است که میدان برداری v^a در هر نقطه‌ای از x رابطه زیر را به ازای همه وردش‌گیری‌های تک-پارامتری همواری از ψ ارضا می‌کند، که در آن x ثابت بوده و مقدار همه کمیت‌ها به جز $\partial_a \psi$ ، بستگی به $\mathcal{L}$ دارند (مولفه‌های v^a در یک پایه، تنها مشتق‌های جزئی $\mathcal{L}$ نسبت به پایه دوگان متناظر با مولفه‌های $\partial_a \psi$ هستند).

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = v^a \delta(\partial_a \psi). \quad (۱۵۴-۱)$$

اگر ψ یک تانسور نوع (k, l) باشد، آنگاه $v^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \psi)}$ یک تانسور نوع $(l+1, k)$ خواهد بود که ادغام بر روی اندیس‌های آن در معادله (۱۵۴-۱) کاملاً تعریف شده است. مشتق‌های جزئی $\mathcal{L}$ نسبت به متغیرهای تانسوری دیگر هم به‌طور مشابه تعریف شده‌اند. برای یک خانواده تک-پارامتری هموار دلخواه $(\psi_\lambda, (\eta_\lambda)_{ab})$ از میدان‌های ψ_λ و متریک‌های تخت $(\eta_\lambda)_{ab}$ داریم

$$\delta \mathcal{L} \equiv \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \psi)} \delta (\partial_a \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{ab}} \delta \eta_{ab}, \quad (۱۵۵-۱)$$

هیچ شرایط مرزی‌ای بر روی کمیت‌های وردش یافته در معادله فوق نداریم. حال فرض می‌کنیم که اگر وردش‌گیری‌های $\mathcal{L}$ به‌واسطه خانواده تک-پارامتری از هموارریخت‌ها که از میدان‌های برداری ξ تولید شده‌اند، بدست آمده باشند آنگاه معادله (۱۵۵-۱) به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$\delta \mathcal{L} = \mathfrak{L}_\xi \mathcal{L} = \xi_a \partial_a \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \mathfrak{L}_\xi \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \psi)} \mathfrak{L}_\xi \partial_a \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{ab} \mathfrak{L}_\xi \eta_{ab}}, \quad (۱۵۶-۱)$$

که در آن ξ^a میدان کیلینگ^۱ است. آنگاه جمله آخر در معادله (۱-۱۵۶) صفر شده و در جمله دوم داریم $\mathcal{L}_\xi \partial_a \psi = \partial_a (\mathcal{L}_\xi \psi)$. در نهایت با استفاده از معادله (۱-۱۵۳) و جایگذاری آن برای $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$ ، به دست می‌آوریم

$$\partial_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \psi)} \mathcal{L}_\xi \psi - \xi^a \mathcal{L} \right] = 0. \quad (1-157)$$

این نتیجه به عنوان قضیه نوتر^۲ شناخته می‌شود که به گروه پوانکاره‌ای^۳ از تقارن‌ها اعمال شده است [۳۴، ۳۵]. به طور مشخص، صحت معادله (۱-۱۵۷) برای همه میدان‌های کیلینگ انتقالی، نشان می‌دهد که تانسور

$$S^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \psi)} \partial^b \psi - g^{ab} \mathcal{L}, \quad (1-158)$$

به عنوان یک تانسور انرژی-تکانه کانونی، پایسته می‌ماند یعنی $\partial_a S^{ab} = 0$. این کمیتی است که به طور طبیعی در طرف راست معادله (۱-۱۴۷) در صورت‌بندی لاگرانژی معادلات میدان اینشتین-ماده ظاهر می‌شوند.

در انتهای این بخش، به محاسبه شرط مرزی موجود در وردش‌گیری از کنش هیلبرت (۱-۱۴۲) می‌پردازیم. باید دقت کنیم که در این بخش δg^{ab} باید بر روی مرز صفر شود ولی هیچ شروطی بر روی مشتقات δg^{ab} وجود ندارند، بنابراین در این بخش به حل این مشکل می‌پردازیم و داریم

$$\int_U \nabla_a v^a \epsilon = \int_{\tilde{U}} v_a n^a, \quad (1-159)$$

که در آن n^a یک واحد^۴ عمود بر مرز $\tilde{U}$ می‌باشد (که فرض می‌شود غیر پوچ باشد) و همچنین المان حجم طبیعی بر روی $\tilde{U}$ نیز تعریف شده است.

با استفاده از معادله (۱-۱۳۹) بر روی مرز $\tilde{U}$ داریم

$$\begin{aligned} v_a n^a &= n^a g^{bc} [\nabla_c (\delta g_{ab}) - \nabla_a (\delta g_{bc})] = n^a h^{bc} [\nabla_c (\delta g_{ab} + \nabla_a (\delta g_{bc}))] \\ &= -n^a h^{bc} \nabla_a (\delta g_{bc}), \end{aligned} \quad (1-160)$$

که در آن $h_{ab} = g_{ab} \pm n_a n_b$ ، متریک کاهیده^۵ بر روی $\tilde{U}$ است و داریم $h^{bc} \nabla_c (\delta g_{ab}) = 0$ ، چرا که بر روی مرز $\tilde{U}$ ، $\delta g_{ab} = 0$ می‌شود. اگرچه طرف راست معادله (۱-۱۶۰) مرتبط با وردش‌گیری از رد^۶ انحنا^۶ خارجی مرز است. بنابراین داریم

$$K \equiv K_a^a = h_b^a \nabla_a n^b, \quad (1-161)$$

^۱ Killing field ^۲ Noether's theorem ^۳ Poincaré group ^۴ Unit ^۵ Induced metric ^۶ Trace

و ازین رو به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\delta K &= h_b^a (\delta C)^b_{ac} n^c \\ &= \frac{1}{4} n^c h_b^a g^{bd} [\nabla_a (\delta g_{cd}) + \nabla_c (\delta g_{ad}) - \nabla_d (\delta g_{ac})] \\ &= \frac{1}{4} n^c h^{ad} \nabla_c (\delta g_{ad}).\end{aligned}\quad (162-1)$$

بنابراین تحت وردش‌گیری نسبت به متریک که برای آن روی مرز $\dot{U}$ ، $\delta g_{ab} = 0$ است، از معادلات (۱۴۲-۱)، (۱۶۰-۱) و (۱۶۲-۱) خواهیم داشت

$$\frac{dS_G}{d\lambda} = -2 \int_{\dot{U}} \delta K + \int_U G_{ab} \delta g^{ab} \epsilon. \quad (163-1)$$

در واقع، معادله (۱۶۳-۱) تا جایی صادق است که اجازه وردش‌گیری از g^{ab} را تنها وقتی که متریک کاهیده بر روی مرز ثابت باشد، $\delta h_{ab} = 0$ داشته باشیم.

این گزاره می‌تواند اینطور استنتاج شود که اگر بر روی مرز $\delta h_{ab} = 0$ باشد، می‌توانیم تبدیلات پیمانه‌ای^۱ به شکل $\nabla_{(a} l_{b)}$ با $l_b = 0$ بر روی مرز پیدا کنیم که باعث شود $\delta g_{ab} = 0$ باشد [۳۶]. چون معادله (۱۶۳-۱) برای همه وردش‌گیری‌ها بر روی مرز $\dot{U}$ با $\delta g_{ab} = 0$ صادق است و چون همه جملات معادله (۱۶۳-۱) تحت چنین تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا هستند، این معادله برای وردش‌گیری‌هایی که در آن $\delta h_{ab} = 0$ را ارضا می‌کنند نیز صادق می‌باشد.

بنابراین، بیشینه‌سازی کنش S_G نسبت به وردش‌گیری با $\delta g_{ab} = 0$ یا $\delta h_{ab} = 0$ بر روی مرز، شامل یک جمله ناخواسته اضافی می‌شود. اگرچه این جمله را می‌توان با تصحیح S_G هموار کرد. برای این کار تعریف می‌کنیم

$$S'_G = S_G + 2 \int_{\dot{U}} K. \quad (164-1)$$

آنگاه بیشینه‌سازی S'_G منجر به نتیجه باب میل مان می‌شود، چون وردش‌گیری از جمله مرزی در معادله (۱۶۴-۱)، جمله مرزی در معادله (۱۶۳-۱) را حذف می‌کند. بنابراین وقتی جملات مرزی را لحاظ می‌کنیم، S'_G کنش مناسبی برای نسبیت عام است.

^۱ Gauge transformations

۳-۱ رهیافت وردشی برای بدست آوردن معادلات میدان

همانطور که در بخش ۱-۲ به مبانی کنش و وردش‌گیری از آن، برای رسیدن به معادلات میدان پرداختیم، حال به طور کامل‌تر و به تفصیل به محاسبه کنش هیلبرت-اینشتین می‌پردازیم. عموماً برای بدست آوردن معادلات میدان از طریق کمینه کردن کنش، دو رهیافت کلی وجود دارد: (۱) رهیافت متریکی (۲) و رهیافت پالاتینی [۳۷، ۳۸].

۱-۳-۱ رهیافت متریکی

از نظر تاریخی، استدلال و منطق اصلی برای بدست آوردن معادلات میدان اینشتین، توسط خود وی ارائه شد ولی به طور همزمان، هیلبرت نیز بر روی بدست آوردن معادلات میدان نسبت عام کار کرد و برای اولین بار، هیلبرت، نتایج درست خود را قبل از انتشار مقاله اینشتین به چاپ رسانید. وی عقیده داشت که تمامی نظریات در ریاضیات و فیزیک باید از مجموعه‌ای از اصول موضوعه^۱، استنتاج شود [۳۹]. این گزاره سهم بزرگی در روشن‌سازی ساختار منطقی نظریات فیزیک داشت. اگرچه توجیه فیزیکی بعضی از اصول موضوعه^۲ با نقص مواجه است.

برای نظریه گرانش، داوید هیلبرت، اصل وردش‌گیری را مبنای کار خود قرار داد و از سه اصل موضوع زیر برای استنتاج کار خود استفاده کرد: (۱) معادلات میدان گرانشی باید از اصل وردش‌گیری تبعیت کنند و متغیرهای مستقل انتگرال کنش نیز باید مولفه‌های تانسور متریک باشند. (۲) تابع کنش باید اسکالر باشد. (۳) معادلات اویلر-لاگرانژ^۳ (یعنی معادلات میدان)، باید از معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم در متریک g_{ab} تبعیت کنند [۳۹].

قابل ذکر است که حول این اصول موضوعه سؤالاتی شکل گرفته است که به آن‌ها می‌پردازیم. به عنوان مثال برای اصل اول این سؤالات مطرح شده است: (۱) بیان هندسی و فیزیکی تابع کنش چیست؟ (۲) معنی هندسی و فیزیکی فرینه^۴ به دست آمده از معادلات اویلر-لاگرانژ چیست؟ (۳) چرا معادلات میدان گرانشی باید هم‌ارز با فرینه بعضی از کمیت‌های محض باشند؟

اصل موضوع دوم نیز با این مشاهده توجیه می‌شود که اگر یک انتگرال، شی‌ای تانسوری باشد، آنگاه انتگرالده باید یک اسکالر باشد. انتگرال‌های اشیای تانسوری دیگر، تانسور نیستند. در واقع به دست آوردن معادلات هم‌وردا از انتگرال کنش غیر هم‌وردا، با زیربنای فلسفی این نظریه سازگار نیست. اصل موضوع

^۱ Sets of axioms ^۲ Postulates ^۳ Euler-Lagrange equations ^۴ Extremum

سوم نیز ما را موجب به استفاده از اصل تناظر^۱، به ساده‌ترین شکل ممکن می‌کند. چون معادله پواسون^۲ که به عنوان یک حد از معادلات هندسی به دست می‌آید، مرتبه دوم است و به همین طبع اکثر نظریات فیزیکی با معادلات مرتبه دوم تعریف می‌شوند که معادلات میدان گرانشی نیز ازین قاعده مستثنی نیستند [۴۰، ۴۱] ولی این یک برهان یکتا نیست چرا که نظریات گرانشی‌ای وجود دارند که معادلات میدان آن از مرتبه چهار هستند. اگرچه با انتقال حدی به نظریه نیوتون، جملاتی با مشتقات مرتبه بالاتر از دو از بین می‌روند.

نتایج اصول موضوعه هیلبرت ازین قراراند: (۱) در فضا-زمان چهار بعدی، انتگرال کنش باید به شکل $\int_U \mathcal{L} d^4x$ باشد که در آن U همان حجم در فضا-زمان چهار بعدی می‌باشد که بر روی مرز $\partial U \equiv \dot{U}$ وردش‌گیری‌های $\delta g_{\mu\nu}$ صفر می‌شوند. همچنین تابع $\mathcal{L}$ بستگی به تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ و مشتقات آن دارد یعنی $g_{\mu\nu,\alpha}$ ، $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ و مشتقات مرتبه بالاتر آن. (۲) اگر $\int_U \mathcal{L} d^4x$ یک اسکالر باشد آنگاه $\mathcal{L}$ باید یک چگالی اسکالر با وزن منفی یک باشد چرا که المان حجم d^4x ، یک چگالی اسکالر با وزن یک می‌باشد. ساده‌ترین چگالی اسکالر با وزن منفی یک، $\sqrt{-g}$ می‌باشد. بنابراین داریم $\mathcal{L} = L\sqrt{-g}$ ، که در آن L یک اسکالر سره یا محض^۳ است. (۳) مرتبه معادلات اوایلر-لاگرانژ، دو برابر مرتبه بیشترین مشتق در انتگرال کنش است. این نتیجه زمانی مناسب است که L تنها تابعی از $g_{\mu\nu}$ و $g_{\mu\nu,\alpha}$ باشد. اگرچه که می‌توان یک اسکالر غیر بدیهی از ترکیب جبری $g_{\mu\nu}$ و $g_{\mu\nu,\alpha} = \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} g_{\nu\beta} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} g_{\mu\beta}$ ساخت، چرا که نمادهای کریستوفل، تانسور نیستند [۹].

مشتقات مرتبه دوم $g_{\mu\nu}$ اگر در L موجود باشند، تنها در صورتی هیچ سهمی در معادلات اوایلر-لاگرانژ ندارند که بتوان آنها را به صورت دیورژانس یک عبارتی بر روی مرز حجم انتگرال‌گیری شده که صفر می‌شوند، نوشت. این در صورتی ممکن خواهد بود که $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ به صورت خطی در L وارد شود، به این معنی که تنها با جملاتی که شامل $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ نمی‌شوند، ادغام شده باشند. عبارت‌هایی که در تانسور ریمان هستند ازین شکل‌اند.

ساده‌ترین عباراتی که می‌توان از تانسور ریمان ساخت، با توجه به اینکه $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ در آن خطی می‌باشد، $R_{\nu\mu\alpha}^{\mu} = R_{\nu\alpha} = -R_{\nu\alpha\mu}^{\mu}$ یا $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R$ هستند، بنابراین داریم $L = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R$ و ازین رو کنش مان به شکل نوشته می‌شود

$$S_G = \int_U \sqrt{-g} R d^4x. \quad (۱-۱۶۵)$$

رابطه فوق به کنش هیلبرت-اینشتین معروف است [۳۹] که شکل کامل آن، با در نظر گرفتن چگالی

^۱ Correspondence principle ^۲ Poisson equation ^۳ Proper scalar

لاگرانژی ماده به شکل زیر است

$$S_G = \int_U \sqrt{-g} R d^4x + \int_U \mathcal{L}_m d^4x. \quad (۱۶۶-۱)$$

حال با وردش‌گیری از رابطه فوق نسبت به متریک g^{ab} خواهیم داشت

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int_U [(\delta\sqrt{-g})R + (\delta R)\sqrt{-g}] d^4x + \int_U \delta \mathcal{L}_m d^4x, \quad (۱۶۷-۱)$$

که در آن $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ می‌باشد. حاصل جمله اول از عبارت اول انتگرال فوق، طبق فرمول ژاکوبی^۱ (۱۴۰-۱) مشخص می‌باشد. بنابراین باید به محاسبه وردش‌گیری از اسکالر ریچی پردازیم، بنابراین در ادامه داریم

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{V^*} \left[\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) R + \{ (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \} \sqrt{-g} \right] d^4x \\ + \int_{V^*} \delta \mathcal{L}_m d^4x. \quad (۱۶۸-۱)$$

حال به محاسبه جمله سوم از کنش (۱۶۸-۱) می‌پردازیم و با استفاده از تانسور ریمان ادغام شده و وردش‌گیری از آن، به دست می‌آوریم

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \delta \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \delta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \delta \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \delta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha. \quad (۱۶۹-۱)$$

در ادامه با در نظر گرفتن دستگاه لخت موضعی، به این معنی که در آن تمامی هموستارها (نمادهای کریستوفل) صفر می‌باشند و همچنین تبدیل $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$ می‌توان رابطه (۱۶۹-۱) را به شکل زیر ساده‌سازی کرد

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha. \quad (۱۷۰-۱)$$

اکنون با جایگذاری رابطه فوق (که نتیجه فرعی معادله پلاتینی است) در معادله (۱۶۸-۱) به دست می‌آوریم

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int_U \left[\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) R + \{ (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \nabla_\alpha A^\alpha \} \sqrt{-g} \right] d^4x \\ + \int_U \delta \mathcal{L}_m d^4x, \quad (۱۷۱-۱)$$

که در آن $A^\mu = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu$ یک تانسور مرتبه اول می‌باشد و با استفاده از قضیه استوکس، این جمله بر روی مرز ∂U صفر می‌شود. بنابراین خواهیم داشت

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int_u \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int_u \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} d^4x. \quad (۱۷۲-۱)$$

^۱ Jacobi's formula

حال با کمینه کردن کنش فوق به معادله میدان اینشتین می‌رسیم

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{-2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (۱۷۳-۱)$$

معادله فوق را می‌توان به شکل آشناتر زیر نشان داد

$$G_{\mu\nu} = \Lambda \pi G T_{\mu\nu}, \quad (۱۷۴-۱)$$

که در آن تانسور اینشتین به صورت $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ تعریف می‌شود و برای تانسور انرژی-تکانه داریم $T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ [۱۸، ۱۲]. به این طریق توانستیم با رهیافت متریکی به معادلات میدان اینشتین در حضور میدان ماده دست یابیم. در ادامه به نوع دیگری از رهیافت وردش‌گیری برای بدست آوردن معادلات میدان نسبیت عام اشاره می‌کنیم.

۲-۳-۱ رهیافت پالاتینی

یک روش هوشمندانه دیگر برای به دست آوردن معادلات میدان که تنها بستگی به میدان‌های دینامیکی و مشتق‌های مرتبه اول آن دارد، به رهیافت پالاتینی معروف است. در این رهیافت، از این صورت‌گرایی تبعیت می‌کنیم که در آن متریک $g_{\mu\nu}$ و هموستار $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ ، به عنوان میدان‌های مستقل در نظر گرفته می‌شوند [۳۷]. به بیان دیگر هیچ ارتباطی بین متریک و هموستار وجود ندارد. برای درک بهتر این موضوع فرض می‌کنیم که $\mathcal{L}_G$ ، به صورت تابعی از متریک $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ و هموستارهای مستقل $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ و همچنین مشتق‌های آن می‌باشد یعنی $\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G[\mathcal{G}^{\mu\nu}, \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha, \hat{\Gamma}_{\mu\nu,\beta}^\alpha]$ که در آن داریم

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{G}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu} [\hat{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \hat{\Gamma}_{\mu\nu,\beta}^\beta + \hat{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^\beta - \hat{\Gamma}_{\mu\alpha}^\beta \hat{\Gamma}_{\beta\nu}^\alpha]. \quad (۱۷۵-۱)$$

بنابراین تانسور ریچی تنها بستگی به $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ و مشتقات آن دارد. حال اگر، فقط نسبت به متریک مستقل $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ وردش بگیریم خواهیم داشت

$$\delta S_G = \int_U \delta \mathcal{G}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x, \quad (۱۷۶-۱)$$

بلافاصله با کمینه کردن کنش فوق به معادلات میدان در خلا می‌رسیم یعنی $R_{\mu\nu} = 0$. در ادامه با وردش‌گیری نسبت به هموستار مستقل به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int_U \mathcal{G}^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x \\ &= \int_U \mathcal{G}^{\mu\nu} [\nabla_\alpha (\delta \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (\delta \hat{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha)] d^4x. \end{aligned} \quad (۱۷۷-۱)$$

با استفاده از قاعده لایبنتیس (یا انتگرال گیری جز به جز) و کنار گذاشتن جمله دیورژانس در می یابیم که

$$\delta S_G = \int_U [\nabla_\nu G^{\mu\nu} \delta \hat{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha - \nabla_\alpha G^{\mu\nu} \delta \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha] d^4x = \int_U [(\delta_\alpha^\nu \nabla_\beta G^{\mu\beta} - \nabla_\alpha G^{\mu\nu}) \delta \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha] d^4x,$$

در نهایت با کمینه کردن کنش فوق به معادله زیر می رسیم

$$\nabla_\beta \delta_\alpha^{(\nu} G^{\mu)\beta} - \nabla_\alpha G^{\mu\nu} = 0, \quad (178-1)$$

از آنجایی که اندیس های μ و ν متقارن می باشند، بنابراین تنها بخش متقارن عبارات درون براکت صفر می شود یعنی

$$\frac{1}{2} \delta_\alpha^\nu \nabla_\beta G^{\mu\beta} + \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu \nabla_\beta G^{\nu\beta} - \nabla_\alpha G^{\mu\nu} = 0, \quad (179-1)$$

ازین رو با کمی اعمال جبری خواهیم داشت

$$\nabla_\beta \delta_\nu^\nu G^{\mu\beta} - \nabla_\alpha \delta_\nu^\alpha G^{\mu\nu} = 0, \quad (180-1)$$

و از آن متوجه می شویم که معادله

$$\nabla_\alpha G_{\mu\nu} = 0. \quad (181-1)$$

و هموستار نیز متقارن اند. با حل معادله (۱۸۱-۱) در می یابیم که هموستار مستقل، از هموستار لوی-چیویتا^۱ تبعیت می کند که به فرم زیر است

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (182-1)$$

پس می توان رهیافت پالاتینی را اینگونه خلاصه کرد که با شروع از لاگرانژی نسبیت عام و با وردش گیری نسبت به متریک، به معادلات میدان اینشتین در خلا دست می یابیم و همچنین با وردش گیری از کنش نسبت به هموستار مستقل، به این نتیجه می رسیم که لزوماً این هموستار به شکل هموستار متریک می باشد.

نتیجه گیری

در این فصل، به مفاهیم مهم و بنیادی نسبیت عام پرداختیم. در بخش ۱-۱، با مفاهیم صرفاً ریاضیاتی وام گرفته شده از هندسه دیفرانسیلی و منیفلدها آشنا شدیم و برای توصیف مفهوم انحنا با به کارگیری تانسورها

^۱ Levi-Civita connection

و تعریف عملگرهای مشتق هم‌وردا بر روی این اشیا، توانستیم به درک عمیقی از انحنا دست‌یابیم. در انتها با وام گرفتن از مفاهیم قبلی، مفهوم ژئودزی را استخراج کردیم و در بخش ۱-۱-۵، به دو روش مولفه مختصات و روش پایه راست‌هنگار (یا تتراد)، محاسبه انحنا را انجام دادیم.

در بخش ۱-۲، با مفهوم مهم کنش که قسمت عمده‌ای از این پایان‌نامه را دربرمی‌گیرد آشنایی پیدا کردیم و همچنین با تعریف چگالی لاگرانژی و مفهوم وردش‌گیری، توانستیم به محاسبه معادله میدان برسیم و در انتهای این فصل، دو روش وردش‌گیری متریکی و پالاتینی را برای دست‌یابی به معادلات میدان حرکت، معرفی کردیم.

فصل ۲

کیهان‌شناسی

در کیهان‌شناسی، برای توصیف و توضیح عالم به طور کلی، از اصل (یا فرض) مهمی بهره می‌گیریم که بیان می‌دارد عالم در مقیاسی بیش از $100 Mpc$ ،^۱ رفتاری همگن^۲ و همسانگرد^۳ از خود نشان می‌دهد [۷۴]. همگن و همسانگردی عالم بدین معناست که اگر در این مقیاس عالم را مورد بررسی قرار دهیم، به هر نقطه از فضا و در هر جهتی بنگریم عالم به همان شکل دیده می‌شود. طبق بررسی‌های به دست آمده از انتقال به سرخ، این اصل در مقیاسی کمتر از آن برای اجرامی مانند کهکشان‌ها، خوشه‌ها و ابرخوشه‌ها قابل استناد نیست و عالم در این صورت غیرهمگن خواهد شد. همچنین با اشاره به نظریه تورم^۴ [۷۶]، همگنی و همسانگردی در مقیاسی بسیار بیشتر از $300 Mpc$ نیز شکسته خواهد شد. بنابراین طبق این اصل استفاده از ابزاری به نام ریاضیات برای توصیف عالم، تا حدودی باعث سهولت در کارمان می‌شود.

۱-۲ مقدمه و هندسه فضا-زمان

همانطور که قبلاً نیز به تفصیل اشاره کردیم، برای توصیف ریاضیاتی عالم باید از ابزاری به نام هندسه استفاده کنیم [۲۱] مفهوم مهمی که در هندسه وجود دارد، فاصله است و برای تعریف فاصله بین دو جسم فیزیکی از یکدیگر باید از موجودی به نام متریک بهره گیریم. به عنوان مثال با در نظر گرفتن مختصات دکارتی، فاصله فیزیکی بین دو نقطه را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (1-2)$$

^۱ $1 pc = 3/26 \times 10^6 yl = 3/0.8 \times 10^{13} km$ ^۲ Homogeneous ^۳ Isotropic ^۴ Inflation theory

توجه داشته باشید که در رابطه فوق نماد دلتای کروئکر (یا همان متریک) نشان دهنده یک ماتریس قطری به شکل $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ می‌باشد. برای توصیف فاصله فیزیکی بین دو نقطه، الزامی به تعریف یک دستگاه مختصات واحد وجود ندارد چرا که این فاصله نسبت به انتخاب دستگاه‌های مختصات مختلف، ناورداست. به عنوان مثالی دیگر، همین فاصله فیزیکی را در دستگاه مختصات قطبی کروی اینگونه تعریف می‌کنیم

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \equiv \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2-2)$$

متریک فوق نیز به شکل ماتریس قطری $g_{ab} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ نوشته می‌شود. حال برای توصیف هندسه فضا-زمان در نسبیت خاص، از متریک فضا-زمانی استفاده می‌کنیم که با اصل کیهان‌شناختی در توافق باشد. این فضا-زمان به فضای مینکوفسکی^۱ معروف است و به شکل زیر نوشته می‌شود

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3-2)$$

برای سادگی در روابط فوق می‌توان از قاعده جمع اینشتین استفاده کرد. در رابطه فوق متریک را به شکل $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ تعریف کردیم. نکته مهم در مورد متریک آن است که چگونگی تغییرات متریک در فضا-زمان، از توزیع ماده و انرژی موجود در عالم نشأت می‌گیرد.

حال از آنجا که ما در پی تحول و انبساط عالم می‌باشیم، بنابراین شکل کلی‌ای که برای المان خط^۲ اخذ می‌کنیم به شکل زیر است

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [\gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j], \quad (4-2)$$

که در آن $a(t)$ در رابطه بالا به ضریب مقیاس^۳ شناخته می‌شود که توصیف کننده انبساط عالم است.

۱-۱-۲ سه-فضای متقارن

برای تعریف فاصله فیزیکی اجرام نسبت به هم از متریک استفاده کردیم. حال اگر بخواهیم همگنی و همسانگردی عالم را در بستری سه بعدی تصور کنیم و یک نقطه یا مجموعه‌ای از نقاط را بر روی آن در نظر بگیریم، از یک رویه توپولوژیکی^۴ متقارن که تعمیمی از یک صفحه می‌باشد استفاده می‌کنیم که بر خلاف یک صفحه دارای انحنای صفر نیست (یعنی سطحی تخت)، بلکه می‌تواند یک کره سه بعدی با انحنای

^۱ Minkowski space ^۲ Line element ^۳ Scale factor ^۴ Topological surface

مثبت یا یک فضای هذلولوی با انحنای منفی [۷۸] (فضای لباچسفسکی^۱ یا شبه کروی^۲) باشد. تفاوت فاحش فضای لباچسفسکی با دو فضای دیگر در این است که آن را نمی توان در یک فضای سه بعدی اقلیدسی نشانده، چرا که در آن، شعاع کره دارای بخش موهومی می باشد. (یا به معنی ساده تر فضایی با انحنای منفی در فضای سه بعدی اقلیدسی وجود ندارد.) برای آنکه بتوان شهودی بصری به این سه حالت از انحنا داشت به ترتیب از یه صفحه تخت دو بعدی، سطح یک کره دوبعدی و از یک هذلولی (که باز هم به طور دقیق، توصیف کننده انحنای منفی نیست) استفاده می کنیم [۷۹]. با توجه به این حالت ها، می توانیم المان خط هر سه انحنا را بنویسیم. برای فضای تخت با انحنای صفر داریم

$$dl^2 = dx^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (5-2)$$

و همچنین به ترتیب برای انحنای مثبت و منفی، المان خط با روابط زیر تعریف می شود

$$dl^2 = dx^2 + du^2 = R^2, \quad x^2 + u^2 = R^2, \quad (6-2)$$

$$dl^2 = dx^2 - du^2 = -R^2, \quad x^2 - u^2 = -R^2. \quad (7-2)$$

در روابط فوق R شعاع کره یا مقیاس انحنا^۳ (که مقداری ثابت است) می باشد. حال با تلفیق کردن دو معادله (۶-۲) و (۷-۲) در یک معادله واحد خواهیم داشت

$$dl^2 = dx^2 \pm du^2 = \pm R^2, \quad x^2 \pm u^2 = \pm R^2. \quad (8-2)$$

در ادامه با مشتق گیری از طرفین رابطه (۸-۲) و حذف مختصه u و در نهایت با جایگذاری رابطه (۵-۲) در آن، به نتیجه دلخواه زیر می رسیم

$$dl^2 = dx^2 + k \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{R^2 - kx^2}. \quad (9-2)$$

برای گنجاندن هر چه بهتر تقارن موجود در رابطه فوق، بهتر است از دستگاه مختصات کروی استفاده کنیم. بنابراین در انتها خواهیم داشت

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{kr^2}{R^2}} + r^2 d\Omega^2, \quad (10-2)$$

که در آن متغیر k نشان دهنده انحنای فضا است و مقادیر آن اینگونه است

$$k \equiv \begin{cases} 1 & E^3 \\ 0 & H^3 \\ -1 & S^3 \end{cases} \quad (11-2)$$

و همچنین $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ تعریف شده است.

۲-۱-۲ متریک فریدمن-لومتر-رابرتسن-واکر

با جایگذاری رابطه (۲-۱۰) در (۲-۴) در مختصات قطبی، به متریک فریدمن-لومتر-رابرتسن-واکر^۱ دست خواهیم یافت [۸۰]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{kr^2}{R_*^2}} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (12-2)$$

این متریک دارای ویژگی‌های مهمی می‌باشد که به آن‌ها در ادامه اشاره می‌کنیم:

(۱) اگر در متریک FLRW از بازمقیاس زیر استفاده کنیم، هیچ تغییری در هندسه فضا-زمان ایجاد نمی‌شود و تقارن موجود در آن حفظ می‌شود

$$a \rightarrow \lambda a, \quad r \rightarrow r/\lambda, \quad R_* \rightarrow R_*/\lambda, \quad (13-2)$$

که در آن λ یک مقدار ثابت است. با استفاده از این موضوع می‌توانیم ضریب مقیاس حال حاضر را برابر با یک در نظر بگیریم.

(۲) در متریک FLRW، r به مختصه همراه^۲ معروف است و تفاوت مهم این مختصه با مختصه فیزیکی، در آن است که فاصله بین دو نقطه در آن با در نظر گرفتن انبساط عالم ثابت باقی می‌ماند ولی فاصله فیزیکی بین دو نقطه نسبت به زمان (با در نظر گرفتن انبساط عالم) متناسب با ضریب مقیاس $a(t)$ تغییر می‌کند. باید توجه کنیم که این مختصه با به‌کارگیری بازمقیاس (۲-۱۳) تغییر کرده و همچنین به‌طور فیزیکی قابل مشاهده نمی‌باشد. حال اگر این مختصه مکانی را بر حسب مکان فیزیکی بنویسیم یعنی $\mathbf{r}_{\text{Phys}} = a(t)\mathbf{r}$ می‌توانیم با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه به سرعت فیزیکی دست یابیم [۷۴]

$$\mathbf{v}_{\text{Phys}} \equiv \frac{d\mathbf{r}_{\text{Phys}}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{r} + a(t)\frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv H\mathbf{r}_{\text{Phys}} + \mathbf{v}_{\text{Pec}}. \quad (14-2)$$

^۱ Comoving coordinate ^۲ Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric (FLRW metric)

برای آنکه رابطه فوق از ارزش فیزیکی برخوردار باشد فرض می‌کنیم که $\mathbf{r}(t)$ مسیر حرکت یک کهکشان در همان مختصه همراه باشد، بنابراین رابطه (۲-۱۴) نشان‌دهنده سرعت فیزیکی یک کهکشان است و در آن داریم

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2-15)$$

که در آن H به پارامتر هابل^۱ معروف است [۷۵] و همچنین در رابطه (۲-۱۴)، علامت نقطه نشان‌دهنده مشتق زمانی بوده یعنی $\dot{a} = da/dt$ و عبارت $H r_{\text{Phys}}$ جریان هابل^۲ نامیده می‌شود و معنی آن به سرعت کهکشان بین مبدا و $\mathbf{r}_{\text{Phys}}(t)$ که حاصل انبساط فضا می‌باشد، اشاره دارد و عبارت $\mathbf{v}_{\text{Pec}} \equiv a(t)\dot{\mathbf{r}}$ سرعت خاصه^۳ نامیده می‌شود و نشان‌دهنده سرعت اندازه‌گیری شده توسط ناظر در مختصه همراه است.

۳- برای ساده‌نویسی رابطه (۲-۱۲) با تعریف مختصه شعاعی $d\chi \equiv \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{kr^2}{R^2}}}$ داریم که

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2], \quad (2-16)$$

که در آن $S_k(\chi)$ به شکل زیر تعریف می‌شود [۷۷]

$$S_k(\chi) \equiv R \cdot \begin{cases} \sin(\frac{\chi}{R}) & k = 1 \\ \frac{\chi}{R} & k = 0 \\ \sinh(\frac{\chi}{R}) & k = -1 \end{cases} \quad (2-17)$$

۴- با تعریف زمان هم‌مدیس به شکل $d\eta = dt/a(t)$ می‌توانیم رابطه (۲-۱۶) را با فاکتورگیری از ضریب

مقیاس هم‌مدیس $a(\eta)$ به شکل زیر بنویسیم

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + (d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2)]. \quad (2-18)$$

تعریف زمان هم‌مدیس در این بخش برای متریک FLRW در جهت به دست آوردن جواب‌های دقیق معادلات اینشتین می‌باشد.

^۱ Hubble parameter ^۲ Hubble current ^۳ Peculiar velocity

۲-۲ سینماتیک

۱-۲-۲ ژئودزی

در بخش قبل به هندسه مورد نیاز برای توصیف عالم پرداختیم و با استفاده از متریک، فاصله بین دو جسم یا ذره را تعریف کردیم. حال در این بخش می‌خواهیم سینماتیک (مسیر حرکت) یک ذره یا یک جسم را در بستر فضا-زمان FLRW به دست آوریم [۸۱]، به این منظور از مفهومی به نام ژئودزی استفاده می‌کنیم که به تفصیل در بخش ۱-۱-۳ به آن پرداختیم [۵۰]. فرض می‌کنیم ذره‌ای آزاد در فضای دو بعدی اقلیدسی تعریف شده است و هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود، با در نظر گرفتن دستگاه مختصات دکارتی، معادله حرکت این ذره طبق قانون دوم نیوتون برابر است با

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0. \quad (19-2)$$

اگر معادله حرکت ذره را در دستگاه مختصات قطبی تعریف کنیم، آنگاه خواهیم داشت

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \sin \phi \dot{\phi} - r \cos \phi \ddot{\phi} - r \sin \phi \dot{\phi}^2 = 0, \quad (20-2)$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \cos \phi \dot{\phi} - r \sin \phi \ddot{\phi} + r \cos \phi \dot{\phi}^2 = 0.$$

با حل دو معادله فوق بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r \dot{\phi}^2 \\ \ddot{\phi} &= -\frac{\dot{r}}{r} \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (21-2)$$

قابل ذکر است که صفر بودن مشتق مرتبه دوم متغیر x نسبت به زمان یا همان معادله حرکت در رابطه (۱۹-۲)، به معنی این نیست که $\ddot{x}^i = 0$ است. این موضوع را در مختصات قطبی نشان دادیم.

حال اگر بخواهیم معادله حرکت را در یک دستگاه مختصات دلخواه تعریف کنیم ابتدا از لاگرانژی زیر استفاده می‌کنیم

$$L = \frac{m}{2} g_{ij}(x^k) \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad (22-2)$$

که در آن $g_{ij} \neq \delta_{ij}$ می‌باشد، حال با جایگذاری لاگرانژی فوق در معادله اوایلر-لاگرانژ زیر

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^k}, \quad (23-2)$$

به دست می آوریم

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{ab}^i \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt}, \quad (2-24)$$

که به آن معادله ژئودزی گفته می شود و در آن نماد کریستوفل به شکل زیر تعریف می شود

$$\Gamma_{ab}^i \equiv \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_a g_{jb} + \partial_b g_{ja} - \partial_j g_{ab}), \quad \partial_j \equiv \partial / \partial x^j. \quad (2-25)$$

بنابراین معادله حرکت یک ذره جرم دار در نسبیت عام، شکلی شبیه به معادله ژئودزی (۲-۲۴) دارد. ژئودزی در یک فضا-زمان خمیده برای ذرات جرم دار، منحنی زمان گونه‌ی $x^\mu(\tau)$ است که زمان ویژه $\Delta\tau$ بین دو نقطه در این فضا-زمان را فرینه می کند و داریم [۵۰]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}, \quad (2-26)$$

که در آن نماد کریستوفل $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ نیز به شکل زیر می باشد

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}), \quad \partial_\alpha \equiv \partial / \partial x^\alpha. \quad (2-27)$$

همچنین رابطه زمان ویژه نیز به شکل $d\tau^2 = -ds^2$ تعریف می شود.

حال مناسب است که معادله ژئودزی برای یک ذره را براساس چارتکانه^۱ بنویسیم. می دانیم که رابطه تکانه در فضا-زمان خمیده چهاربعدی به شکل زیر است

$$P^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (2-28)$$

حال با اعمال قاعده مشتق زنجیره‌ای از رابطه (۲-۲۸) و جایگذاری نتیجه به دست آمده در معادله ژئودزی (۲-۲۶) داریم که

$$P^\alpha \frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta. \quad (2-29)$$

در نهایت اگر معادله ژئودزی فوق را به شکل زیر تعریف کنیم

$$P^\alpha (\partial_\alpha P^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\beta) = 0, \quad (2-30)$$

عبارت به دست آمده در پرانتز نشان دهنده مشتق هم‌وردا از چارتکانه P^μ می باشد. بنابراین با تعریف مشتق هم‌وردا به شکل $\nabla_\alpha \equiv \partial_\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ ، می توانیم معادله ژئودزی را به شکل ساده زیر بازنویسی کنیم

$$P^\alpha \nabla_\alpha P^\mu = 0. \quad (2-31)$$

نوشتن معادله ژئودزی به شکل (۲-۳۱) از این جهت اهمیت دارد که می‌توان آن را به راحتی برای ذرات بدون جرم نیز اعمال کرد.

حال به مسئله ذرات آزاد بر می‌گردیم. برای به دست آوردن معادله ژئودزی ذرات آزاد در متریک FLRW باید نماد کریستوفل (یا هموستار) را برای این متریک به دست آوریم که مولفه‌های غیر صفر آن ازین قراراند

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{\cdot} &= c^{-1} a \dot{a} \gamma_{ij} \\ \Gamma_{\cdot j}^i &= \Gamma_{j \cdot}^i = c^{-1} \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \\ \Gamma_{jk}^i &= \Gamma_{kj}^i = \frac{1}{c} \gamma^{ia} (\partial_j \gamma_{ak} + \partial_k \gamma_{aj} - \partial_a \gamma_{jk}).\end{aligned}\quad (2-32)$$

حال باید توجه کنیم که چون متریک FLRW همگن می‌باشد پس این شرط را تحمیل می‌کند که $\partial_i P^\mu = 0$ باشد، بنابراین داریم

$$P^\cdot \frac{dP^\mu}{dx^\cdot} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta. \quad (2-33)$$

با در نظر گرفتن $\mu = 0$ ، چون همه نمادهای کریستوفل با دو اندیس زمانی صفر می‌شوند، ازین رو طرف راست معادله برابر با $\Gamma_{ij}^{\cdot} P^i P^j$ می‌شود و با جایگذاری $\Gamma_{ij}^{\cdot} = a \dot{a} \gamma_{ij}$ و استفاده از این نکته که $E = P^\cdot$ می‌باشد، به دست می‌آوریم

$$E \frac{dE}{dt} = a \dot{a} \gamma_{ij} P^i P^j. \quad (2-34)$$

برای ذره آزاد بدون جرم، چارترکانه $P^\mu = (E, P^i)$ باید از قید زیر تبعیت کند

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -E^2 + a^2 \gamma_{ij} P^i P^j = 0. \quad (2-35)$$

بنابراین با این قید می‌توانیم رابطه (۲-۳۵) را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a}. \quad (2-36)$$

این رابطه نشان می‌دهد که انرژی ذره بدون جرم با انبساط عالم متناسب با $E \propto a^{-1}$ واپاشیده می‌شود.

۲-۲-۲ انتقال به سرخ

هر نوری که در عالم از کهکشان‌ها و دیگر اجرام آسمانی به ما می‌رسد به دلیل انبساط عالم، باعث بلندتر شدن طول موج آن نور می‌شود که به این افزایش طول موج در اثر انبساط عالم، پدیده انتقال به سرخ^۱ گفته

می‌شود و دلیل سرخ بودن نور گسیلی مشاهده شده توسط ناظر، بلندتر بودن طول موج نور قرمز نسبت به طول موج نور آبی می‌باشد [۸۲]. از طرفی می‌دانیم که طول موج نور با انرژی فوتون از رابطه $\lambda = h/E$ به دست می‌آید که در آن h ثابت پلانک می‌باشد. همچنین در بخش قبل نیز دیدیم که $E \propto a^{-1}$ است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\lambda \propto a$ می‌باشد و نسبت طول موج گسیل شده در زمان t_1 به زمان بعدتر t_0 ازین قرار است

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2-37)$$

باید توجه کنید که روابط فوق را برای خاصیت ذره‌ای نور (یا خاصیت نشات گرفته از مکانیک کوانتومی) به دست آوردیم. برای آنکه این مفاهیم را بر اساس خاصیت موجی نور (یا خاصیت کلاسیکی آن) به دست آوریم باید با دید دیگری به مسئله نگاه کنیم.

برای مطالعه‌ی نور به عنوان موج الکترومغناطیسی در بستر فضا-زمان در حال انبساط باید از زمان همدیس استفاده کنیم. از آنجا که فضا-زمان همسانگرد می‌باشد پس مختصات انتخابی برای مسیر حرکت نور دارای تقارن شعاعی است بنابراین زوایای θ و ϕ ثابت می‌باشند و نور تنها در جهت شعاعی حرکت می‌کند. پس المان خط آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + d\chi^2]. \quad (2-38)$$

چون فوتون‌ها مسیری را با المان خط $ds^2 = 0$ طی می‌کنند بنابراین مسیرشان با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\Delta\chi(\eta) = \pm c\Delta\eta, \quad (2-39)$$

که در آن علامت مثبت و منفی به ترتیب برای فوتون‌های خروجی و ورودی می‌باشد. نکته‌ای که قابل ذکر است این می‌باشد که اگر به جای زمان همدیس η از زمان فیزیکی t استفاده کنیم مسیر حرکت نور خمیده می‌شود.

فرض می‌کنیم کهکشانی در زمان همدیس η_1 سیگنالی به مدت کوتاه $\delta\eta$ از خود گسیل می‌کند و این سیگنال در زمان $\eta_0 = \eta_1 + d$ به تلسکوپ می‌رسد. مدت زمان همدیسی که این سیگنال نوری توسط آشکارساز مشاهده می‌شود برابر با همان مدتی است که این سیگنال از منبع ساطع شده است ولی با این تفاوت که بازه‌های زمانی فیزیکی این دو در نقاط گسیل و مشاهده با یکدیگر متفاوت‌اند یعنی

$$\delta t_1 = a(\eta_1)\delta\eta, \quad \delta t_0 = a(\eta_0)\delta\eta. \quad (2-40)$$

اگر δt را دوره تناوب موج نور در نظر بگیریم پس نور گسیلی با طول موج $\lambda_1 = \delta t_1$ و طول موج مشاهده شده با $\lambda_0 = \delta t_0$ تعریف می‌شود. بنابراین داریم

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(\eta_0)}{a(\eta_1)}. \quad (41-2)$$

حال می‌توانیم متغیر توصیف کننده انتقال به سرخ را به شکل زیر تعریف کنیم

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}. \quad (42-2)$$

با در نظر گرفتن $a(t_0) \equiv 1$ (یعنی مقدار ضریب مقیاس در زمان حال) داریم که

$$1 + z = \frac{1}{a(t_1)}. \quad (43-2)$$

باید توجه کنیم که اگر پارامتر انتقال به سرخ کهکشانی، برابر با یک باشد، به این معنی است که این کهکشان هنگامی که عالم به اندازه نصف حال حاضرش بوده، دیده شده است و اگر $z = 2$ باشد نیز این اندازه به یک سوم حالت اولیه عالم کاهش می‌یابد.

حال بیایم فرض کنیم که $z < 1$ باشد، (یعنی منابع نزدیک به ما) در این صورت می‌توانیم ضریب مقیاس را حول $t = t_0$ بسط دهیم آنگاه داریم [۷۴]

$$a(t_1) = 1 + (t_0 - t_1)H_0 + \dots, \quad (44-2)$$

که در آن $(t_0 - t_1)$ زمان برگشتی^۱ می‌باشد و H_0 ثابت هابل^۲ نامیده شده و به شکل زیر تعریف می‌شود

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (45-2)$$

با این تعاریفات، می‌توانیم رابطه (۴۴-۲) را به شکل زیر نیز بازنویسی کنیم

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \dots. \quad (46-2)$$

و چون از ابتدا فرض را برای اجرام نزدیک بنا نهادیم پس نتیجه می‌گیریم که $t_0 - t_1 = d$ است و ازین رو پارامتر انتقال به سرخ با فاصله به طور خطی افزایش می‌یابد که به آن قانون هابل-لومتر^۳ گفته می‌شود [۸۳]. بنابراین داریم که

$$v = z \simeq H_0 d, \quad (47-2)$$

که در رابطه فوق v همان سرعت رکود^۴ نامیده می‌شود.

^۱ Look-Back time ^۲ Hubble constant ^۳ Hubble-Lemaître law ^۴ Recession Speed

۳-۲-۲ فواصل

تعریف فاصله در کیهان‌شناسی کار دشواری است چرا که هم عالم در حال انبساط می‌باشد و هم نور با سرعت محدودی طول می‌کشد که به ما برسد. فاصله‌ای که قبلاً در متریک تعریف کردیم یا حتی فاصله فیزیکی $d_{\text{phys}} = a(t)\chi$ نیز قابل مشاهده نیستند چرا که این فواصل بین رویدادهای جداگانه از هم در زمانی ثابت اتفاق افتاده‌اند.

اگر بخواهیم فاصله را در کیهان‌شناسی به‌طور صحیح مشخص کنیم از فاصله درخشندگی^۱ استفاده می‌کنیم. برای این کار از درخشش ذاتی اجرام که به شمع استاندارد^۲ معروف‌اند، استفاده می‌کنیم [۸۴]. دو شمع استاندارد که برای تعیین فاصله از آن بهره می‌گیریم: ستارگان قیفاووسی^۳ هستند که به دلیل مشخص بودن رابطه دوره تناوب نور رسیده از این ستارگان با قدر مطلق آن‌ها، می‌توانیم به فاصله این ستارگان دست یابیم [۸۵]. استفاده از این ستارگان تنها برای فواصل کوتاه مفید است. یک شمع استاندارد دیگر به ابرنواخترهای نوع Ia معروف‌اند که به دلیل روشنایی زیادی که از خود نشان می‌دهند برای دستیابی به فواصل دور مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در ادامه می‌خواهیم رابطه بین درخشندگی L (انرژی گسیلی بر واحد زمان) و شار F (انرژی دریافتی بر واحد زمان بر واحد مساحت) را به دست آوریم. برای این کار رابطه فاصله همراه نسبت به یک جسم مشخص را با در نظر گرفتن انتقال به سرخ آن به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi(z) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^1 \frac{dz}{H(z)}, \quad (2-48)$$

که در آن ثابت هابل $H(z)$ بستگی به محتوای ماده عالم دارد. حال فرض می‌کنیم که منبع مورد نظر، تابشی همسانگرد در فضای اقلیدسی ایستا از خود گسیل می‌کند، در این صورت انرژی به‌طور یکنواخت بر روی کره‌ای به مساحت $4\pi\chi^2$ پخش می‌شود و کسر عبوری از این مساحت برابر با $A/4\pi\chi^2$ است. بنابراین رابطه بین درخشندگی و شار مشاهده شده از عبارت زیر به دست می‌آید

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2}. \quad (2-49)$$

رابطه فوق برای فضای ایستا تعریف شده است. برای فضای منبسط شونده داریم

$$F \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi d_M^2 (1+z)^2}, \quad (2-50)$$

^۱ Luminosity distance ^۲ Standard candle ^۳ Cepheids

که در آن d_L فاصله درخشندگی است و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$d_L(z) = (1+z)d_M(z). \quad (۵۱-۲)$$

در رابطه فوق d_M به فاصله متریکی اشاره دارد که همان $d_M \equiv S_k(\chi)$ است که در رابطه (۱۷-۲) آن را تعریف کردیم.

اگر ضریب مقیاس $a(t)$ را حول زمان برگشتی، بسط تیلور دهیم آنگاه به ازای $z < 1$ به دست می‌آوریم [۷۴]

$$a(t) = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (۵۲-۲)$$

که در آن پارامتر کندشوندگی q_0 به شکل زیر تعریف می‌شود

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \Big|_{t=t_0}. \quad (۵۳-۲)$$

در عصر حاضر این پارامتر دارای مقدار $q_0 = -0.5$ است و می‌تواند شتاب عالم را اندازه‌گیری کند. حال با جایگذاری عبارت (۵۲-۲) در (۴۳-۲)، رابطه انتقال به سرخ را بر اساس زمان برگشتی به شکل زیر به دست می‌آوریم

$$H_0(t_0 - t_1) = z - \frac{1}{2}(2 + q_0)z^2 + \dots \quad (۵۴-۲)$$

همچنین می‌توانیم فاصله همراه را نسبت به زمان برگشتی و انتقال به سرخ بنویسیم

$$\begin{aligned} \chi &= \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} dt [1 + H_0(t - t_0) + \dots] \\ &= (t_0 - t_1) + \frac{1}{2}H_0(t_0 - t_1)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{H_0} \left(z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \dots \right), \end{aligned} \quad (۵۵-۲)$$

که با استفاده از آن می‌توانیم برای فضای تخت یعنی $S_k(\chi) = \chi$ قانون هابل-لومتر را اینگونه تعریف کنیم

$$d_L = \frac{1}{H_0} \left(z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right). \quad (۵۶-۲)$$

قابل ذکر است که مقدار پارامتر کندشوندگی q_0 به محتوای انرژی عالم بستگی دارد.

به غیر از شمع استاندارد می‌توانیم از روش دیگری برای تعریف فاصله استفاده کنیم و آن هم بهره بردن از خط‌کش استاندارد^۱ است [۸۴]. می‌دانیم که اندازه زاویه‌ای اجرام بستگی به فاصله‌شان دارد بنابراین در فضای اقلیدسی ایستا، اندازه زاویه‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\delta\theta = \frac{D}{\chi}, \quad (۵۷-۲)$$

که در آن D همان اندازه فیزیکی عرضی جسم است. برای عالم در حال انبساط این رابطه به شکل زیر است

$$\delta\theta = \frac{D}{a(t_1)d_M} \equiv \frac{D}{d_A}. \quad (۵۸-۲)$$

در رابطه فوق اندازه زاویه‌ای مشاهده شده به فاصله، هنگامی که در زمان t_1 نور از آن گسیل شده است، بستگی دارد و در آن d_A فاصله قطری زاویه‌ای^۲ می‌باشد و به شکل زیر تعریف می‌شود

$$d_{A(z)} = \frac{d_M(z)}{1+z}. \quad (۵۹-۲)$$

۳-۲ دینامیک

گفتیم که ضریب مقیاس نشان دهنده انبساط عالم است. حال باید اشاره کنیم که تحول زمانی این ضریب با معادله میدان اینشتین به دست می‌آید که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (۶۰-۲)$$

که در آن $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ثابت گرانش نیوتون می‌باشد. این معادله، تانسور اینشتین را (که نشان دهنده مقدار انحنای فضا-زمان است) به تانسور انرژی-تکانه (که مقدار محتوای ماده عالم را تعیین می‌کند) ربط می‌دهد.

در ادامه به به دست آوردن شکل‌های ممکن برای تانسور انرژی-تکانه پرداخته و همچنین با محاسبه تانسور اینشتین برای فضا-زمان FLRW، به حل معادله اینشتین برای دستیابی به تحول زمانی ضریب مقیاس خواهیم پرداخت.

^۱ Standard ruler ^۲ Angular diameter distance

۱-۳-۲ سیالات کامل

یکی از شکل‌های ممکن که می‌توانیم برای تانسور انرژی-تکانه با در نظر گرفتن اصل کیهان‌شناختی متصور شویم، استفاده از سیال کامل است که تانسور انرژی-تکانه آن از این قرار است

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + Pg_{\mu\nu}, \quad (۶۱-۲)$$

که در آن ρ , P به ترتیب چگالی انرژی و فشار در چارچوب سکون و U^μ چارسرعت^۱ در دستگاه ناظر همراه است. قبل از پرداختن به تانسور انرژی-تکانه ابتدا اشاره‌ای به چگالی تعداد می‌کنیم [۸۶].

فرض کنیم که N^μ چگالی تعداد چاربردار می‌باشد بنابراین مولفه $\mu = 0$ نشان دهنده چگالی تعداد ذرات است و مولفه‌های $\mu = i$ نیز، شار ذرات در جهت x^i را نشان می‌دهد. حال می‌خواهیم چگالی تعداد را با در نظر گرفتن همگنی و همسانگردی عالم برای یک ناظر همراه تعیین کنیم. همسانگردی ایجاب می‌کند که مقدار میانگین هر سه-بردار می‌مانند N^i (که تحت تبدیلات فضایی تغییر می‌کند) باید برابر با صفر باشد و همگنی نیز ایجاب می‌کند که مقدار میانگین هر سه-اسکالری مانند N^0 (که تحت تبدیلات فضایی تغییر نمی‌کند) باید تابعی از زمان باشد. بنابراین چگالی تعداد اندازه‌گیری شده توسط ناظر همراه برابر است با

$$N^0 = n(t), \quad N^i = 0, \quad (۶۲-۲)$$

که در آن $n(t)$ تعداد کهکشان‌ها در حجم ویژه است. همچنین یک ناظر عمومی که نسبت به چارچوب سکون میانگین ذرات در حرکت است دارای چگالی تعداد چاربردار زیر می‌باشد

$$N^\mu = nU^\mu, \quad (۶۳-۲)$$

که در آن داریم $U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$.

نکته مهم آن است که اگر تعداد ذرات پایسته باشد، نرخ تغییر چگالی تعداد باید برابر با دیورژانس شار ذرات باشد. در فضای مینکوفسکی این نکته منجر به معادله پیوستگی^۲ زیر می‌شود

$$\partial_\mu N^\mu = 0. \quad (۶۴-۲)$$

شکل نسبیتی آن نیز اینگونه است

$$\partial_\mu N^\mu = 0. \quad (۶۵-۲)$$

حال اگر به جای مشتق جزئی از مشتق هم‌وردا استفاده کنیم، می‌توانیم معادله پیوستگی را برای فضا-زمان‌های خمیده طوری تعریف کنیم که مستقل از انتخاب دستگاه مختصات باشد. بنابراین داریم

$$\nabla_{\mu} N^{\mu} = 0. \quad (۶۶-۲)$$

حال اگر از تعریف مشتق هم‌وردا استفاده کنیم یعنی

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A^{\lambda}, \quad (۶۷-۲)$$

و آن را در معادله پیوستگی قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\partial_{\mu} N^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} N^{\lambda}. \quad (۶۸-۲)$$

حال با جایگذاری مولفه‌های چگالی تعداد (۶۲-۲) به دست می‌آوریم

$$\frac{dn}{dt} = -\Gamma^{\mu}_{\mu\cdot} n = -3\frac{\dot{a}}{a} n, \quad (۶۹-۲)$$

که در آن داریم $\Gamma^i_{i\cdot} = \Gamma^i_{\cdot i} = 3\frac{\dot{a}}{a}$ ، بنابراین در انتها خواهیم داشت

$$\frac{\dot{n}}{n} = -3\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow n(t) \propto a^{-3}. \quad (۷۰-۲)$$

پس می‌بینیم که چگالی تعداد با افزایش حجم ویژه، کاهش می‌یابد.

دوباره به تانسور انرژی-تکانه باز می‌گردیم و شکلی از آن را تعیین می‌کنیم که در توافق با اصل کیهان‌شناختی باشد. برای درک بهتر از این تانسور، مولفه‌های متفاوت آن را تجزیه می‌کنیم که در آن $T_{\cdot\cdot}$ سه-اسکالر، $T_{\cdot j}$ ، $T_{i\cdot}$ سه-بردار و T_{ij} نیز سه-تانسور است و به ترتیب مفهوم فیزیکی آن‌ها نشان دهنده چگالی انرژی، شار انرژی، چگالی تکانه و تانسور تنش است. در جهان همگن، چگالی انرژی مستقل از مکان بوده و تابعی از زمان است $T_{\cdot\cdot} = \rho(t)$. همچنین همسانگردی عالم نیز باعث می‌شود که مقادیر میانگین سه-بردار در چارچوب همراه برابر با صفر شود $T_{i\cdot} = T_{\cdot j} = 0$. سرانجام همسانگردی عالم باعث می‌شود که هر سه-تانسوری مانند تانسور تنش T_{ij} ، حول نقطه $x = 0$ متناسب با δ_{ij} شود و چون در این نقطه، متریک g_{ij} برابر است با $a^2 \delta_{ij}$ ، بنابراین داریم

$$T_{ij}(x=0) \propto \delta_{ij} \propto g_{ij}(x=0). \quad (۷۱-۲)$$

همچنین همگنی نیز بار دیگر ایجاب می‌کند که این تناسب باید تابعی از زمان باشد. بنابراین مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه به قرار زیراند

$$T_{\cdot\cdot} \equiv \rho(t), \quad T_{i\cdot} \equiv \pi_i = 0, \quad T_{ij} = P(t)g_{ij}(t, x). \quad (۷۲-۲)$$

بنابراین شکل ماتریسی تانسور انرژی-تکانه برای یک سیال کامل در چارچوب همراه برابر است با [۱۸]

$$T^\mu_\nu = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & P & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & P & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & P \end{pmatrix}. \quad (۷۳-۲)$$

حال بیاییم و تحول متغیرهای فشار و چگالی را بررسی کنیم. در فضای مینکوفسکی، انرژی و تکانه پایسته می‌مانند. چگالی انرژی، معادله پیوستگی را ارضا می‌کند یعنی $\dot{\rho} = -\partial_i \pi^i$. از طرفی تحول چگالی تکانه، معادله اویلر را ارضا می‌کند به این معنی که $\dot{\pi}_i = \partial_i P$ می‌باشد. از قوانین بقا می‌توانیم برای تانسور انرژی-تکانه استفاده کنیم که در آن صورت داریم

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = \cdot. \quad (۷۴-۲)$$

که با جایگزینی مشتق هم‌وردا با مشتق جزئی در رابطه فوق به شکل معادله پیوستگی در نسبیت عام دست خواهیم یافت

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \cdot. \quad (۷۵-۲)$$

از طرفی حاصل مشتق هم‌وردا بر روی تانسوری با مرتبه دو از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\nabla_\mu T^\sigma_\nu = \partial_\mu T^\sigma_\nu + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\sigma_\lambda. \quad (۷۶-۲)$$

با اعمال مشتق هم‌وردا بر روی تانسور انرژی-تکانه به ازای $\nu = 0$ تحول چگالی انرژی به شکل زیر به دست می‌آید

$$\partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda. \quad (۷۷-۲)$$

و چون شرط همسانگردی، مولفه T^i_0 را صفر می‌کند بنابراین خواهیم داشت که

$$\frac{d\rho}{dt} + \Gamma^\mu_{\mu 0} \rho - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = \cdot. \quad (۷۸-۲)$$

چون اندیس‌های μ و λ فضایی هستند، پس با هم برابراند. ازین رو حاصل نماد کریستوفل $\Gamma^\lambda_{\mu 0} = \cdot$ می‌باشد و از طرفی داریم $\Gamma^i_{i0} = 3\frac{\dot{a}}{a}$. بنابراین در انتها خواهیم داشت

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = \cdot. \quad (۷۹-۲)$$

معادله فوق از اهمیت خاصی برخوردار است چرا که قانون بقا را در کیهان‌شناسی نشان می‌دهد. بهتر است که برای سیالات در کیهان‌شناسی رابطه فوق را بر اساس معادله حالت $w = P/\rho$ بنویسیم

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (۸۰-۲)$$

۲-۳-۲ ماده و تابش

در این بخش به بررسی انواع سیالات مانند ماده، تابش و انرژی تاریک که نقش مهمی در جهان ما ایفا می‌کنند می‌پردازیم و در این بخش ماده و تابش را بررسی می‌کنیم [۸۷]. برای ماده به عنوان یک سیال که فشار آن از چگالی انرژی‌اش بسیار کوچکتر است $\rho \gg |p|$ ، معادله حالت برابر با صفر است ($w = 0$). پس داریم

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (۸۱-۲)$$

تغییر چگالی انرژی در این رابطه نشان می‌دهد که حجم یک منطقه در فضا با شتاب $V \propto a^3$ افزایش می‌یابد که در آن منطقه، انرژی ثابت می‌ماند.

در تابش نیز فشار یک سوم چگالی انرژی می‌باشد یعنی $P = \frac{1}{3}\rho$ بنابراین برای یک گاز تشکیل شده از ذرات غیر نسبیتی که در آن چگالی انرژی به انرژی جنبشی غالب است و معادله حالت آن برابر با $w = \frac{1}{3}$ است و داریم

$$\rho \propto a^{-4}. \quad (۸۲-۲)$$

چون تغییر چگالی انرژی تنها شامل انبساط نمی‌شود، $V \propto a^3$ پس در آن انتقال به سرخ انرژی ذرات رابطه‌ای به شکل $E \propto a^{-1}$ دارد.

۳-۳-۲ انرژی تاریک

برای بررسی تحول عالم علاوه بر ماده و تابش، باید انرژی تاریک را نیز بررسی کنیم چرا که بخش عمده‌ای از جهان کنونی ما از انرژی تاریک تشکیل شده است [۸۸، ۸۹]. از آنجا که فشار انرژی تاریک منفی می‌باشد یعنی $P = -\rho$ پس داریم که

$$\rho \propto a^{\dot{}}. \quad (۸۳-۲)$$

ازین رو چگالی انرژی مقداری ثابت است و چون چگالی انرژی تغییر نمی‌کند پس انرژی در عالم منبسط شونده باید تولید شود.

یک کاندیدای مناسب برای چگالی انرژی ثابت، انرژی خلا^۱ نامیده می‌شود که در جهان منبسط شونده، این انرژی متناسب با حجم افزایش می‌یابد. در نظریه میدان کوانتومی، انرژی خلا منجر به تانسور انرژی-تکانه زیر می‌شود

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}. \quad (۸۴-۲)$$

این تانسور متناسب با متریک فضا-زمان است که در آن $P_{vac} = -\rho_{vac}$ می‌باشد. مشکل پیش‌بینی نظریه میدان کوانتومی در آن است که اندازه انرژی خلا ρ_{vac} باید خیلی بزرگ‌تر از مقداری باشد که از مشاهدات کیهان‌شناختی به دست آمده است.

مشاهده انرژی تاریک باعث شد که مفهوم ثابت کیهان‌شناسی Λ نیز دوباره زنده شود [۸۹]. این ثابت توسط اینشتین برای رسیدن به جهان ایستا (یعنی عالمی که فضا در آن انبساط و انقباض ندارد)، به سمت چپ معادله میدان اینشتین اضافه شد و از طرفی در آن بقای تانسور انرژی-تکانه نیز، صادق است یعنی $\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0$. بنابراین داریم

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \Lambda \pi G T_{\mu\nu}. \quad (۸۵-۲)$$

با استفاده از رابطه فوق می‌توانیم برای معادله (۸۴-۲) را به شکل زیر تعریف کنیم

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{\Lambda \pi G} g_{\mu\nu} \equiv \rho_\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (۸۶-۲)$$

انرژی تاریک توصیف‌کننده حالتی از سیال است که در آن معادله حالت به شکل $w = -1$ می‌باشد و حتی ممکن است این معادله با زمان نیز تغییر کند. این نقض نظریه میدان کوانتومی است که نمی‌تواند اندازه انرژی خلا مشاهده شده را توضیح دهد [۹۰].

چون هیچ نشانه‌ای برای انحراف از مقدار $w = -1$ وجود ندارد، بنابراین از عبارات انرژی خلا، ثابت کیهان‌شناختی و انرژی تاریک به‌طور متناوب استفاده می‌کنیم.

مشکل ثابت کیهان‌شناختی به بخش نظری آن مربوط می‌شود [۹۱] ولی از لحاظ رصدی این ثابت توانست سن عالم و سن قدیمی‌ترین ستارگان درون‌اش را به خوبی به دست آورد، ولی تنها مشکل آنجاست که مقادیر مشاهده شده بسیار کوچک‌تر از مقیاس‌های فیزیک ذرات است. در ادامه خواهیم دید که مقدار

^۱ Vacuum energy

انرژی خلا برابر است با [۹۲]

$$\rho_{\Lambda} \approx 6 \times 10^{-10} Jm^{-3}. \quad (۸۷-۲)$$

حال برای مقایسه مقدار فوق با آن چیزی که در مقیاس فیزیک ذرات انتظار داریم باید از واحدهای دیگری که در فیزیک انرژی-بالا مرسوم است، استفاده کنیم. برای این کار به جای استفاده از واحد ژول (J)، از واحد الکترون ولت eV ^۱ استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم که

$$\rho_{\Lambda} \approx (10^{-3} eV)^4 \quad (۸۸-۲)$$

که در آن مقدار انرژی خلا، $M_{\Lambda} = 10^{-3} eV$ ، از مقیاس‌های موجود در فیزیک ذرات بسیار کوچک‌تر است.

۴-۳-۲ انحنا-فضا-زمان

در این بخش می‌خواهیم ببینیم که چگونه ماده و انرژی در عالم خواستگاه دینامیک فضا-زمان می‌باشد. برای این کار ابتدا به محاسبه تانسور اینشتین می‌پردازیم

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (۸۹-۲)$$

که در آن $R_{\mu\nu}$ ، تانسور ریچی و $R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ اسکالر ریچی می‌باشند. دوباره یادآوری می‌کنیم که تانسور ریچی از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}. \quad (۹۰-۲)$$

حال با محاسبه روابط فوق برای فضا-زمان FLRW، مولفه‌های غیر صفر تانسور ریچی ازین قراراند

$$R_{..} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (۹۱-۲)$$

$$R_{ij} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2 R^2} \right] g_{ij}. \quad (۹۲-۲)$$

توجه کنید که در رابطه فوق، $R_{ij} \propto g_{ij}$ است چرا که باید با همسانگردی و همگنی عالم در توافق باشد.

^۱ $1 J \approx 6/2 \times 10^{18} eV, \quad \hbar c^2 \approx 2/0 \times 10^{-9} eV m$

حال با به دست آوردن تانسور ریچی می‌توانیم اسکالر ریچی را نیز به دست آوریم و خواهیم داشت

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$= -R_{..} + \frac{1}{a^2} R_{ii} = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2 R^2} \right]. \quad (93-2)$$

بنابراین مولفه‌های غیر صفر تانسور اینشتین $G^\mu_\nu = g^{\mu\lambda} G_{\lambda\nu}$ ازین قراراند

$$G^0_0 = -3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2 R^2} \right] \quad (94-2)$$

$$G^i_j = - \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2 R^2} \right] \delta^i_j. \quad (95-2)$$

۵-۳-۲ معادلات فریدمان

حال همه چیز برای محاسبه تانسور اینشتین مهیاست، برای این کار ابتدا از $G^0_0 = \Lambda \pi G T^0_0 = -\Lambda \pi G \rho$ استفاده می‌کنیم که با این کار به معادله اول فریدمان می‌رسیم

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\Lambda \pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2 R^2}, \quad (96-2)$$

که در آن ρ نشان دهنده جمع توزیع چگالی انرژی در عالم است. این معادله بنیادی تحول ضریب مقیاس $a(t)$ را نشان می‌دهد.

همچنین بخش فضایی معادله اینشتین، $G^i_j = \Lambda \pi G T^i_j$ ، منجر به دومین معادله فریدمان می‌شود که به معادله ریچادوری^۱ نیز معروف است

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\Lambda \pi G}{3} (\rho + 3P). \quad (97-2)$$

معادله فوق را می‌توانیم با گرفتن مشتق زمانی از معادله اول فریدمان (۹۶-۲) و با استفاده از معادله پیوستگی (۷۹-۲) برای $\dot{\rho}$ نیز به دست آوریم.

حال با در نظر گرفتن پارامتر هابل $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ ، معادله اول فریدمان را به شکل زیر می‌نویسیم

$$H^2 = \frac{\Lambda \pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2 R^2}. \quad (98-2)$$

^۱ Raychaudhuri equation

حال اگر جهان را از نظر فضایی، تخت در نظر بگیریم یعنی $k = 0$ ، می‌توانیم پارامتر چگالی بحرانی را برای جهان کنونی مان به شکل زیر تعریف کنیم [۹۲]

$$\begin{aligned}\rho_{crit,0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1/9 \times 10^{-29} h^2 \text{ grams cm}^{-3} \\ &= 2/8 \times 10^{11} h^2 M_\odot \text{ Mpc}^{-3} \\ &= 1/1 \times 10^{-5} h^2 \text{ protons cm}^{-3}.\end{aligned}\quad (99-2)$$

بنابراین پارامتر بدون بعد چگالی را اینگونه به دست می‌آوریم

$$\Omega_{i,0} \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{crit,0}}, \quad i = r, m, \Lambda, \dots \quad (100-2)$$

با تعریف این پارامتر می‌توانیم معادله فریدمان (۹۸-۲) را بازنویسی کنیم

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda, \quad (101-2)$$

که در آن پارامتر چگالی انحنا به شکل $\Omega_k \equiv -k/(R_0 H_0)^2$ تعریف می‌شود. توجه کنید که اگر پارامتر انحنا k مقداری مثبت باشد، پارامتر چگالی انحنا منفی خواهد بود.

حال با محاسبه هر دو سمت معادله فریدمان (۱۰۱-۲) برای زمان کنونی مان با در نظر گرفتن $a(t_0) \equiv 1$ داریم

$$1 = \underbrace{\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda}_{\equiv \Omega_0} + \Omega_k. \quad (102-2)$$

بنابراین پارامتر انحنا را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\Omega_k = -\frac{k}{(R_0 H_0)^2} = 1 - \Omega_0. \quad (103-2)$$

یک کار مهم در کیهان‌شناسی، اندازه‌گیری پارامترهای موجود در معادله فریدمان (۱۰۱-۲) است تا با استفاده از آن بتوانیم ترکیب عالم را تعیین کنیم.

۶-۳-۲ حل دقیق معادله فریدمان

در این بخش می‌خواهیم معادله دیفرانسیلی غیر خطی فریدمان را با در نظر گرفتن تقریب‌هایی که تا حدی سازگار با جهان واقع هست، حل کنیم.

ابتدا جهان تک مولفه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم که یک جهان تخت داریم که از نظر فضایی دارای انحنای صفر است ($k = 0$) و تنها با یک سیال پر شده است (به عنوان مثال این سیال می‌تواند تابش باشد، سپس ماده و در نهایت انرژی خلا). حال می‌توانیم معادله فریدمان (۲-۱۰۱) را با استفاده از معادله حالت w_i به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\frac{\dot{a}}{a} \approx H_0 \sqrt{\Omega_i} a^{-\frac{2}{3}(1+w_i)}. \quad (2-104)$$

حال با انتگرال‌گیری از معادله فوق، به وابستگی زمانی ضریب مقیاس دست خواهیم یافت

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3}} & \text{ماده-غالب} \\ t^{\frac{2}{3}(1+w_i)} & w_i \neq -1 \\ t^{\frac{1}{3}} & \text{تابش-غالب} \\ e^{H_0 \sqrt{\Omega_i} t} & w_i = -1 \end{cases} \quad (2-105)$$

همچنین وابستگی ضریب مقیاس بر اساس زمان همدیس نیز به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \eta^2 & \text{ماده-غالب} \\ \eta^{2/(1+3w_i)} & w_i \neq -1 \\ \eta & \text{تابش-غالب} \\ (-\eta)^{-1} & w_i = -1 \end{cases} \quad (2-106)$$

در حالتی که جهان تنها از ماده تشکیل شده باشد حل معادله فریدمان منجر به رابطه زیر می‌شود

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2-107)$$

با چنین فرضی که به جهان اینشتین-دوسیته^۱ معروف است [۹۳]، می‌توانیم با استفاده از ثابت هابل H_0 به سن جهان دست یابیم، بنابراین داریم

$$H_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{t_*}. \quad (2-108)$$

حال اگر مقدار مشاهده شده ثابت هابل یعنی $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [۹۴]، را در رابطه فوق قرار دهیم به سن جهان در عصر حاضر دست می‌یابیم

$$t_* = \frac{2}{3} H_0^{-1} \approx 9 \times 10^9 \text{ yrs}. \quad (2-109)$$

^۱ Einstein-de Sitter universe

که این مقدار کوچک‌تر از سن قدیمی‌ترین ستاره‌ی کشف شده در عالم است. در ادامه به رفع این مشکل خواهیم پرداخت.

می‌توانیم جهان را تنها با عبارت انحنای آن در نظر بگیریم که در این صورت $w_k = -\frac{1}{3}$ است و تنها در حالتی معادله فریدمان با این تقریب سازگار است که در آن $k = -1$ باشد، بنابراین جواب معادله برابر است یا

$$a(t) = \frac{t}{t_*}. \quad (2-110)$$

جهان توصیف شده با این تقریب به جهان میلن^۱ معروف است [۹۵، ۹۶].

حالت دیگری برای حل معادله فریدمان با تقریب جهان تک مولفه‌ای وجود دارد و آن هم در نظر گرفتن ثابت کیهانشناسی Λ و $w_\Lambda = -1$ می‌باشد که این حالت به فضای دوسویه معروف است. اما این حل به دلیل تکینگی در نقطه $t = 0$ (که باعث می‌شود ضریب مقیاس به صفر میل کرده و چگالی به شکل $\rho \propto t^{-2}$ واگرا شود) تقریب مناسب و خوبی نمی‌باشد. بنابراین تمامی حالت‌های ممکن برای جهان تک مولفه‌ای را بیان کردیم.

حال بیاییم جهان دو مولفه‌ای را مورد بررسی قرار دهیم همانطور که معلوم است در این بخش از تلفیق دو سیال برای حل معادله فریدمان استفاده می‌کنیم. اجازه دهید همانطور که قبلاً اشاره کردیم برای حل این معادله از زمان همدیس η استفاده کنیم. با بهره‌گیری از علامت پرایم به عنوان مشتق نسبت به زمان همدیس و تعاریف $\dot{a} = a'/a$ و $\ddot{a} = a''/a^2$ معادلات اول (۲-۹۶) و دوم فریدمان (۲-۹۷) به شکل‌های زیر بازنویسی می‌شوند

$$(a')^2 + \frac{k}{R_*^2} a^2 = \frac{\Lambda \pi G}{3} \rho a^4, \quad (2-111)$$

$$a'' + \frac{k}{R_*^2} a = \frac{4\pi G}{3} (\rho - 3P) a^3. \quad (2-112)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که جهان از ماده و تابش تشکیل شده باشد بنابراین چگالی کل برابر است با

$$\rho \equiv \rho_m + \rho_r = \frac{\rho_{eq}}{2} \left[\left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^4 \right], \quad (2-113)$$

زیروند eq نشان‌دهنده برابری ماده-تابش است. از آنجا که $\rho_r - 3P_r = 0$ است (چرا که تابش در رابطه (۲-۱۱۲) به عنوان عبارت چشمه، توزیع نمی‌شود) و علاوه بر آن چون $\rho_m a^3 = \frac{1}{2} \rho_{eq} a_{eq}^3$ ثابت است و

^۱ Milne universe

• $k = 0$ می باشد پس رابطه (۲-۱۱۲) را می توانیم اینگونه بنویسیم

$$a'' = \frac{2\pi G}{3} \rho_{eq} a_{eq}^2. \quad (2-114)$$

با حل معادله فوق به جواب زیر می رسیم

$$a(\eta) = \frac{\pi G}{3} \rho_{eq} a_{eq}^2 \eta^2 + C\eta + D, \quad (2-115)$$

که در آن C و D ثابت های انتگرال اند. با استفاده از دو شرط $a(\eta = 0) \equiv 0$ و $D = 0$ و همچنین با جایگذاری معادلات (۲-۱۱۳) و (۲-۱۱۵) در رابطه (۲-۱۱۱)، ضریب C را به دست می آوریم

$$C = \left(\frac{4\pi G}{3} \rho_{eq} a_{eq}^4 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2-116)$$

بنابراین جواب نهایی معادله (۲-۱۱۵) به شکل زیر در می آید

$$a(\eta) = a_{eq} \left[\left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right) \right], \quad (2-117)$$

که در آن η_* به شکل زیر تعریف می شود

$$\eta_* \equiv \left(\frac{\pi G}{3} \rho_{eq} a_{eq}^4 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\eta_{eq}}{\sqrt{2-1}}. \quad (2-118)$$

برای حالتی که $\eta \ll \eta_{eq}$ باشد به حد تابش-غالب^۱ می رسیم یعنی $a \propto \eta$ و برای $\eta \gg \eta_{eq}$ به حد ماده-غالب^۲ یعنی $a \propto \eta^2$ دست خواهیم یافت.

حال بیاییم فرض کنیم که جهان شامل ماده و انحنای فضایی باشد. قبل از کشف انرژی تاریک، باور بر آن بود که در عصر متاخر، ماده ای بدون فشار بر عالم غالب بود که این جهان به واسطه انحنای فضایی آن مشخص می شود. اگر انحنای جهان مثبت باشد، در این صورت، عالم دوباره رمبش کرده و با مه رمب^۳ خاتمه می یابد [۷۹]. در حالی که با انحنای منفی، جهان برای همیشه انبساط می یابد.

با تعریف پارامتر هابل همدیس به شکل $\mathcal{H} \equiv a'/a$ ، دو معادله فریدمان (۲-۱۱۱) و (۲-۱۱۲) را

بازنویسی می کنیم

$$\mathcal{H}^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m a^2, \quad (2-119)$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\eta} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_m a^2. \quad (2-120)$$

با ترکیب دو معادله فوق و حذف وابستگی ρ_m در آن، منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\sqrt[3]{\frac{d\mathcal{H}}{d\eta}} + \mathcal{H}^{\sqrt[3]{}} + \frac{k}{R^{\sqrt[3]{}}} = 0. \quad (121-2)$$

حال اگر از مختصه زمان بدون بعد $\theta \equiv \eta/R$ استفاده کرده و همچنین پارامتر هابل را به شکل $\tilde{\mathcal{H}} \equiv R \cdot \mathcal{H}$ تعریف کنیم آنگاه معادله فوق را اینگونه بازنویسی می‌کنیم

$$\sqrt[3]{\frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{d\theta}} + \tilde{\mathcal{H}}^{\sqrt[3]{}} + k = 0. \quad (122-2)$$

با حل این معادله دیفرانسیلی به جواب‌های زیر دست می‌یابیم

$$\tilde{\mathcal{H}}(\theta) = \frac{1}{a} \frac{da}{d\theta} = \begin{cases} \cot(\frac{\theta}{\sqrt[3]{}}) & k = +1 \\ \frac{\theta}{\sqrt[3]{}} & k = 0 \\ \coth(\frac{\theta}{\sqrt[3]{}}) & k = -1 \end{cases} \quad (123-2)$$

همچنین با انتگرال‌گیری از رابطه فوق به تحول ضریب مقیاس می‌رسیم

$$a(\theta) = A \begin{cases} \sin^{\sqrt[3]{}}(\frac{\theta}{\sqrt[3]{}}) & k = +1 \\ \theta^{\sqrt[3]{}} & k = 0 \\ \sinh^{\sqrt[3]{}}(\frac{\theta}{\sqrt[3]{}}) & k = -1 \end{cases}, \quad (124-2)$$

که در آن A ثابت انتگرال است. با استفاده از (۱۲۴-۲) می‌توانیم رابطه بین زمان همدیس و فیزیکی را بدست آوریم. در این صورت خواهیم داشت

$$t = R \cdot \int a(\theta) d\theta = \frac{R \cdot A}{\sqrt[3]{}} \begin{cases} \theta - \sin(\theta) & k = +1 \\ \theta^{\sqrt[3]{}} & k = 0 \\ \sinh(\theta) - \theta & k = -1 \end{cases} \quad (125-2)$$

دو معادله (۱۲۴-۲) و (۱۲۵-۲)، $a(t)$ را به شکل پارامتری تعیین می‌کند.

انبساط حداکثری جهانی با انحنای مثبت، از معادله فریدمان زیر بدست می‌آید

$$\frac{H^{\sqrt[3]{}}}{H^{\sqrt[3]{}}} = \frac{\Omega_0}{a^{\sqrt[3]{}}} + \frac{1 - \Omega_0}{a^{\sqrt[3]{}}}. \quad (126-2)$$

که حول نقطه بازگشتی^۱، نرخ انبساط جهان باید صفر باشد، $H(t) = 0$ ، بنابراین داریم

$$a_{max} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}, \quad (127-2)$$

که این رابطه نشان می‌دهد که ثابت انتگرال A در روابط (۱۲۴-۲) و (۱۲۵-۲) باید برابر با $A = \frac{\Omega_0}{|\Omega_0 - 1|}$ باشد.

حال بیاییم جهان را با عبارات ثابت کیهان‌شناسی و انحنا فضاوی در نظر بگیریم، در این صورت معادله فریدمان اینگونه نوشته می‌شود

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2 R_0^2}, \quad (128-2)$$

که به ازای $\Lambda > 0$ ، جواب‌های معادله فوق به شکل زیر در می‌آیند

$$a(t) = A \begin{cases} \cosh(\alpha t) & k = +1 \\ \exp(\alpha t) & k = 0 \\ \sinh(\alpha t) & k = -1 \end{cases}, \quad (129-2)$$

که در آن $\alpha \equiv \sqrt{\Lambda/3}$ است. همچنین با فرض $\Lambda < 0$ ، تنها برای حالت $k = -1$ جواب داریم که در این صورت به فضای ضد-دوسیه^۲ دست می‌یابیم [۹۷] یعنی

$$a(t) = A \sin(\alpha t). \quad (130-2)$$

که در آن $\alpha \equiv \sqrt{-\Lambda/3}$ تعریف شده است.

به عنوان آخرین تقریب برای حل معادله فریدمان، جهانی تخت را با ماده و ثابت کیهان‌شناسی مثبت در نظر می‌گیریم که این تقریب برای جهان کنونی مان مناسب است. معادله فریدمان با این شرط به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda, \quad (131-2)$$

که در آن $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ است. با حل این معادله به جواب زیر دست خواهیم یافت

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \alpha t \right), \quad (132-2)$$

که در آن $\alpha \equiv \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0$ می‌باشد. حال اگر $a(t_0) \equiv 1$ در نظر بگیریم، در این صورت می‌توانیم سن عالم را از رابطه زیر به دست آوریم

$$t_0 = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda} H_0} \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right), \quad (2-133)$$

که با جایگذاری مقادیر مشاهده شده پارامترهای کیهان‌شناسی یعنی $\Omega_m = 0.32$ و $\Omega_\Lambda = 0.68$ ، سن عالم به دست می‌آید

$$t_0 = 0.96 H_0^{-1} \approx 14 \times 10^9 \text{ yrs}, \quad (2-134)$$

که این حل مشکل به وجود آمده در جهان اینشتین-دوسیته را حل می‌کند.

۴-۲ جهان ما

در بخش پایانی این فصل می‌خواهیم به پارامترهایی که در توصیف عالم ضروری هستند، اشاره کنیم. یکی از این کمیت‌های مهم که به‌طور دقیق اندازه‌گیری شده است، چگالی فوتون می‌باشد. طبق داده‌های به دست آمده از ماهواره کوبی^۱ [۹۸]، دمای طیف جسم سیاه از تابش پس‌زمینه‌ی کیهانی^۲ به مقدار زیر است

$$T_0 = (2.726 \pm 0.0013) \text{ K}. \quad (2-135)$$

با این دما می‌توانیم چگالی تعداد و چگالی انرژی فوتون‌های متاخر را به دست آوریم

$$n_{\gamma,0} = 0.24 \times \left(\frac{K_B T_0}{\hbar} \right)^3 \approx 410 \text{ photons cm}^{-3} \quad (2-136)$$

$$\rho_{\gamma,0} = 0.66 \times \frac{(K_B T_0)^4}{\hbar^3} \approx 4/6 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}, \quad (2-137)$$

که در آن K_B و $\hbar$ به ترتیب ثابت بولتزمان و ثابت پلانک می‌باشد. می‌توانیم با استفاده از چگالی بحرانی، چگالی فوتون‌ها را بدین شکل بازنویسی کنیم

$$\Omega_\gamma \approx 5/35 \times 10^{-5}. \quad (2-138)$$

^۱ Cosmic microwave background ^۲ COBE Satellite

به غیر از فوتون‌ها، جهان با تابش نوترینوهای متاخر (یا نوترینوهای پس‌زمینه کیهانی^۱) نیز پر شده است. بنابراین با توجه به نسبیتی بودن نوترینوها که چگالی انرژی‌شان ۶۸٪ فوتون‌های متاخر می‌باشد، چگالی نوترینوها برابر با $\Omega_\nu \approx 3/64 \times 10^{-5}$ است و چگالی کل تابش نیز به مقدار زیر می‌باشد

$$\Omega_r = 8/99 \times 10^{-5}. \quad (2-139)$$

از آنجا که در واقعیت جرم نوترینوها بسیار کم می‌باشد، در زمان متاخر به ذرات غیر نسبیتی تبدیل می‌شوند که این خود باعث افزایش چگالی‌شان نسبت به آن فوتون‌ها می‌شود، بنابراین با مشاهدات اخیر، این چگالی در بازه $0/003 < \Omega_\nu < 0/012$ تعریف می‌شود. حد پایین این چگالی در آزمایشات نوسان نوتریتو و حد بالای آن از کیهان‌شناسی به دست آمده است.

یک پارامتر مهم دیگر کیهان‌شناسی، انحنای فضایی می‌باشد. انحنای فضا، باعث تغییر فاصله قطری زاویه‌ای به سطح آخرین پراکندگی^۲ می‌شود، که این خود با تغییر زاویه‌ای که در آن مقیاس فیزیکی ثابت، مشاهده شده است، اتفاق می‌افتد. بنابراین مشاهدات پیشنهاد می‌دهند که حد بالا برای هر مقدار از انحنای فضایی به شکل زیر تعریف شود

$$|\Omega_k| < 0/005, \quad (2-140)$$

که در آن $\Omega_k \equiv -k/(R \cdot H)^2$ می‌باشد. این قید می‌تواند به عنوان حد پایینی که بر روی مقیاس انحنای $R \cdot H > 14$ می‌گذاریم نیز نوشته شود.

چگالی باریون‌ها نیز اهمیت ویژه‌ای دارد چرا که باریون‌ها بر فراوانی عناصر شیمیایی نوری، که در مه‌بانگ تولید شده است، اثر می‌گذارد. مشاهدات تابش پس‌زمینه کیهانی و هسته‌زایی^۳ مه‌بانگ نشان می‌دهد

$$\Omega_b \approx 0/05. \quad (2-141)$$

بنابراین چگالی تعداد باریون‌ها در عصر حاضر برابر است با

$$n_{b,\cdot} \approx \frac{\rho_{b,\cdot}}{m_p c^2} = \frac{\Omega_b \rho_{crit,\cdot}}{m_p} \approx 0/3 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-3}. \quad (2-142)$$

با مقایسه رابطه فوق با چگالی فوتون‌ها (۲-۱۳۶)، نسبت باریون به فوتون را به دست می‌آوریم

$$\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} \approx 6 \times 10^{-10}. \quad (2-143)$$

همچنین بیشتر ماده جهان کنونی مان به شکل ماده تاریک است که چگالی ماده تاریک برابر است با

$$\Omega_c \approx 0.27. \quad (2-144)$$

دلیل زیروند c این است که ما فرض می‌کنیم ماده تاریک به شکل سرد با معادله حالت $w_c \approx -1$ می‌باشد. حال مجموع چگالی باریون‌ها و چگالی ماده تاریک، چگالی کل ماده عالم را شکل می‌دهد

$$\Omega_m = 0.32. \quad (2-145)$$

هرچه به زمان قبل‌تر برمی‌گردیم، چگالی تابش نقش مهم‌تری را نسبت به چگالی ماده ایفا می‌کند که در این حالت ضریب مقیاس در برابری ماده-تابش به شکل زیر تعریف می‌شود

$$a_{eq} = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} = 2/9 \times 10^{-4}, \quad (2-146)$$

که مطابق با آن، انتقال به سرخ برابر با $z_{eq} = 3400$ است.

همچنین بیشتر چگالی انرژی عالم نیز به شکل انرژی تاریک است که این انرژی خود باعث شتاب انبساط عالم کنونی مان می‌شود. (با توجه به درخشش ظاهری ابرنواخترهای نزدیک.) مقدار این چگالی نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Omega_\Lambda \approx 0.68, \quad (2-147)$$

که در آن معادله حالت به نظر می‌رسد که برابر با $w_\Lambda \approx -1$ باشد. همچنین ضریب مقیاس در برابری ماده-انرژی تاریک ازین قرار است

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right) = 0.77, \quad (2-148)$$

که مطابق با آن انتقال به سرخ برابر با $z_{m\Lambda} = 0.3$ می‌باشد.

همچنین با انتگرال‌گیری از معادله‌ی فریدمان، به رابطه بین زمان و ضریب مقیاس دست می‌یابیم

$$H \cdot t = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_k}}. \quad (2-149)$$

اگر ضریب مقیاس را برابر با یک در نظر بگیریم آنگاه با حل انتگرال فوق به سن عالم می‌رسیم

$$t_* = 13/8 \text{ Gyr}. \quad (2-150)$$

و همچنین با در نظر گرفتن مقادیر $a_{eq} = 2/9 \times 10^{-4}$ و $a_{m\Lambda} = 0/77$ ، زمان برابری ماده-تابش و ماده-انرژی تاریک به ترتیب برابر با مقادیر زیر می‌شوند

$$t_{eq} = 50000 \text{ yrs}, \quad (2-151)$$

$$t_{m\Lambda} = 10/2 \text{ Gys}. \quad (2-152)$$

در عصر حاضر چگالی انرژی تاریک هم مرتبه بزرگی ماده در این دوره است که به چرایی این مشکل، مسئله انطباق^۱ گفته می‌شود. مقیاس‌های زمانی بالا نشان می‌دهد که بیشتر زمان در انتقال به سرخ پایین در عصر ماده-غالب سپری شده است.

نتیجه‌گیری

با توجه به زیربنای ریاضیاتی‌ای که در فصل ۱ برای توصیف نسبیت عام معرفی کردیم، در این فصل سعی بر استفاده از آن‌ها کرده تا بتوانیم به درک مفاهیم کیهان‌شناختی برسیم. در بخش ۱-۲، ابتدا به‌طور مفصل به بررسی هندسه فضا-زمان برای توصیف عالم پرداختیم و سپس با متریک FLRW برای این کار آشنا شدیم. در بخش ۲-۲، توانستیم با استفاده از متریک FLRW، به محاسبه ژئودزی یا همان مسیر حرکت یک ذره یا یک جسم در بستر فضا-زمان FLRW برسیم. در ادامه نیز پارامتر انتقال به سرخ را به تفصیل بررسی کرده و در انتهای این بخش، مفهوم فاصله را توصیف کردیم.

در بخش ۳-۲، به‌طور کامل به بررسی معادله میدان اینشتین پرداختیم و با استفاده از متریک FLRW و در نظر گرفتن سیال کامل برای تانسور انرژی-تکانه به معادلات فریدمان و ریچادوری دست‌یافتیم و سپس حل دقیق این معادلات را به دست آوردیم. در پایان این فصل نیز با استفاده از داده‌های رصدی و مشاهداتی، پارامترهای کیهان‌شناختی‌ای که در بخش‌های قبل استخراج کردیم را برای عالم کنونی مان محاسبه کردیم.

^۱ Coincidence problem

فصل ۳

گرانش دوگانه متریک-پالاتینی

در این فصل به یک دسته دیگری از نظریات تعمیم یافته گرانشی (مانند نظریه برنز-دیکی) خواهیم پرداخت که در آن به جای جمله هیلبرت-اینشتین از جمله تصحیحی پالاتینی $f(R)$ استفاده می‌کنیم. نوع دوگانه از نظریه گرانش تعمیم یافته، به طور کلی از جایی نشأت می‌گیرد که در پس زمینه پالاتینی [۶۳]، از روش‌های کوانتیده‌سازی اختلالی استفاده می‌کنیم که ارتباط جالبی به هندسه‌های غیراختلالی کوانتومی دارد [۶۴]. نظریات متریک-پالاتینی، یک نمایش اسکالر-تانسوری غیر استاندارد از میدان اسکالر دینامیکی ارائه می‌دهند که در آن احتیاجی به جرم‌دار بودن میدان وجود ندارد. در ابتدای این فصل، به نظریات اسکالر-تانسوری می‌پردازیم و در آن تبدیلات هم‌مدیس و تفاوت چارچوب‌های اینشتین و جوردن را مورد واکاوی قرار می‌دهیم. سپس کنش و معادلات گرانش دوگانه متریک-پالاتینی را بررسی خواهیم کرد.

۳-۱ نظریات اسکالر-تانسوری و تبدیلات هم‌مدیس

۳-۱-۱ تبدیلات هم‌مدیس

M را به عنوان یک منیفلد n بعدی در نظر می‌گیریم که در آن متریک g_{ab} با هر علامتی تعریف شده است. اگر Ω یک تابع هموار و اکیداً مثبت باشد، آنگاه به متریک $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ گفته می‌شود که تحت تبدیل هم‌مدیس^۱ متریک g_{ab} می‌باشد [۴۲، ۴۳]. باید خاطر نشان کرد که تبدیل هم‌مدیس، عموماً مرتبط با نگاشت هموارریخت M نیست. (باید گفت که در واقع یک هموارریخت $\psi : M \rightarrow M$ که در آن

^۱ Conformal transformation

$(\psi^*g)_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ می‌باشد، به همسنجی یا ایزومتري همدیس^۱ معروف است.) تبدیلات همدیس در بعضی از بخش‌های نسبیت عام ظاهر می‌شوند به‌خصوص در مبحث تختی مجانبی^۲. عملگر مشتق و انحناى متریک $\tilde{g}_{ab}$ به طریق نسبتاً ساده‌ای با این دست از متریک‌ها، g_{ab} ، مرتبط‌اند. در این بخش به استنتاج این روابط می‌پردازیم.

ابتدا باید توجه کنیم که در این مورد، g_{ab} یک متریک لورنتسی است و می‌گوییم بردار v^a نسبت به متریک g_{ab} یک زمان‌گونه، فضاگونه و یا پوچ است اگر و تنها اگر خاصیت مشابه‌ای نسبت به متریک $\tilde{g}_{ab}$ را ارضا کند. آنگاه در این صورت $(\mathcal{M}, g_{ab})$ و $(\mathcal{M}, \tilde{g}_{ab})$ دارای ساختار علی^۳ یکسانی هستند. از طرف دیگر، اگر دو مخروط نوری متریک‌های لورنتسی g_{ab} و $\tilde{g}_{ab}$ در نقطه $p \in \mathcal{M}$ با هم تلاقی داشته باشند، آنگاه در نقطه p ، $\tilde{g}_{ab}$ باید مضربی از g_{ab} باشد به این معنی که $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$.

برای اثبات این گزاره، فرض کنید که $t^a, x_1^a, \dots, x_{n-1}^a$ پایه راست‌هنجاری از g_{ab} باشد، آنگاه $t^a \pm x_i^a$ نسبت به g_{ab} و ازین رو نسبت به $\tilde{g}_{ab}$ صفر است، که نشان می‌دهد نسبت به $\tilde{g}_{ab}$ و t^a و x_i^a عمود است و نرم‌هایشان دارای اندازه یکسان می‌باشند. واقعیت این است که $\tilde{g}_{ab} + 2^{-1}(x_i^a + x_j^a)$ به ازای $i \neq j$ صفر می‌باشد، ازین رو نشان می‌دهد که x_i^a به x_j^a عمود است. بنابراین با صرف نظر از یک مضرب ثابت، $t^a, x_1^a, \dots, x_{n-1}^a$ یک پایه راست‌هنجاری از $\tilde{g}_{ab}$ است. بنابراین چون فضا-زمان‌های $(\mathcal{M}, g_{ab})$ و $(\mathcal{M}, \tilde{g}_{ab})$ دارای ساختار علی یکسانی می‌باشند، پس متریک $\tilde{g}_{ab}$ می‌تواند به‌واسطه یک تبدیل همدیس به g_{ab} مرتبط شود.

از آن جایی که در این موقعیت، دقیقاً نمی‌توان گفت که بین متریک‌های $\tilde{g}_{ab}$ یا g_{ab} ، کدام یک را باید به عنوان متریکی که قابل ادغام باشد (یعنی بتوان اندیس‌هایش را بالا یا پائین برد) در نظر گرفت، بنابراین باید برای رفع این مشکل، متریکی را انتخاب کنیم که در تمامی روابط و فرمول‌ها، قابل ادغام باشد. پس در این وضع معکوس متریک g_{ab} را با g^{ab} نمایش می‌دهیم و برای متریک $\tilde{g}_{ab}$ نیز به همین نحو داریم $\tilde{g}^{ab}$. روشن است که در این بخش نیز $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ می‌باشد چرا که $\tilde{g}^{ab}\tilde{g}_{bc} = g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a$. توجه کنید که $\tilde{g}^{ab}$ با $\tilde{g}_{ab}$ که به‌واسطه g_{ab} ، اندیس‌هایش ادغام شده است، برابر نمی‌باشد.

فرض می‌کنیم که عملگر مشتق ∇_a برای متریک g_{ab} بوده و به همین نحو $\tilde{\nabla}_a$ را عملگر مشتق مربوط به $\tilde{g}_{ab}$ می‌نامیم. رابطه بین دو مشتق ∇_a و $\tilde{\nabla}_a$ از طریق روابط $\tilde{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - C_{ab}^c \omega_c$ و همچنین $C_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd}\{\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab}\}$ داده می‌شوند. بنابراین با معکوس کردن نقش عملگرهای مشتق ∇_a و $\tilde{\nabla}_a$ در معادلاتمان (به این معنی که C_{ab}^c را به شکل $\tilde{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - C_{ab}^c \omega_c$ تعریف کنیم)،

^۱ Conformal isometry ^۲ Asymptotic flatness ^۳ Causal structure

درمی یابیم که

$$C^c_{ab} = \frac{1}{4} \tilde{g}^{cd} \{ \nabla_a \tilde{g}_{bd} + \nabla_b \tilde{g}_{ab} - \nabla_d \tilde{g}_{ab} \}. \quad (۱-۳)$$

با وجود شرط سازگاری با متریک یعنی $\nabla_a g_{bc} = 0$ خواهیم داشت

$$\nabla_a \tilde{g}^{bc} = \nabla_a (\Omega^2 g_{bc}) = 2\Omega g_{bc} \nabla_a \Omega, \quad (۲-۳)$$

ازین رو به دست می آوریم

$$\begin{aligned} C^c_{ab} &= \Omega^{-1} g^{cd} \{ g_{bd} \nabla_a \Omega + g_{ad} \nabla_b \Omega - g_{ab} \nabla_d \Omega \} \\ &= 2\delta^c_{(a} \nabla_{b)} \ln \Omega - g_{ab} g^{cd} \nabla_b \ln \Omega, \end{aligned} \quad (۳-۳)$$

که در آن تانسور C^c_{ab} بر اساس g_{ab} و Ω نوشته شده است.

می توان معادله (۳-۳) را با ژئودزی هایی که نسبت به ∇_a و همچنین $\tilde{\nabla}_a$ می باشند، مقایسه کرد. بردار v^a که مماس بر ژئودزی γ می باشد و همچنین نسبت به عملگر مشتق ∇_a به شکل آفین، پارامتری شده است، رابطه زیر را ارضا می کند

$$v^a \nabla_a v_b = 0. \quad (۴-۳)$$

ازین رو داریم

$$v^a \tilde{\nabla}_a v^b = v^a \nabla_a v^b + v^a C^b_{ac} v^c = 2v^b v^c \nabla_c \ln \Omega - (g_{ac} v^a v^c) g^{bd} \nabla_b \ln \Omega. \quad (۵-۳)$$

بنابراین به طور عمومی γ را نمی توان ژئودزی نسبت به $\tilde{\nabla}_a$ در نظر گرفت. اگرچه در مورد ژئودزی پوچ یعنی $g_{ac} v^a v^c$ ، معادله (۵-۳) در واقع همان معادله ژئودزی (که در اینجا به شکل آفین، پارامتری نشده است) زیر است، تنها با این تفاوت که در آن $\alpha = 2v^c \nabla_c \ln \Omega$ می باشد

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f\omega_c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c, \quad (۶-۳)$$

ازین رو ژئودزی های پوچ به طور همدیس، ناوردا هستند. به این معنی که ژئودزی های پوچ نسبت به ∇_a به واسطه

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\lambda} = c\Omega^2, \quad (۷-۳)$$

با پارامتر آفین $\tilde{\lambda}$ ، برای $\tilde{\nabla}_a$ -ژئودزی‌های مرتبط با پارامتر آفین λ برای ∇_a -ژئودزی‌ها، نسبت به آن دسته از عملگرهای مشتق $\tilde{\nabla}_a$ منطبق‌اند که در آن c یک ثابت است.

رابطه بین انحناهای $\tilde{R}_{abc}{}^d$ مرتبط با $\tilde{\nabla}_a$ و انحناهای $R_{abc}{}^d$ مرتبط با ∇_a با رابطه زیر داده می‌شود

$$R_{abc}{}^d = \tilde{R}_{abc}{}^d - 2 \cdot \nabla_{[a} C^d{}_{b]c} + 2 C^e{}_{c[a} C^d{}_{b]e}. \quad (۸-۳)$$

ازین رو با استفاده از فرمول (۵-۳) برای C_{ab}^d به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abc}{}^d &= R_{abc}{}^d - 2 \nabla_{[a} C^d{}_{b]c} + 2 C^e{}_{c[a} C^d{}_{b]e} \\ &= R_{abc}{}^d + 2 \delta^d_{[a} \nabla_{b]} \nabla_c \Omega - f g^{de} g_{c[a} \nabla_{b]} \nabla_e \ln \Omega \\ &\quad + 2 (\nabla_{[a} \ln \Omega) \delta^d_{b]} \nabla_c \ln \Omega - 2 (\nabla_{[a} \ln \Omega) g_{b]c} g^{df} \nabla_f \ln \Omega \\ &\quad - 2 g_{c[a} \delta^d_{b]} g^{ef} (\nabla_e \ln \Omega) \nabla_f \ln \Omega, \end{aligned} \quad (۹-۳)$$

حال با ادغام کردن اندیس‌های b و d داریم

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ac} &= R_{ac} (n - 2) \nabla_a \nabla_c \ln \Omega - g_{ac} g^{de} \nabla_d \nabla_e \ln \Omega \\ &\quad + (n + 2) (\nabla_a \ln \Omega) \nabla_c \ln \Omega - (n - 2) g_{ac} g^{de} (\nabla_d \ln \Omega) \nabla_e \ln \Omega. \end{aligned} \quad (۱۰-۳)$$

با ادغام کردن معادله فوق با استفاده از $\tilde{g}^{ac} = \Omega^2 g^{ac}$ خواهیم داشت

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} \{ R - 2(n - 1) g^{ac} \nabla_a \nabla_c \Omega - (n - 2)(n - 1) g^{ac} (\nabla_a \ln \Omega) \nabla_e \ln \Omega \}, \quad (۱۱-۳)$$

که در آن $R = g^{ab} R_{ab}$ و $\tilde{R} = \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ab}$ می‌باشند. بنابراین از تعریف تانسور وایل یعنی

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}, \quad (۱۲-۳)$$

درمی‌یابیم که $C_{abc}{}^d$ تحت تبدیل همدیس متریک تغییر نمی‌کند

$$\tilde{C}_{abc}{}^d = C_{abc}{}^d. \quad (۱۳-۳)$$

(باید توجه کنید که چون متریک‌های متفاوتی برای ادغام بر روی اندیس‌های تانسور $\tilde{C}_{abc}{}^d$ و $C_{abc}{}^d$ وجود

دارند، برابری تانسورهای $\tilde{C}_{abc}{}^d$ و $C_{abc}{}^d$ شدیداً به موقعیت اندیس‌ها بستگی دارند. به عنوان مثال، داریم

$C_{abcd} \equiv \tilde{g}_{de} \tilde{C}_{abc}{}^e = \Omega^2 g_{de} C_{abc}{}^e = \Omega^2 C_{abcd}$ معادلات (۱۰-۳) و (۱۳-۳)، نتیجه مطلوبی برای

توصیف این گزاره است که انحنا چگونه تحت تبدیلات همدیس تغییر می‌کند.

در ادامه به ناوردایی همدیس معادلات معینی که شامل متریک هستند، می‌پردازیم. یک معادله را به ازای یک میدان Ψ ، به‌طور همدیس ناوردا می‌گوییم اگر و تنها اگر یک عدد $s \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد (که به وزن همدیس میدان معروف است) به قسمی که Ψ یک جواب برای این معادله با متریک g_{ab} داشته باشد اگر و تنها اگر $\tilde{\Psi} = \Omega^2 \Psi$ یک جواب معادله با متریک $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ باشد. بسیاری از معادلات به ازای میدان‌های فیزیکی، به‌طور همدیس ناوردا هستند و مطالعه رفتار معادلات تحت تبدیلات همدیس برای بسیاری از اهداف ریاضیاتی مهم است [۴۲].

به عنوان یک مثال، نشان می‌دهیم که معادله

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi = 0, \quad (۱۴-۳)$$

به ازای یک میدان اسکالر به‌طور همدیس ناوردا نیست اگر $\dim \mathcal{M} = ۲$ باشد. (در متریک ریمانی، معادله (۱۴-۳)، تعمیم طبیعی از معادله لاپلاس در فضا-زمان خمیده است و در متریک لورنتسی، معادله (۱۴-۳)، همان معادله کلاین-گوردون بدون جرم است.) حال داریم

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b (\tilde{\phi}) &= \Omega^{-2} g^{ab} \tilde{\nabla}_a [\nabla_b (\Omega^s \phi)] \\ &= \Omega^{-2} g^{ab} [\nabla_a \nabla_b (\Omega^s \phi) - C^c_{ab} \nabla_c (\Omega^s \phi)] \\ &= \Omega^{s-2} g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi + (2s + n - 2) \Omega^{s-3} g^{ab} \nabla_a \Omega \nabla_b \phi \\ &\quad + s \Omega^{s-3} \phi g^{ab} \nabla_a \nabla_b \Omega + s(n + s - 3) \Omega^{s-4} \phi g^{ab} \nabla_a \Omega \nabla_b \Omega. \end{aligned} \quad (۱۵-۳)$$

ازین رو در حالت $n = ۲$ و با انتخاب $s = ۰$ ، معادله (۱۵-۳) نشان می‌دهد $\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi = ۰$ می‌شود اگر و تنها اگر $g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi = ۰$ باشد. اگرچه در حالتی که $n \neq ۲$ باشد و انتخاب نکردن مقدار خاصی برای s ، $\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi$ را تنها زمانی صفر خواهیم کرد که $g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi$ را صفر کنیم. بنابراین معادله (۱۴-۳) به‌طور همدیس ناوردا نیست مگر در دو بعد.

اگرچه به ازای $n > ۱$ ، این معادله با یک روش ساده تصحیح شده و ازین رو به‌طور همدیس ناوردا می‌شود. نخست آنکه به ازای $s = ۱ - \frac{n}{2}$ ، در معادله (۱۵-۳)، جمله $\nabla_a \Omega \nabla_b \phi$ حذف می‌شود. با انتخاب s و رفتار انحنا اسکالر R ، تحت تبدیلات همدیس داده شده در معادله (۱۱-۳)، درمی‌یابیم که به ازای $n \neq ۱$ ، افزودن جمله $\alpha R \phi$ به معادله (۱۴-۳)، جمله $\phi g^{ab} \nabla_a \nabla_b \Omega$ و جمله $\phi g^{ab} \nabla_a \Omega \nabla_b \Omega$ را در معادله (۱۵-۳)، به شرط آنکه $\alpha = -\frac{(n-2)}{4(n-1)}$ باشد، حذف خواهند شد. بنابراین با وزن $s = ۱ - \frac{n}{2}$ ، معادله زیر

به طور همدیس ناوردا خواهد شد

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - \frac{n-2}{4(n-1)}R\phi = 0, \quad (16-3)$$

چرا که داریم

$$\left(\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b - \frac{n-2}{4(n-1)}\tilde{R}\right)\left[\Omega^{1-\frac{n}{4}}\phi\right] = \Omega^{-1-\frac{n}{4}}\left[g^{ab}\nabla_a\nabla_b - \frac{n-2}{4(n-1)}R\right]\phi. \quad (17-3)$$

ازین رو معادله (۱۶-۳)، به طور همدیس، تعمیم ناوردایی برای هندسه خمیده معادلات لاپلاس و کلاین-گوردون در فضاهاى تخت میسر می سازد.

در ادامه نشان می دهیم که معادلات ماکسول به طور همدیس، در چهار بعد ناوردا هستند یعنی

$$g^{ac}\nabla_c F_{ab} = 0, \quad (18-3)$$

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0,$$

که داریم

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{ac}\tilde{\nabla}_c(\Omega^s F_{ab}) &= \Omega^{-2}g^{ac}\{\nabla_c(\Omega^s F_{ab}) - C_{ca}^d F_{db} - C_{cb}^d \Omega^s F_{ad}\} \\ &= \Omega^{s-2}g^{ac}\nabla_c F_{ab} + (n-4+s)\Omega^{s-3}g^{ac}F_{ab}\nabla_c\Omega. \end{aligned} \quad (19-3)$$

از طرف دیگر

$$\tilde{\nabla}_{[a}(\Omega^s F_{bc])} = \Omega^s\nabla_{[a}F_{bc]} + s\Omega^{s-1}(\nabla_{[a}\Omega)F_{bc]}. \quad (20-3)$$

ازین رو معادلات (۱۹-۳) و (۲۰-۳) نشان می دهند که به ازای $n \neq 4$ ، معادلات ماکسول به طور همدیس ناوردا نیستند اما در حالت چهار بعد، ناوردایی همدیس با وزن همدیس $s=0$ صادق است.

سرانجام، به ویژگی های ناوردایی همدیس معادله بقا^۱ توجه خواهیم کرد

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad (21-3)$$

که در آن $T^{ab} = T^{ba}$ می باشد. حال می توان به دست آورد

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(\Omega^s T^{ab}) &= \nabla_a(\Omega^s T^{ab}) + C_{ac}^a \Omega^s T^{cb} + C_{ac}^b \Omega^s T^{ac} \\ &= \Omega^s \nabla_a T^{ab} + (s+n+2)\Omega^{s-1}T^{ab}\nabla_a\Omega - \Omega^{s-1}g^{ba}T\nabla_a\Omega, \end{aligned} \quad (22-3)$$

که در آن $T = g^{ab}T_{ab}$ است. ازین رو می‌بینیم که معادله (۳-۲۱) به‌طور همدیس ناوردا نیست. اضافه بر معادله بقا (۳-۲۱) و شرط $T^{ab} = T^{ba}$ ، اگر T را برابر با صفر قرار دهیم، آنگاه معادله بقا (۳-۲۱) با فرض $s = -n - 2$ به‌طور همدیس ناوردا می‌شود. بالعکس، فرض کنید که تانسور تنش-انرژی یک میدان ناوردا ی همدیس، تحت تبدیلات همدیس متریک و متغیرهای میدان، به‌طور همدیس ناورداست به این معنی که $T^{ab} \rightarrow \tilde{T}^{ab} = \Omega^w T^{ab}$. (در اینجا به جای نمادگذاری s از w استفاده کردیم چرا که لازم نیست، وزن همدیس T^{ab} با وزن همدیس میدان برابر باشد). آنگاه معادله بقا، هم در فضای اصلی و هم در فضای انتقال یافته همدیسی ارضا می‌شود. ازین رو معادله (۳-۲۲) نشان می‌دهد که باید $T = 0$ باشد. (و $w = -N - 2$). بنابراین اگر تانسور تنش یک میدان همدیس ناوردا، به‌طور ناوردا همدیس باشد، رد آن نیز باید به‌طور مشابه برابر با صفر شود.

چارچوب‌های اینشتین و جوردن

هنگامی که به مقاله اصلی نظریه برنز-دیکی^۱ برمی‌خوریم [۴۴]، متوجه خواهیم شد که دو صورت‌بندی از نظریات اسکالر-تانسوری^۲ وجود دارد. یک حالت از آن، به چارچوب همدیس جوردن^۳ معروف است [۴۵، ۱۸] و یک حالت کم‌تر شناخته شده، چارچوب همدیس اینشتین^۴ است، که با استفاده از یک تبدیل همدیس و بازتعریف میدان اسکالر گرانشی، به چارچوب جوردن مرتبط می‌شود. همچنین در نظریات کالوزا-کلاین^۵ و نظریات مشتق‌های مرتبه بالاتری از گرانش نیز این دو صورت‌بندی که به‌واسطه یک تبدیل همدیس به یکدیگر مرتبط می‌شود، وجود دارد [۴۶، ۴۷]. سوال بزرگ و مهم در این دست از مقالات اینگونه می‌باشد که آیا این دو صورت‌بندی با یکدیگر هم‌ارز هستند یا خیر و این مشکلی است که هنوز در مقالات بر سر آن ابهام و جدل وجود دارد. خیلی از نویسندگان باور بر هم‌ارزی این دو چارچوب همدیس دارند یا حتی فیزیک را در مقیاس انرژی گرانش کلاسیکی و ماده کلاسیکی، همیشه به‌طور همدیس ناوردا می‌بینند اما نویسندگان دیگری نیز وجود دارند که این گزاره را درست نمی‌دانند. نتیجه مهمی، هم در بخش نظری و هم در بخش عملی وجود دارد چرا که کاربردهای زیادی از نظریات اسکالر-تانسوری و از تکنیک‌های تبدیلات همدیس در فیزیک جهان موخر و اخت‌فیزیک وجود دارد. پیش‌بینی‌های نظری با مشاهدات قابل مقایسه‌اند که به شدت بستگی به چارچوب همدیس اتخاذ شده برای انجام محاسبات، دارند.

^۱ Brans-Dicke theory ^۲ Scalar-tensor theories ^۳ Jordan conformal frame ^۴ Einstein conformal frame ^۵ Kaluza-Klein theories

بعلاوه اگر این دو چارچوب با یکدیگر هم‌ارز نباشند، یک مشکل جدی آن است که فیزیکی بودن یکی از این چارچوب‌ها نسبت به چارچوب دیگر ترجیح داده می‌شود و یکی از این چارچوب‌ها باید برای مقایسه با آزمایشات و مشاهدات اخت‌فیزیکی در نظر گرفته شود. یک سوال مهم این است که کدام یک از این چارچوب‌ها قابل استناد بوده و می‌تواند به عنوان نمونه خوبی برای توصیف گرانش کلاسیکی استفاده شود. با توجه به مقالات نویسندگان متفاوت در این مورد [۴۸، ۴۹]، این سه مفهوم را می‌توان برداشت کرد: (۱) صورت‌بندی‌های نظریات اسکالر-تانسوری در دو چارچوب همدیس متفاوت، از نظر فیزیکی هم‌ارزاند. (۲) صورت‌بندی چارچوب جوردن در نظریات اسکالر-تانسوری قابل استناد نیست چرا که چگالی انرژی میدان اسکالر گرانشی در نظریات اسکالر-تانسوری شرط انرژی ضعیف را نقض می‌کند [۵۰] و ازین رو حالت انرژی سیستم ناپایدار شده و تابی نهایت مقدار آن کم و کم‌تر می‌شود [۴۶، ۴۷] که این با نظریه گرانش کلاسیکی در توافق نیست. (البته که در دستگاه‌های کوانتومی، بر خلاف آنچه که گفته شد، حالت‌هایی داریم که دارای چگالی انرژی منفی می‌باشد.) (۳) این مشکل در چارچوب اینشتین وجود ندارد. اگرچه در این چارچوب، نقض اصل هم‌ارزی^۱ به دلیل جفت‌شدگی ناهمسان میدان اسکالری با میدان ماده معمولی به وجود می‌آید [۴۹]. (این مشکل زیاد جدی نیست و قابل مقایسه با آزمایشات موجود در اصل هم‌ارزی است و همچنین به عنوان یک بیان مهم انرژی پائین از نظریات فشرده‌سازی شده (مانند ابررسمان^۲ و ابرگرانش^۳)، تلقی می‌شود [۴۹، ۵۱، ۶۲].)

نقض شرط انرژی ضعیف در نظریات اسکالر-تانسوری که در چارچوب همدیس جوردن صورت‌بندی شده‌اند، توصیفات گرانش کلاسیکی را غیر ممکن می‌سازد به سبب آنکه میدان اسکالر دیلاتونی^۴، در نظریات ابررسمان و ابرگرانش، در همه جا موجود است، آنگاه نظریه برنز-دیکی را به عنوان مدل‌های اختصاری نظریات رسمان در نظر می‌گیرند و در این مورد باید ملاحظاتمان را دوباره تحلیل کنیم. چرا که وجود حالت‌های انرژی منفی در مباحث کوانتومی ممنوع نیست [۵۲، ۵۳] اگرچه در بررسی و مطالعه کلاسیکی نظریات اسکالر-تانسوری، وجود این حالت جایز نیست. اصرار جامعه فیزیک گرانشی برای پذیرفتن برهان انرژی به نفع چارچوب اینشتین، در آن است که چارچوب اینشتین به طریق نسبتاً محضی، صورت‌بندی شده است. به عنوان مثال می‌بینیم که در نظریه برنز-دیکی، نقض شرط انرژی ضعیف به واسطه میدان‌های گرانشی شبه-موجی که در چارچوب جوردن صورت‌بندی شده است، وجود دارد. در حالی که در چارچوب اینشتین برای همین نظریه مشکلی به وجود نمی‌آید. این مثال علمی نیست چرا که فاجعه فروسرخ برای امواج گرانشی اسکالری دارای پیامدهای مشاهداتی زیادی می‌باشد. یک مثال دیگر

^۱ Equivalence principal ^۲ Superstring ^۳ Supergravity ^۴ Dilaton scalar field

که در مقالات اختفیزیکی وجود دارد آن است که اثر دامنه القایی در امواج گرانشی اسکالر-تانسوری بر یک پرتو نوری، در چارچوب جوردن و چارچوب اینشتین متفاوت است. قابل ذکر است که متغیرهای چارچوب اینشتین $(\tilde{g}_{ab}, \tilde{\phi})$ و نه متغیرهای چارچوب جوردن (g_{ab}, ϕ) برای صورت بندی مسئله کوشی^۱، مناسب تراند [۵۴]. در مثالی دیگر به فروپاشی گرانشی، در نظریه برنز-دیکی اشاره می کنیم که در آن شکل غیر کانونی تانسور تنش-انرژی در نظریه برنز-دیکی با استفاده از چارچوب جوردن، به نقض شرط انرژی صفر می انجامد که این باعث کاهش زمان در مساحت افق رویداد سیاه چاله ها^۲ می شود که این برخلاف پیش بینی هایی است که به واسطه ترمودینامیک سیاه چاله ها در نسبیت عام صورت گرفته است [۵۵]. با این اوصاف در مباحث کلاسیکی بهتر است نظریه برنز-دیکی را به جای چارچوب جوردن در چارچوب اینشتین صورت بندی کنیم.

۳-۱-۲ نظریه اسکالر-تانسوری

نظریه نسبیت عام اینشتین، یک نظریه هندسی از فضا-زمان است که پایه آن بر اساس میدان تانسور متریک است و ازین رو می توان آن را به عنوان یک نظریه تانسوری در نظر گرفت. نظریه اسکالری گرانش نیز قبل از پیدایش نظریه اینشتین، توسط گونار نورداستروم^۳ شکل گرفت که در آن تابع پتانسیل نیوتونی با یک اسکالر لورنتسی جایگزین شد [۵۶]. به واسطه موفقیت های نسبیت عام اینشتین که به عنوان یک نظریه عمومی برای توصیف گرانش از آن استفاده می شود، باید ذکر کرد که این نظریه خود باعث بسط و تعمیم دیگر نظریات توصیف کننده گرانش شده است. یکی از نظریاتی که در این بخش به توصیف آن می پردازیم، نظریه اسکالر-تانسوری گرانش می باشد که ایده آن از بازسازی نظریه اسکالری نورداستروم نشأت گرفته است. اگرچه که به طور صریح به معنای ترکیب دو میدان گفته شده با یکدیگر نیست. این نظریه بر اساس بنیاد مستحکمی از نسبیت عام شکل گرفته است.

برای اولین بار نظریه اسکالر-تانسوری به واسطه تلاش های ارنست جوردن^۴ شکل گرفت. او در تلاش برای جانشینی یک منیفلد خمیده چهار بعدی در یک فضا-زمان تخت پنج بعدی بود [۵۷] و نشان داد که قید موجود در هندسه تصویوی^۵، یک میدان اسکالری چهار بعدی است که می تواند توصیف ثابت گرانشی وابسته به فضا-زمان را ارضا کند که مطابق با برهان دیراک^۶ است که نشان می داد ثابت گرانشی باید وابسته به زمان باشد [۵۸]. همچنین او در پی ارتباط نظریه خود با نظریه پنج بعدی کالوزا-کلاین بود [۵۹].

^۱ Cauchy problem ^۲ Black Hole event horizon ^۳ Gunnar Nordström ^۴ Ernst Pascual Jordan ^۵ Projective Paul Dirac ^۶ geometry

بنابراین جوردن با توجه به استدلالات خود، چگالی لاگرانژی میدان اسکالر موجود در فضا-زمان خمیده چهار بعدی را به شکل زیر تعریف کرد

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\phi_J^\gamma \left(R - w_J \frac{1}{\phi_J} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_J \partial_\nu \phi_J \right) + \mathcal{L}_m(\phi_J, \psi) \right], \quad (23-3)$$

که در آن ϕ_J همان میدان اسکالر جوردن است. در حالی که γ و w_J ثابت می‌باشند و ψ در مجموع نشان دهنده میدان‌های ماده است. در واقع معرفی جمله جفت‌شدگی غیرکمیینه یعنی $R\phi_J^\gamma$ ، به عنوان شکل‌گیری اولیه نظریه اسکالر-تانسوری می‌باشد. همچنین چگالی لاگرانژی ماده $\mathcal{L}_m(\phi_J, \psi)$ ، بستگی به میدان اسکالر دارد. حال می‌بینیم که جمله دوم در طرف راست معادله (۲۳-۳) شباهت به جمله جنبشی ϕ_J دارد. الزام وجود این جمله برای داشتن بعد جرم ۴، منجر به این می‌شود که ϕ_J دارای بعد جرم $\frac{2}{3}$ باشد. آنگاه در می‌یابیم که ϕ_J^γ در طرف راست معادله (۲۳-۳) همانند بعد G^{-1} دارای بعد جرم ۲ است. بنابراین می‌توانیم این اطمینان را حاصل کنیم که دو جمله اول در طرف راست معادله (۲۳-۳) شامل ثابت بدون بعد هستند. گفته‌هایمان برای هر مقداری از γ صادق است اگرچه این ناوردایی تحت تغییر γ اهمیتی ندارد حتی اگر ϕ_J به لاگرانژی ماده ورود کند.

تلاش جوردن بعدها به واسطه کارل برنز^۱ و رابرت دیککی^۲ به کار گرفته شد و آن‌ها با فرض تعریف میدان اسکالر به شکل $\phi = \phi_J^\gamma$ که با استفاده از این واقعیت که انتخاب مقدار γ نامربوط به توضیحاتمان است، انجام گرفت [۴۴]. چرا که بخش چگالی لاگرانژی ماده $\sqrt{-g}\mathcal{L}_m$ ، به دلیل ارضا کردن اصل هم‌ارزی ضعیف از $\phi(x)$ جدا می‌شود که در تقابل با مدل جوردن می‌باشد.

در این روش چگالی لاگرانژی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-g} \left(\phi R - w \frac{1}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_m(\psi) \right). \quad (24-3)$$

ثابت بی‌بعد w تنها پارامتر این نظریه می‌باشد و همچنین میدان اسکالر ϕ با توجه به مقاله اصلی برنز و دیککی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\phi = 16\pi\phi_{BD}. \quad (25-3)$$

حال نگاهی جدی‌تر به جمله جفت‌شدگی غیرکمیینه که همان جمله اول در سمت راست معادله (۲۴-۳) است، می‌اندازیم. در واقع این جمله جایگزین با جمله هیلبرت-اینشتین در نظریه استاندارد نسبیت عام زیر می‌شود

$$\mathcal{L}_{HE} = \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} R, \quad (26-3)$$

که در آن انحنا ریچی R در ثابت G^{-1} ضرب شده است. با مقایسه معادلات (۲۴-۳) و (۲۶-۳) درمی یابیم که در این مدل هیچ ثابت گرانشی ای نداریم مگر ثابت گرانشی موثر G_{eff} که با تغییر آهسته میدان اسکالر ϕ مشخص شده و به شکل $\frac{1}{16\pi G_{eff}} = \phi$ تعریف می شود. مشخصاً انتظار داریم که ϕ به طور فضایی یکنواخت باشد اما با زمان کیهانی به طور آهسته تغییر کند.

همچنین باید توجه کنیم که جمله دوم از سمت راست معادله (۲۴-۳) نشان دهنده جمله جنبشی میدان اسکالر ϕ می باشد اما اندکی متفاوت به نظر می رسد. تفاوت اول آن است که حضور ϕ^{-1} مشخص کننده تکینگی می باشد و دوم آنکه ضریب ثابت w در روابط وجود دارد. البته کل این جمله با بازتعریف میدان اسکالر می تواند به شکل کانونی استاندارد تبدیل شود.

برای این کار با معرفی میدان اسکالر Φ و ثابت بدون بعد ξ و تعریف روابط زیر

$$\phi = \frac{1}{4}\xi\Phi^2, \quad (27-3)$$

و

$$\epsilon\xi = 4w, \quad (28-3)$$

به شکل مطلوبی از جمله دوم طرف راست چگالی لاگرانژی برنز-دیکی (۲۴-۳) می رسیم و داریم

$$\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\right), \quad (29-3)$$

که در آن $\epsilon = \pm 1$ و برابر با علامت w می باشد.

همانطور که پیشنهاد شد، هیچ تکینگی در روابط ظاهر نمی شود. حالت $\epsilon = +1$ ، مطابق با میدان معمولی با انرژی مثبت می باشد که به بیان دیگر در آن هیچ ناپایداری شبحی وجود ندارد. توجه کنید که معادله (۲۷-۳) با انتخاب $\epsilon = +1$ در حد فضا-زمان تخت که در آن $\eta^{\mu\nu} \sim g^{\mu\nu}$ می باشد، تبدیل به $\frac{\Phi^2}{4}$ می شود. انتخاب $\epsilon = -1$ نیز نشان دهنده انرژی منفی است که به طور فیزیکی غیر قابل قبول است البته بعضی از نظریات وجود دارند که $\epsilon = -1$ را ایجاب می کنند. حالتی که در آن $\epsilon = 0$ باشد، مطابق با انتخاب $w = 0$ در صورت بندی اصلی مان و همچنین مطابق با معادله (۲۸-۳) با فرض دلخواه بودن مقدار ξ ، بلافاصله کنار گذاشته نمی شود. باید خاطر نشان کرد که معادله (۲۷-۳) نشان می دهد که Φ دارای بعد جرمی ۱ است، همانطور که در صورت بندی معمول مان داشتیم.

بدین شکل چگالی لاگرانژی (۲۴-۳) تبدیل به رابطه زیر می شود

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{4}\xi\Phi^2 R - \frac{1}{4}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \mathcal{L}_m\right). \quad (30-3)$$

این بدیهی است که معادله (۳-۳۰) تنها به معنی افزودن جمله جنبشی میدان اسکالر به چگالی لاگرانژی با جمله هیلبرت-اینشتین نیست و فرای آن می‌باشد. بنابراین می‌توانیم این گونه شرح دهیم که نظریه اسکالر-تانسوری مشخصاً به آن دسته از نظریاتی اشاره می‌کند که در آن با جفت‌شدگی غیر کمینه و یا بسط معینی از آن سر و کار داریم.

محاسبه و استخراج معادلات میدان از (۳-۳۰) کار غیر بدیهی است، به‌طور مشخص داریم

$$\square\phi = \zeta^2 T, \quad (3-31)$$

که در آن T همان رد تانسور انرژی-تکانه $T_{\mu\nu}$ است و ζ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\zeta^{-2} = \epsilon + \epsilon\zeta^{-1} = \epsilon + 4w. \quad (3-32)$$

توجه کنید که ϕ در معادله (۳-۳۱) همان میدان اسکالر برنز-دیکی است، که اکنون به‌واسطه ترکیب Φ در معادله (۳-۳۰) داده شده است و این در حالی است که معادله میدان با فرض Φ به عنوان یک میدان مستقل، بدست آمده است. در واقع سمت راست معادله (۳-۳۱) به صورت تانسور انرژی-تکانه ماده داده شده است و تضمین کننده نیرو، به‌واسطه میدان اسکالری است که اصل هم‌ارزی ضعیف یا سقوط آزاد عمومی را ارضا می‌کند. چرا که در حد تکانه انتقال یافته صفر، منبع میدان اسکالر داده شده به‌واسطه تانسور ادغام شده $T_{..}$ می‌باشد که انرژی کل دستگاه مستقل از محتوای آن است.

از معادله (۳-۳۱) انتظار داریم که میدان اسکالر نقش میانجی را برای یک نیروی بلند-برد بین اشیا جرم‌دار ایفا کند همان‌طور که نیروی نیوتونی، نقش حد میدان ضعیف گرانش اینشتین را بازی می‌کند. شدت جفت‌شدگی اساساً از همان مرتبه بزرگی است که در نیروی نیوتونی وجود دارد به شرطی که ξ یا w از مرتبه واحد باشد، همان‌طور که می‌توانیم با بازگردانی $8\pi G$ در دستگاه واحد قراردادی، این موضوع را ببینیم. همچنین معادله (۳-۳۲) نشان می‌دهد که اگر $\xi \rightarrow 0$ یا $w \rightarrow \infty$ ، آنگاه ثابت جفت‌شدگی صفر می‌شود که اغلب در این حد، نظریه مان به نسبیت عام اینشتین می‌رسد. حال تا حدی به این سوال خواهیم پرداخت که میدان اسکالر دقیقاً از کجا نشات می‌گیرد؟

میدان اسکالر نشات گرفته از اندازه فضای داخلی فشرده‌سازی شده

کمی قبل‌تر از ظهور نسبیت عام، تلاش‌های زیادی در جهت ایجاد یک نظریه وحدت^۱، ابتدا توسط هرمان وایل^۲ [۶۰] و بعدها توسط تئودور کالوزا^۳ شد. تلاش‌های وایل منجر به صورت‌بندی‌ای شد که بعدها

^۱ Unified theory ^۲ Hermann Klaus Hugo Weyl ^۳ Theodor Franz Eduard Kaluza

آن را به نام نظریه پیمانه‌ای می‌شناسیم که در واقع قلب تپنده نظریات وحدت می‌باشد و همچنین تلاش کالوزا نیز به نظریه کالوزا-کلاین انجامید که نقش سرنوشت‌سازی در فضا-زمان مراتب بالاتر در نظریه ریسمان دارد با صرف نظر از اینکه به طور جدی برای نظریه اسکالر-تانسوری به کار رود. کالوزا یک فضا-زمان پنج بعدی در نظر گرفت که آن را به نظریه نسبیت عام اعمال کرد. در آن یکی از ابعاد فضایی به یک دایره کوچک فشرده شده بود که فضا-زمان چهار بعدی را به طور نامتناهی تعمیم یافته باقی می‌گذاشت و این دایره به قدری کوچک است که هیچ پدیده‌ای حتی در انرژی‌های به قدر کافی کوچک هم قادر به تعیین آن نمی‌باشند. او در واقع با تعریف یک متریک در فضا-زمان پنج بعدی شروع کرد که مولفه‌های غیر قطری آن که مثل یک چاربردار رفتار می‌کنند، ارتباط دهنده این چهار بعد با بعد پنجم‌اند و نقش پتانسیل الکترومغناطیسی را ایفا می‌کنند. بنابراین با یک نظریه متحد اینشتین-ماکسول مواجه‌ایم. تبدیل پیمانه‌ای در این نظریه به عنوان یک تبدیل همسنگی یا ایزومتري در طول آن دایره بیان می‌شود.

این ایده بعدها برای توصیف فضا-زمان ابعاد بالاتر در نظریه ریسمان به کار بسته شد [۶۱]. حال به طور مختصر به این می‌پردازیم که چگونه اندازه فضای داخلی فشرده‌سازی شده، مثل یک میدان اسکالر چهار بعدی از مدل برنز-دیکی، با پارامتری که به طور یکتا بر اساس تعداد ابعاد فضا-زمان تعیین شده، رفتار می‌کند.

نهاده‌ای^۱ برای متریک $D = (n + 4)$ بعدی با فضای فشرده‌سازی شده n بعدی در نظر می‌گیریم

$$g_{\bar{a}\bar{b}} = \begin{pmatrix} g_{ab}(x) & \cdot \\ \cdot & A(x)^2 \tilde{g}_{ij}(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3-33)$$

که در آن A شعاع بوده و $\tilde{g}_{ij}(\theta)$ بخش هندسی محض متریک را نشان می‌دهد که با مختصات θ_α تعریف می‌شود. در واقع θ_α بدون بعد می‌باشد و آن را مانند زاویه در نظر می‌گیریم. توجه کنید که با تمرکز بر میدان اسکالر، مولفه‌های غیر قطری برای پیمانه‌های میدان را حذف می‌کنیم.

همچنین داریم

$$\sqrt{-^{(D)}g} = \sqrt{-g} A^n \sqrt{\tilde{g}}, \quad (3-34)$$

که در آن g همان دترمینان چهار بعدی متریک است و $\sqrt{\tilde{g}}$ ارتباط با حجم V_n فضای فشرده‌سازی شده دارد و به شکل زیر تعریف می‌شود

$$V_n = A^n \tilde{V}_n, \quad (3-35)$$

^۱ Ansatz اندیس‌های یونانی استفاده شده در این قسمت مربوط به فضا-زمان چهار بعدی معمول نیستند بلکه به شکل $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ می‌باشند.

که در آن داریم

$$\tilde{\mathcal{V}}_n = \int \sqrt{-g} d^n \theta. \quad (3-36)$$

حال به محاسبه جمله هیلبرت-اینشتین در D بعد، با به دست آوردن چگالی لاگرانژی موثر در چهار بعد می‌پردازیم

$$\mathcal{L}_\Phi = \sqrt{-g} L_\Phi, \quad (3-37)$$

که در آن

$$\begin{aligned} L_\Phi(x) &= A^n \tilde{\mathcal{V}}_n^{-1} \int \sqrt{\tilde{g}} \frac{1}{\tilde{\mathcal{V}}} R d^n \theta \\ &= \frac{1}{\Lambda} \frac{n}{n-1} \Phi^2 R + \frac{1}{\tilde{\mathcal{V}}} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{1}{\tilde{\mathcal{V}}} \left(\frac{1}{\tilde{\mathcal{V}}} \frac{n}{n-1} \Phi^2 \right)^{1-2/n} \tilde{R}, \end{aligned} \quad (3-38)$$

که در آن به ازای $n > 1$ ، Φ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Phi = \sqrt[2]{\frac{n-1}{n}} A^{n/2}. \quad (3-39)$$

باید توجه کنیم که علامت جمله دوم در سمت راست معادله (3-38) نشان می‌دهد که میدان Φ مطابق با رابطه (3-30) می‌باشد و در حالتی که $\epsilon = -1$ است دارای پایداری شبح می‌باشد [۶۲]. اولین جمله در سمت راست معادله (3-38) نشان دهنده انحنای اسکالر ریچی در چهار بعد است که همان جمله جفت‌شدگی غیر کمینه نشان داده شده در معادله (3-30) است، وقتی که داریم

$$\xi = \frac{1}{\tilde{\mathcal{V}}} \frac{n}{n-1}. \quad (3-40)$$

گفتن این نکته خالی از لطف نیست که این نتیجه با قید به دست آمده از آزمایشات منظومه شمسی در تناقض است. باید اشاره کنیم که میدان اسکالر همیشه به شکل Φ^2 ، به جمله جفت‌شدگی غیر کمینه با هر تعداد بعدی، $n > 1$ ، وارد می‌شود.

در آخرین جمله از سمت راست معادله (3-38)، $\tilde{R}$ نشان دهنده انحنای اسکالر ریچی است که بر اساس متریک $\tilde{g}_{\mu\nu}$ و یک پتانسیل میدان اسکالر معین محاسبه شده است مگر آنکه ثابت کیهان‌شناختی را $n = 6$ یا $D = 4$ قرار دهیم. اگرچه هیچ جمله جرمی ($\sim \Phi^2$) در آن موجود نیست.

بدیهی است که معادلات (3-38) و (3-39) اگر $n = 1$ باشد معنای خود را از دست می‌دهد که با در نظر گرفتن این حالت، هیچ جمله جنبشی برای میدان اسکالر وجود ندارد. حال به سادگی با انتخاب

$\epsilon = 0$ و $\xi > 0$ ، با توجه به معادله (۳-۳۰) داریم

$$\Phi = \epsilon^{-\frac{1}{2}} A. \quad (۳-۴۱)$$

اگرچه باید اشاره کنیم که انتخاب $n = 1$ منجر به $\tilde{R} = 0$ می شود. معادله (۳-۳۱) می تواند با $\zeta = \frac{1}{6}$ به دست آید و با انتخاب $\epsilon = 0$ در معادله (۳-۳۲) در توافق است. این نشان می دهد که Φ دارای یک درجه آزادی دینامیکی با وجود غیاب جمله جنبشی است. چرا که وجود جمله جفت شدگی غیر کمینه، موجب تلفیق با تانسور میدان گرانشی می شود. این نکته قابل ذکر است که غیاب جمله جنبشی میدان اسکالر، زمانی اتفاق می افتد که $D = 5$ باشد. پس در می یابیم با نتیجه معادله (۳-۲۳) که توسط جوردن پیشنهاد شد، در پنج بعد، سازگار نیست. نظریه جوردن با مفهوم فشرده سازی موجود در نظریه کالوزا-کلاین سروکار ندارد ولی هنوز به نظر می رسد که وی تاثیر از نظریه کالوزا-کلاین گرفته است.

بنابراین برای جمع بندی می توانیم بگوییم که جمله جفت شدگی غیر کمینه از وجود A در دترمینان، با توجه به معادله (۳-۳۴)، نشأت می گیرد. این نشان می دهد که میدان اسکالر باید در چگالی لاگرانژی ماده به خوبی ظاهر شود مگر آنکه یک ساز و کار ویژه برای منع آن وجود داشته باشد. حال قبل از پرداخت کلی به نظریه برنز-دیکی به این سوال پاسخ می دهیم که آیا نظریه اسکالر-تانسوری هیچ مزیتی نسبت به نظریه اسکالری دارد؟

جواب را از این سوال شروع می کنیم که آیا با پایبند بودن به یک نظریه پیچیده تر می توان به مزیت خاصی دست یافت؟ دوباره تکرار می کنیم که خیلی از مدل های نظریه وحدت، دارای جمله جفت شدگی غیر کمینه هستند. در واقع می توان گفت، هر نظریه ای که دارای میدان اسکالر باشد می تواند به شکل جمله جفت شدگی غیر کمینه بیان شود. ثانیاً، یک قید نظری معمولاً حاکی از وجود روابط متقابل بین نتایج است که در غیر این چنین تقابلی وجود ندارد. به عنوان مثالی از بحث های این بخش، تأکید می کنیم که نقض اصل هم ارزی ضعیف باید از یک تجدید نظر، به عنوان راه حلی برای جنبه های کیهان شناختی ناشی شود. بنابراین انگیزه طبیعی گرانش غیر نیوتونی را فراهم می کند، با وجود اینکه هیچ مدرک محکمی تاکنون وجود ندارد. مثال مشابه دیگر، یک رابطه زنجیره ای است که از نیاز مثبت به چگالی انرژی ماده شروع می شود و به یک حد پایین تر در ξ می رسد که این خود پارامتری است که شدت جفت شدگی میدان اسکالر-ماده و در نهایت شدت جفت شدگی نیروی غیر نیوتونی را نیز تعیین می کند. اگر یکی از نتایج همبسته با نتیجه دیگر به طور تجربی حذف شود، کل ساختار نظری باید تحت تأثیر قرار گیرد. این ممکن است در تضاد با یک چارچوب نظری باشد که از محدودیت کمتری برخوردار است و در آن راه حل ها می توانند به طور کلی،

اختیاری ارائه شوند.

نظریه برنز-دیکی

در این بخش به یک نمونه موفق از نظریه اسکالر-تانسوری می‌پردازیم. این مدل بر اساس فرضیات معینی که بر اساس سادگی در روابط، بنیان گذاشته شده‌اند. این سادگی زیاد، در واقع از دیدگاه مدل‌های نظری برنامه وحدت مدرن، نشأت می‌گیرند.

حال برای شروع از چگالی لاگرانژی بنیادی زیر استفاده می‌کنیم [۴۴]

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \xi \Phi^2 R - \frac{1}{2} \epsilon g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \mathcal{L}_m \right). \quad (۳-۴۲)$$

طبق قراردادمان، زین پس برای نشان دادن میدان اسکالر Φ از معادله (۳-۲۷) استفاده می‌کنیم و همچنین نماد اصلی w که به واسطه معادله (۳-۲۸) بر حسب ξ تعریف شده است را در نظر می‌گیریم که در آن ξ برابر با علامت w است، بنابراین ξ همیشه مثبت است. باید دوباره اشاره کنیم که فرض بر این است که چگالی لاگرانژی ماده $\mathcal{L}_m$ ، شامل میدان اسکالر Φ نمی‌باشد و همچنین یک فرضیه مهم دیگر این است که هیچ جمله جرمی‌ای برای میدان اسکالر وجود ندارد.

در زمینه کیهان‌شناختی، ϕ تابعی از زمان کیهانی با تقریب اول آن است که این به ما اجازه می‌دهد، یک ثابت کیهان‌شناختی موثر وابسته به زمان فرض کنیم. حال نکته مهم اشاره به این است که چرا جمله فوق به جمله غیر کمینه معروف است؟ اولین جواب مطابق با اصل هم‌ارزی اینشتین می‌باشد، که بیان می‌دارد فضای مماس به هر نقطه از فضا-زمان خمیده باید مینکوفسکی باشد که به طور دقیق به اصل هم‌ارزی قوی معروف است. همچنین پیامد نظری‌ای که به اصل هم‌ارزی ضعیف شناخته می‌شود، بیان می‌دارد که هر جسمی تحت تاثیر تنها یک نیروی گرانشی، به طور موضعی با یک شتاب معمولی سقوط می‌کند.

حال از تعریف نظریه‌ای در فضا-زمان تخت مینکوفسکی شروع می‌کنیم، آنگاه قانون جانشانی زیر را

اعمال می‌کنیم

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha. \quad (۳-۴۳)$$

که به قانون ویرگول به نقطه-ویرگول معروف است [۱۲] و دلیل نام‌گذاری آن به خاطر این است که مشتق‌گیری معمولی $\partial_\alpha F$ برای یک میدان تانسوری $F(x)$ ، اغلب با $F_{;\alpha}$ نمایش داده می‌شود، در حالی که برای مشتق همورد $\nabla_\alpha F$ از نمایش $F_{;\alpha}$ استفاده می‌کنیم، اگرچه استثنائاتی وجود دارد که در آن $F_{;\alpha} = F_{,\alpha}$.

با توجه به این روش استاندارد، جمله دوم سمت راست معادله (۳-۴۲) اینطور به دست آمده است

$$-\frac{1}{4}\epsilon\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi. \quad (3-44)$$

در این بحث، تا آنجایی جمله دوم معادله (۳-۴۲) نگران کننده است که میدان Φ با گرانش، تنها از طریق $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ جفت شود. جفت شدگی گرانشی به دست آمده با این قانون "کمینه" را جفت شدگی کمینه می‌گوییم. اولین جمله در (۳-۴۲) از این قاعده تبعیت نمی‌کند؛ در فضا-زمان تخت مینکوفسکی، این جمله به سادگی از بین می‌رود که باعث پیدایش جمله جفت شدگی غیر کمینه می‌شود.

چرا در نظریه برنز-دیکی از تعریف غیر استاندارد ϕ استفاده می‌کنیم؟ در واقع در بعضی شرایط که در آن ϕ ، به عنوان ضریب عمومی در $\sqrt{-g}R$ ضرب می‌شود، نقش بنیادی‌تری نسبت به Φ ایفا می‌کند. از طرف دیگر، برخی از تفسیرات شهودی ممکن است اعمال نشود مگر به این شرط که جمله جنبشی، قانونی باشد. بیم انجام این کار است که ما را موجب می‌کند، از Φ استفاده نکنیم.

میدان اسکالر با جمله جنبشی‌اش به شکل قانونی، دارای بعد جرم است و این یک اندیس کاربردی را فراهم می‌کند، هنگامی که می‌خواهیم در نظریه میدان کوانتومی نسبیتی، دیورژانس‌ها را محاسبه کنیم. باید توجه کنیم که ϕ دارای بعد معذور جرم است که دوباره منبع اختلاط پتانسیل می‌باشد.

توجه کنید که در معادله (۳-۲۷)، یک قید برای مقدار ϕ وجود دارد که باید مثبت باشد. اساساً ما در معادله (۳-۲۷)، انتخاب می‌کنیم که $\xi > 0$ باشد، بنابراین این قید را اعمال می‌کنیم که $\phi > 0$ است. صورت‌بندی بر اساس ϕ بسیار محدودیت دارد. این یک مزیت است که نظریه‌مان واقع‌گرایانه باشد ولی مقدار ϕ منفی موجب G_{eff} منفی می‌شود و این خود عاملی برای اثر ضد گرانش است. قطعاً غیر طبیعی است که تحول دینامیکی میدان اسکالر، منجر به اثر بی‌نهایت قوی میدان گرانشی شود. البته باید دوباره اشاره کنیم که چگالی لاگرانژی ماده $\mathcal{L}$ در معادله (۳-۴۲) شامل Φ نمی‌باشد.

حال این سوال به وجود می‌آید که فرض جداشدگی از ماده، نشان می‌دهد، غیاب کلی جفت شدگی ماده از میدان اسکالر تقریباً باعث از بین رفتن تعیین‌پذیری میدان اسکالر می‌شود. ما در ادامه نشان خواهیم داد که میدان اسکالر در معادله میدان با ماده جفت می‌شود و نه با چگالی لاگرانژی. جداشدگی در چگالی لاگرانژی، بر چگونگی جفت شدگی میدان با ماده یک قید اعمال می‌کند. اساساً این یک واقعیت است که از اصل هم‌ارزی ضعیف نشأت می‌گیرد. برای آن که این نکته را ساده‌تر درک کنیم فرض می‌کنیم که یک جرم نقطه‌ای داریم که در نسبیت عام، معادله حرکت آن از ژئودزی‌ای که با کنش زیر داده شده است، به

دست می‌آید

$$I_m = -m \int d\tau, \quad (۳-۴۵)$$

که در آن τ زمان ویژه است و جرم لختی m تنها به عنوان یک ضریب کلی ظاهر می‌شود. این در واقع هیچی تأثیری بر مسیر حرکت در فضا-زمان ندارد و نشان دهنده سقوط آزاد کلی می‌باشد که یک توصیف مهمی از اصل هم‌ارزی ضعیف است.

اگر میدان اسکالر دارای جفت‌شدگی با ماده در سطح لاگرانژی باشد، آنگاه از طریق حضور منبع در طرف راست معادله (۳-۴۵) وارد می‌شود. به‌طور کلی می‌توان گفت که معادله حرکت شامل m خواهد بود و این فراتر از حدیست که بتوان آن را به سادگی فاکتورگیری کرد و ازین رو منجر به نقض اصل هم‌ارزی ضعیف می‌شود. بنابراین از آن بر خواهد آمد که حتی در غیاب برهمکنش‌های دیگر، مانند برهمکنش‌های الکترومغناطیسی و قوی، لزومی به پایستگی انرژی جرم نقطه‌ای به‌طور هم‌وردا وجود ندارد. دیکی با توجه به نتایج آزمایشاتی که با دقت بالا انجام شده بود، مانند اصلاح آزمایش اوتوش توسط خود او، جداسدگی ماده از میدان اسکالر را غیر قابل قبول می‌دانست. در ادامه نشان خواهیم داد که موقعیتی مشابه وجود خواهد داشت، اگر ماده را به جای اجرام نقطه‌ای، میدان در نظر بگیریم.

معادلات میدان

با وردش‌گیری نسبت به متریک از (۳-۴۲)، معادلات میدان را به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$2\phi G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Phi} - 2(g_{\mu\nu}\square - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu})\phi. \quad (۳-۴۶)$$

همانطور که قبلاً اشاره کردیم، داریم

$$\square\phi = \zeta^2 T. \quad (۳-۴۷)$$

قابل ذکر است که در این مورد نیز پایستگی تانسور انرژی-تکانه وجود دارد یعنی $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$. که در آن ϕ طبق رابطه (۳-۴۷) داده شده است، اگرچه Φ را به عنوان یک میدان مستقل در نظر گرفتیم. همچنین تانسور انرژی-تکانه نیز به شکل زیر تعریف شده است

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{(\mu\nu)}. \quad (۳-۴۸)$$

از قبل می‌دانیم که نمادگذاری پراوتز نشان دهنده تقارن بر روی اندیس‌ها می‌باشد یعنی $A_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$. بهتر است اشاره کنیم که برای میدان فرمیون^۱، عموماً تانسور انرژی-تکانه کاملاً متقارن نیست و در این حالت بهتر است به جای متریک از شی ریاضیاتی بنیادی‌تری به نام تتراد یا چارتایی استفاده کنیم. از طرف دیگر، $T_{\mu\nu}^\Phi$ تانسور انرژی-تکانه Φ است که دقیقاً مثل رابطه (۳-۴۸) تعریف می‌شود با این تفاوت که برای لاگرانژی ماده داریم $\mathcal{L}^\Phi = -\frac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$. صریحاً با کمی محاسبه به دست می‌آوریم

$$T_{\mu\nu}^\Phi = \epsilon \left[\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\Phi)^2 \right], \quad (۳-۴۹)$$

$$(\Phi)^2 \equiv g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi.$$

معادله (۳-۴۷) از روشی که در ادامه بیان می‌کنیم به دست آمده است. با واردش‌گیری از معادله (۳-۴۲) نسبت به میدان Φ خواهیم داشت

$$\xi\Phi R + \epsilon\Box\Phi = 0, \quad (۳-۵۰)$$

که در آن نماد $\Box$ نشان دهنده دالامبری هم‌وردا میدان اسکالر است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\Box\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi). \quad (۳-۵۱)$$

حال با ضرب Φ در معادله (۳-۵۰) داریم

$$2\phi R + \epsilon\Phi\Box\Phi = 0. \quad (۳-۵۲)$$

از طرفی با محاسبه رد معادله (۳-۴۶) به رابطه زیر می‌رسیم

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -R. \quad (۳-۵۳)$$

بنابراین

$$-2\phi R = T - \epsilon(\partial\Phi)^2 - 6\Box\phi. \quad (۳-۵۴)$$

حال با حذف ϕR از معادلات (۳-۵۲) و (۳-۵۴) نتیجه می‌گیریم

$$\epsilon\left(\Phi\Box\Phi + (\partial\Phi)^2\right) + 6\Box\phi = T, \quad (۳-۵۵)$$

و با استفاده از

$$\square \Phi^2 = 2 \left(\Phi \square \Phi + (\partial \Phi)^2 \right), \quad (3-56)$$

در نهایت به معادله (۳-۴۷) دست می‌یابیم که در آن ζ از رابطه (۳-۳۲) تعریف شده است.

معادله (۳-۳۱) نشان می‌دهد که منبع میدان اسکالر از رد تانسور انرژی-تکانه ماده به دست آمده است. از قبل هم اشاره کردیم که میدان اسکالر از ماده در لاگرانژی جدا شده است. حال سوال مهم این است که چگونه میدان اسکالر به ماده در معادله میدان جفت می‌شود؟

مطابق با معادلات (۳-۳۱) و (۳-۳۲)، جفت‌شدگی با ماده میدان اسکالر در حدهای $\cdot \rightarrow \xi$ یا $\infty \rightarrow w$ صفر می‌شود که با حد $\cdot \rightarrow \zeta$ در معادله (۳-۳۲) در توافق است. بنابراین در این حد به نظریه اینشتین می‌رسیم که معنی بحرانی پارامترهای ξ و w را نشان می‌دهد. حتی می‌توان گفت که در این حد، میدان اسکالر نقش کیهان‌شناختی ماده تاریک را ایفا می‌کند.

از تحلیل ابعادی، در می‌یابیم که ζ دارای بعد m^{-2} می‌باشد (توجه کنید که ϕ دارای بعد m^2 است). که این ایجاب می‌کند $M_p^{-2} = 8\pi G$. به طور صریح‌تر می‌توانیم آن را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\zeta^2 = M_p^{-2} \frac{1}{\epsilon + \epsilon \xi^{-1}} = \frac{4\pi G}{3 + 2w}. \quad (3-57)$$

حال به محاسبه معادله بقای تانسور انرژی-تکانه می‌پردازیم یعنی $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \cdot$ ، که در اصل از معادله حرکت ماده به دست می‌آید. اگرچه که می‌توانیم مستقیماً از فرض غیاب جفت‌شدگی با ماده Φ ، این قانون بقا را مستقل از ویژگی‌های مشخص میدان‌های ماده منفرد، به دست آورد، اما در واقع این پیامد به‌کارگیری اتحاد بیانکی در معادله (۳-۴۶) است.

حال با نوشتن معادله (۳-۴۶) بر اساس بردار پادوردا و دیورژانس گرفتن ∇_α از طرفین آن داریم

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -\nabla_\mu T_\Phi^{\mu\nu} + 2([\nabla^\mu, \square] + G^{\mu\nu} \partial_\mu) \phi, \quad (3-58)$$

که در آن طبق استفاده از اتحاد بیانکی داریم $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = \cdot$. حال با در نظر گرفتن پاره‌ای از فرضیات (تا حدی پیچیده) می‌توانیم رابطه (۳-۵۸) را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \phi \nabla_\mu J, \quad (3-59)$$

که در آن J ، منبع میدان اسکالر است که با فرض صفر بودن آن به پایستگی بقای انرژی-تکانه دست می‌یابیم که نشان می‌دهد قانون هم‌وردای بقای ماده با حضور میدان اسکالر، بدون تاثیر باقی می‌ماند. قابل

ذکر است که اگر یک جمله جفت‌شدگی Φ -ماده در رابطه (۳-۴۶) وجود داشته باشد، آنگاه در سمت راست (۳-۵۰) و همچنین (۳-۵۸) یک سهم متناظر به دست می‌آید که در آن دیگر قانون بقا انرژی-تکانه صادق نمی‌باشد.

بنابراین اگر جرم نقطه‌ای را به عنوان ماده در نظر بگیریم، قانون هم‌وردای پایستگی، شرط لازم و کافی برای ژئودزی بودن جهان خط را فراهم می‌آورد که این خود اطمینان می‌دهد که اصل هم‌ارزی ضعیف صادق است. همچنین در غیاب میدان اسکالر در چگالی لاگرانژی ماده $\mathcal{L}_m$ این اصل نیز پابرجاست.

۲-۳ کنش و معادلات میدان گرانش دوگانه متریک-پالاتینی

برای شروع، از جوانب پایه‌ای گرانش دوگانه متریک-پالاتینی صحبت خواهیم کرد، مخصوصاً در مورد کنش و معادلات میدان این نظریه و نمایش اسکالر-تانسوری آن در دو چارچوب اینشتین و جوردن خواهیم پرداخت و سرانجام به جست و جوی نظریات دوگانه گرانشی دیگر می‌رویم.

از کنش این نظریه به شکل زیر شروع می‌کنیم [۶۵، ۶۶]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathcal{R})] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \psi), \quad (۳-۶۰)$$

که در آن $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ بوده و $\mathcal{L}_m$ چگالی لاگرانژی ماده جفت شده کمینه است و ψ نیز به طور کلی نشان دهنده میدان‌های ماده می‌باشد. باید دقت کنیم که R همان انحنا ریچی است و $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$ انحنا پالاتینی می‌باشد که بر اساس هم‌استار مستقل $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} (\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\beta - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\nu}^\beta), \quad (۳-۶۱)$$

که تانسور انحنا ریچی $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ را تولید می‌کند یعنی

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv \bar{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\beta - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\nu}^\beta. \quad (۳-۶۲)$$

حال با وردش‌گیری نسبت به متریک از کنش (۳-۶۰) به معادله میدان دست خواهیم یافت و داریم

$$G_{\mu\nu} + f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (۳-۶۳)$$

که در آن تانسور انرژی-تکانه به شکل معمول خود تعریف می‌شود

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (۳-۶۴)$$

از طرفی دیگر با وردش گیری نسبت به هموستار مستقل $\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha$ از کشش (۶۰-۳) به دست می آوریم

$$\bar{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})g_{\mu\nu}) = 0, \quad (۶۵-۳)$$

که نشان می دهد $\bar{\Gamma}_{\mu\nu,\beta}^\alpha$ هموستار لوی-چیویتا متریک $h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})g_{\mu\nu}$ می باشد. ازین رو $h_{\mu\nu}$ به طور همدیس به متریک فیزیکی (در چارچوب اینشتین) $g_{\mu\nu}$ با ضریب همدیس $f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \equiv \frac{df(\mathcal{R})}{d\mathcal{R}}$ مرتبط است. این نشان می دهد که تانسور انحنای ریچی به شکل زیر به تانسور انحنای پالاتینی مربوط می شود

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \frac{1}{(f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}))^2} \nabla_\mu f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \nabla_\nu f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) - \frac{1}{f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})} \nabla_\mu \nabla_\nu f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) - \frac{1}{2} \frac{1}{f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})} g_{\mu\nu} \square f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}). \quad (۶۶-۳)$$

انحنای پالاتینی $\mathcal{R}$ ، با استفاده از رد معادله میدان (۶۳-۳) به دست می آید و داریم

$$f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})\mathcal{R} - 2f(\mathcal{R}) = \kappa^2 T + R \equiv X. \quad (۶۷-۳)$$

باید توجه کنیم که $\mathcal{R}$ را می توان به طور جبری بر اساس X نوشت تنها در صورتی که $f(\mathcal{R})$ حل های تحلیلی داشته باشد. متغیر X نشان می دهد که چه مقدار، این نظریه از رد معادله نسبیت عام $R = -\kappa^2 T$ انحراف دارد. این دو مشاهده ساختار نظری و بخش مرکزی آن را به واسطه انحراف رد X توضیح می دهد. این به خاطر آن است که نظریات دوگانه متریک-پالاتینی $R + f(\mathcal{R})$ را می توان به سادگی نظریه $f(X)$ نامید و به طور هم ارز این دو را به جای یکدیگر استفاده کرد.

همچنین می توانیم معادله میدان (۶۳-۳) را بر اساس متریک و متغیر X توصیف کرد آنگاه در این

صورت داریم

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} f(X) g_{\mu\nu} - f_X(X) R_{\mu\nu} + f'(X) \nabla_\mu \nabla_\nu X + \left[f''(X) - \frac{3}{2} \frac{(f'(X))^2}{f_X(X)} \right] \nabla_\mu X \nabla_\nu X + [f'(X) \square X + f''(X) (\partial X)^2] g_{\mu\nu} + \kappa^2 T, \quad (۶۸-۳)$$

که در آن $(\partial X)^2 \equiv \nabla_\alpha X \nabla^\alpha X$ می باشد. حال رد معادله (۶۸-۳) به شکل زیر خواهد شد

$$f'(X) \square X + \left[f''(X) - \frac{1}{2} \frac{(f'(X))^2}{f_X(X)} \right] (\partial X)^2 + \frac{1}{3} [X + 2f(X) - f_X(X)R] = 0. \quad (۶۹-۳)$$

در حالی که رابطه بین انحنای اسکالر متریکی R و انحنای اسکالر پالاتینی $\mathcal{R}$ اینگونه است

$$\mathcal{R}(X) = R + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{f'(X)}{f_X(X)} \right)^2 - 2 \frac{\square f_X(X)}{f_X(X)} \right], \quad (۷۰-۳)$$

که از طریق ادغام معادله (۶۶-۳) به دست آمده است.

۱-۲-۳ نمایش اسکالر-تانسوری

مطابق با مورد متریک محض و پالاتینی [۶۷، ۶۸]، در ادامه کنش (۳-۷۰) را به شکل نظریات اسکالر-تانسوری بازنویسی می‌کنیم. این کار را می‌توانیم با تعریف میدان دلخواه A انجام دهیم و آنگاه داریم

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [\Omega_A R + f(A) + f_A(\mathcal{R} - A)] + S_m, \quad (۳-۷۱)$$

که در آن $f_A \equiv \frac{df}{dA}$ بوده و S_m ، کنش ماده می‌باشد و همچنین Ω_A ثابت جفت‌شدگی است که برای نظریه دوگانه متریک-پالاتینی اصلی به شکل $\Omega_A = 1$ انتخاب شده است [۶۶].

میدان A به‌طور دینامیکی هم‌ارز با انحنا اسکالر پالاتینی $\mathcal{R}$ است در صورتی که داشته باشیم $f''(\mathcal{R}) = 0$. حال با تعریف روابط زیر

$$\phi \equiv f_A, \quad V(\phi) \equiv A f_A - f(A), \quad (۳-۷۲)$$

کنش (۳-۷۱) تبدیل می‌شود به

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [\Omega_A R + \phi \mathcal{R} - V(\phi) f_A] + S_m. \quad (۳-۷۳)$$

قبل از پرداختن به معادلات میدان، بهتر است اشاره کنیم که شکل پتانسیل $V(\phi)$ در (۳-۷۲) به معادله دیفرانسیلی کلرو^۱ معروف است [۶۹] یعنی

$$f(A) = hA - V(h), \quad (۳-۷۴)$$

که دارای حل خطی می‌باشد و داریم

$$\frac{\partial V(f_A)}{\partial f_A} - A = 0. \quad (۳-۷۵)$$

حال با وردش‌گیری از کنش (۳-۷۳) به ترتیب نسبت به متریک، میدان اسکالر ϕ و هموستار خواهیم داشت

$$\Omega_A R_{\mu\nu} + \phi \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\Omega_A R + \phi \mathcal{R} - V)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (۳-۷۶)$$

$$\mathcal{R} - V_\phi = 0, \quad (۳-۷۷)$$

$$\bar{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}\phi g^{\mu\nu}) = 0, \quad (۳-۷۸)$$

که در آن $V_\phi = V'(\phi)$ می باشد. حل معادله (۷۸-۳) نشان می دهد که هموستار مستقل، هموستار لوی-چیویتا می باشد که با متریک $h_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$ تعریف می شود. بنابراین ارتباط بین انحنا اسکالر ریچی و پالاتینی به شکل زیر بازنویسی می شود

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2\phi^2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (79-3)$$

که می تواند در کنش (۷۳-۳) استفاده شود تا از هموستار مستقل خلاص شویم و به نمایش اسکالر-تانسوری نظریه دوگانه متریک-پالاتینی دست یابیم [۷۰]. بنابراین داریم

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(\Omega_A + \phi) R + \frac{3}{2\phi} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right] + S_m. \quad (80-3)$$

قابل ذکر است که با جایگذاری $\phi \rightarrow -(\kappa\phi)^2/6$ ، به مورد معروفی دست می یابیم که در آن میدان اسکالر به طور همدیس با پتانسیل خود-برهمکنش، جفت شده است. این بازتعریف باعث می شود که جمله جنبشی در کنش (۸۰-۳) به شکل استاندارد خود درآید و خود کنش، به طور همدیس، تبدیل به یک اسکالر-میدان جرم دار جفت شده با گرانش اینشتین می شود. البته این نظریه برنز-دیکی محسوب نمی شود چرا که در آن میدان، بدون جرم است اما در این حالت، پتانسیل غیر صفر $V(\phi)$ طبق کنش (۸۰-۳) وجود دارد. در حد $\Omega_A \rightarrow 0$ کنش (۸۰-۳) به گرانش $f(\mathcal{R})$ پالاتینی و در حد $\Omega_A \rightarrow \infty$ به گرانش $f(R)$ متریکی می رسیم [۷۰]. جدای از این موارد تکین، عمومی ترین نظریات با Ω_A متناهی، در رژیم دوگانه قرار می گیرند و از این دیدگاه یک درونیابی منحصر به فرد بین دو دسته کاملاً جدا از نظریات گرانشی فراهم می کند. در واقع، به نظریاتی شبیه به برنز-دیکی رسیده ایم که با تابع جفت شدگی غیر بدیهی زیر مشخص می شوند

$$w_{BD} = \frac{3\phi}{2\phi - 2\Omega_A}, \quad (81-3)$$

که تعمیم دهنده موارد $w_{BD} = 0$ و $w_{BD} = -\frac{3}{2}$ هستند که به ترتیب مطابق با نمایش اسکالر-تانسوری گرانش $f(R)$ متریکی و گرانش $f(\mathcal{R})$ پالاتینی می باشند [۷۱].

با استفاده از معادلات (۷۷-۳) و (۷۹-۳) در (۷۶-۳)، معادله میدان متریکی را اینگونه می توان نوشت

$$(\Omega_A + \phi) R_{\mu\nu} = \kappa^2 (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (V + \square \phi) + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{3}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (82-3)$$

و یا به طور هم ارز داریم

$$(\Omega_A + \phi) G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \square \phi g_{\mu\nu} - \frac{3}{2\phi} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{3}{2\phi} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} V g_{\mu\nu}. \quad (83-3)$$

مشاهده می‌کنیم که انحنای فضا-زمان به واسطه میدان اسکالر و میدان ماده تولید شده است. باید توجه کنید که معادله میدان متریکی (۳-۸۳) می‌تواند به عنوان معادله میدان موثر اینشتین یعنی $G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{eff}$ نوشته شود که در آن تانسور انرژی-تکانه یه شکل زیر تعریف می‌شود

$$T_{\mu\nu}^{eff} = \frac{1}{1+\phi} \left\{ T_{\mu\nu} - \frac{1}{\kappa^2} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (V + 2\Box\phi) + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{3}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{3}{4\phi} g_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 \right] \right\}. \quad (۳-۸۴)$$

معادله میدان اسکالری می‌تواند به دو روش متفاوت پردازش شود که نشان می‌دهد چگونه مدل‌های دوگانه، جوانب فیزیکی موارد $w_{BD} = 0$ و $w_{BD} = -\frac{3}{4}$ در مدل‌های اسکالر-تانسوری را ترکیب می‌کنند. ابتدا با محاسبه رد معادله (۳-۷۶) در می‌یابیم $\kappa^2 T = -\Omega_A R - \phi R + 2V$. همچنین با استفاده معادله (۳-۷۷) خواهیم داشت

$$2V - \phi V_\phi = \kappa^2 T + \Omega_A R. \quad (۳-۸۵)$$

به‌طور مشابه در مورد پالاتینی ($w_{BD} = -\frac{3}{4}$) این معادله نشان می‌دهد که میدان ϕ می‌تواند به عنوان یک تابع جبری اسکالری به شکل $X \equiv \kappa^2 T + \Omega_A R$ یعنی $\phi = \phi(X)$ تعریف شود. اگرچه در مورد پالاتینی محض، میدان ϕ تابعی از T می‌باشد. طرف راست معادله (۳-۸۲) شامل وجود جملات جدیدی از ماده می‌شود که مرتبط با T و مشتقات آن است و همچنین شامل انحنای R و مشتقات آن نیز می‌باشد. بنابراین این نظریه را می‌توان به عنوان نظریه گرانشی مشتق مراتب بالاتر هم در میدان‌های ماده و هم در میدان‌های متریک انگاشت. اگرچه از این تفسیر می‌توان اجتناب کرد وقتی که R را با رابطه زیر، در معادله (۳-۸۵) جایگذاری کنیم و همچنین $\mathcal{R} = V_\phi$ در نظر بگیریم

$$R = \mathcal{R} + \frac{3}{\phi} \Box\phi - \frac{3}{2\phi^2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi. \quad (۳-۸۶)$$

بنابراین در می‌یابیم که میدان اسکالر به واسطه معادله تحول مرتبه دوم زیر هنگامی که $\Omega_A = 1$ باشد، تعیین شده است

$$-\Box\phi + \frac{1}{2\phi} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + \frac{\phi[2V - (1+\phi)V_\phi]}{3} = \frac{\phi\kappa^2}{3} T, \quad (۳-۸۷)$$

که همان معادله کلاین-گوردون موثر است. عبارت آخر نشان می‌دهد که بر خلاف مورد پالاتینی ($w_{BD} = -\frac{3}{4}$)، میدان اسکالر در آن دینامیکی است. این نظریه تحت تاثیر ناپایداری‌های میکروسکوپی که نشأت گرفته از مدل‌های پالاتینی با تصحیح فروسرخ است، نمی‌باشد [۷۲].

سرانجام به تبدیلات هم‌دیس این نظریات به چارچوب اینشتین می‌پردازیم و داریم

$$\bar{g}_\alpha \equiv (\phi + \Omega_A)g_\alpha. \quad (۸۸-۳)$$

ازین رو لاگرانژی در چارچوب اینشتین تبدیل به رابطه زیر می‌شود

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{R} + \frac{3\Omega_A}{2\phi} \frac{\bar{g}_\alpha \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}}{(\phi + \Omega_A)} - \frac{V(\phi)}{(\phi + \Omega_A)^2}. \quad (۸۹-۳)$$

حال برای رسیدن به شکل کانونی، میدان جدید ψ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\phi = \Omega_A \tan^2 \left(\frac{\psi}{2\sqrt{3}} \right). \quad (۹۰-۳)$$

آنگاه این نظریه در خلا، تبدیل به نظریه اسکالر کانونی با یک پتانسیل ویژه در چارچوب اینشتین می‌شود.

۳-۳ گرانش دوگانه تعمیم یافته $f(R, \mathcal{R})$

کنش نظریه دوگانه متریک-پالاتینی تعمیم یافته گرانش $f(R, \mathcal{R})$ را در نظر بگیرید [۷۳]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} f(R, \mathcal{R}) d^4x + S_m(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (۹۱-۳)$$

همانطور که واضح است f تابعی از انحناهای اسکالر ریچی و پالاتینی می‌باشد و S_m کنش ماده است که در آن ماده به‌طور کمینه با متریک $g_{\mu\nu}$ جفت شده است. انحناهای پالاتینی نیز بر حسب هم‌ستار مستقل $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ طبق معادله (۶۱-۳) داده شده است.

حال با ورودش گیری نسبت به متریک و هم‌ستار مستقل از کنش (۹۱-۳) به معادلات میدان زیر خواهیم

رسید

$$\frac{\partial f}{\partial R} R_{\mu\nu} + \frac{\partial f}{\partial \mathcal{R}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R, \mathcal{R}) - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \frac{\partial f}{\partial R} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (۹۲-۳)$$

$$\bar{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (۹۳-۳)$$

معادله (۹۳-۳) نشان می‌دهد که هم‌ستار مستقل، هم‌ستار لوی-چیویتا تانسور متریک $h_{\mu\nu}$ است که

$$h_{\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{R}} g_{\mu\nu} \text{ یعنی مرتبط است}$$

حال می‌توانیم کنش (۹۱-۳) را با نمایش اسکالر-تانسوری بنویسیم که برای این کار، دو میدان دلخواه

A و B را معرفی می‌کنیم، بنابراین داریم

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_\Omega \sqrt{-g} \left[f(A, B) + \frac{\partial f}{\partial A} (R - A) + \frac{\partial f}{\partial B} (\mathcal{R} - B) \right] d^4x + S_m, \quad (۹۴-۳)$$

که با در نظر گرفتن $A = R$ و $B = R$ دوباره به همان کنش (۳-۹۱) خواهیم رسید. حال دو میدان اسکالر را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial A}, \quad \psi = -\frac{\partial f}{\partial B}, \quad (۳-۹۵)$$

که در آن علامت منفی تعریف دوم به دلیل آنکه، انرژی جنبشی میدان اسکالر باید مثبت باشد، بدین شکل نوشته شده است. بعلاوه پتانسیل در این نمایش به شکل زیر تعریف می‌شود

$$V(\varphi, \psi) = -f(A, B) + \varphi A - \psi B. \quad (۳-۹۶)$$

بنابراین با این تعاریف، هم‌ارز کنش (۳-۹۴) برابر است با

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} \sqrt{-g} [\varphi R - \psi \mathcal{R} - V(\varphi, \psi)] d^4x + S_m, \quad (۳-۹۷)$$

که با انتخاب $h_{\mu\nu} = -\psi g_{\mu\nu}$ خواهیم داشت

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{\psi^2} \partial_{\alpha} \psi \partial^{\alpha} \psi - \frac{3}{\psi} \square \psi, \quad (۳-۹۸)$$

که با جایگذاری آن در کنش (۳-۹۷) به دست می‌آوریم

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left[(\varphi - \psi) R - \frac{3}{\psi^2} \partial_{\alpha} \psi \partial^{\alpha} \psi - V(\varphi, \psi) \right] d^4x + S_m. \quad (۳-۹۹)$$

بنابراین با وردش‌گیری از کنش (۳-۹۹) نسبت به متریک و میدان‌های φ و ψ به معادلات حرکت زیر خواهیم رسید

$$\begin{aligned} (\varphi - \psi) G_{\mu\nu} &= \kappa^2 T_{\mu\nu} + (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} \square)(\varphi - \psi) \\ &+ \frac{3}{\psi^2} \partial_{\mu} \psi \partial_{\nu} \psi + \left(\frac{1}{2} V + \frac{3}{\psi^2} \partial_{\alpha} \psi \partial^{\alpha} \psi \right) g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (۳-۱۰۰)$$

$$\square \varphi + \frac{1}{3} (2V - \psi V_{\psi} - \varphi V_{\varphi}) = \frac{\kappa^2 T}{3}, \quad (۳-۱۰۱)$$

$$\square \varphi - \frac{1}{\psi^2} \partial_{\alpha} \psi \partial^{\alpha} \psi - \frac{\psi}{3} (V_{\varphi} + V_{\psi}) = 0, \quad (۳-۱۰۲)$$

که در آن V_{ψ} و V_{φ} به شکل زیر تعریف می‌شود

$$V_{\varphi} \equiv \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad V_{\psi} \equiv \frac{\partial V}{\partial \psi}. \quad (۳-۱۰۳)$$

معادله (۳-۱۰۱) تفاوت مهمی را بین میدان‌های اسکالر نشان می‌دهد، بدین معنی که φ با ماده، جفت شده است در حالی که ψ در معادله (۳-۱۰۲) این‌طور نمی‌باشد. این واقعیت هنگامی که به دنبال

حل های کیهان شناختی در حضور ماده می باشیم، دارای پیامدهای مهمی می باشد. در میان نتایج مربوطه، می بینیم که به دست آوردن جوابهای شتابدار نمایی، برای جهان های تخت نیز ممکن است، حتی وقتی که کیهان شناسی مان صرفاً در خلا نباشد.

نتیجه گیری

در فصل ۳، برای رسیدن به درک و آشنایی بهتر از این پایان نامه، سعی بر آن شد که ابتدا در بخش ۳-۱-۱، به نظریات اسکالری-تانسوری پردازیم. برای این کار ابتدا تبدیلات هم دیس و اختلاف بین چارچوب اینشتین و جوردن را توضیح دادیم و سپس در بخش ۳-۱-۲، به توصیف نظریه اسکالر-تانسوری پرداخته و به عنوان مثالی از آن، نظریه برنز-دیکی را به تفصیل بیان کردیم و معادلات میدان حاصل از آن را به دست آوردیم.

در بخش ۳-۲ به شرح کاملی از نظریه گرانش دوگانه متریک-پالاتینی پرداختیم و با تعریف نمایش اسکالر-تانسوری از آن، توانستیم معادلات میدان و در نهایت معادلات کیهان شناختی این نظریه را توصیف کنیم. در انتهای این فصل نیز به عنوان نمونه، گرانش دوگانه تعمیم یافته $f(R, \mathcal{R})$ را تعریف کردیم.

فصل ۴

نظریه دوگانه متریک-پالاتینی تعمیم یافته

$$f(\mathcal{R}, L_m)$$

در این فصل، ابتدا به برخی از وجوه مهم نظریه $f(\mathcal{R}, L_m)$ می‌پردازیم. این نظریه را می‌توان تعمیمی بر نظریه دوگانه متریک-پالاتینی $f(\mathcal{R})$ در نظر گرفت که در بخش ۳-۲، آن را معرفی کردیم. بنابراین در این فصل به تعمیمی از نظریه دوگانه متریک-پالاتینی خواهیم پرداخت که بین انحنای حاصل از هموستار آفین و ماده باریونی برهم‌کنش کمینه و غیرکمینه وجود دارد و نتایج آن را روی کیهان اخیر مطالعه خواهیم کرد. برای رسیدن به این هدف، کنش و معادلات میدان حاصل از آن را به دست آورده و در ادامه نمایش اسکالر-تانسوری آن را معرفی می‌کنیم و در چارچوب‌های اینشتین و جوردن آن را بررسی کرده و در نهایت با استخراج معادلات کیهان‌شناسی، نتایج را با مشاهدات اخت‌فیزیکی و کیهان‌شناختی مقایسه خواهیم کرد.

۴-۱ تعریف کنش و معادلات کیهان‌شناختی در حالت غیر کمینه

ابتدا با کنش غیر کمینه زیر شروع می‌کنیم

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa^2 (R + f(\mathcal{R}, L_m)) \right\} + S_m, \quad (۴-۱)$$

که در آن $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ است، جمله R انحنای اسکالر ریچی وابسته به هموستار لوی-چیویتا بوده و همچنین $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ انحنای پالاتینی می‌باشد که براساس هموستار مستقل $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ ، طبق رابطه (۳-۲)

داده شده است. حال با وردش‌گیری از کنش (۱-۴) نسبت به متریک، معادله حرکت آن را به دست می‌آوریم و داریم

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa^2 (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \delta g^{\mu\nu} + f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, L_m) \mathcal{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L_m f_{L_m}(\mathcal{R}, L_m) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\mathcal{R}, L_m) \delta g^{\mu\nu} \right\} \\ + \int \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (2-4)$$

با کمینه کردن کنش (۲-۴) معادله میدان به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, L_m) \mathcal{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L_m f_{L_m}(\mathcal{R}, L_m) \\ - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\mathcal{R}, L_m) = \left(\frac{1 + \kappa^2 f_{L_m}(\mathcal{R}, L_m)}{2\kappa^2} \right) T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3-4)$$

همچنین با استفاده از رهیافت پالاتینی یعنی با محاسبه وردش نسبت به هموستار مستقل $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ (همانطور که در بخش ۱-۳-۲ گفته شد) از کنش (۱-۴) خواهیم داشت

$$\bar{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, L_m) g^{\mu\nu}) = 0. \quad (4-4)$$

حل معادله فوق نشان می‌دهد که هموستار مستقل، همان هموستار لوی-چیویتا می‌باشد و متریک در آن به شکل $g_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, L_m) \bar{g}_{\mu\nu}$ تعریف شده است و $f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, L_m)$ مشخص کننده ضریب همدیس در چارچوب اینشتین است.

۱-۱-۴ نمایش اسکالر-تانسوری مدل غیر کمینه

کنش (۱-۴) را می‌توانیم با تعریف دو میدان دلخواه A و B به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa^2 (R + f(A, B) + f_A(\mathcal{R} - A) + f_B(L_m - B) + L_m) \right\}, \quad (5-4)$$

که در آن معادله حرکت برای میدان‌های A و B به شکل $A = \mathcal{R}$ و $B = L_m$ اتخاذ شده است که این خود ایجاب می‌کند

$$f_{AA}(A, B) f_{BB}(A, B) - (f_{AB}(A, B))^2 \neq 0. \quad (6-4)$$

حال با تعریف دو میدان اسکالر $\phi = f_A$ و $\psi = f_B$ کنش (۵-۴) به شکل زیر تبدیل می‌شوند

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa^2 (R + \phi \mathcal{R} + \psi L_m - V(\phi, \psi)) + L_m \right\}, \quad (7-4)$$

که در آن پتانسیل $V(\phi, \psi)$ به شکل زیر تعریف شده است

$$V(\phi, \psi) \equiv -f(A(\phi, \psi), B(\phi, \psi)) + \phi A(\phi, \psi) + \psi B(\phi, \psi). \quad (۸-۴)$$

نمادگذاری زیروندی اتخاذ شده در روابط فوق نشان دهنده مشتق می‌باشد به عنوان مثال داریم $f_A = df/dA$.

حال همانند رویه قبل با وردش‌گیری از کنش (۷-۴) نسبت به متریک و هموستار مستقل به ترتیب، معادلات میدان زیر را به دست می‌آوریم

$$G_{\mu\nu} + \phi R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \psi L_m - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R, L_m) = \left(\frac{1 + \kappa^2 \psi}{2\kappa^2} \right) T_{\mu\nu}, \quad (۹-۴)$$

$$\bar{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} \phi g^{\mu\nu}) = 0, \quad (۱۰-۴)$$

که در آن میدان اسکالر ψ به‌طور غیر کمینه با چگالی لاگرانژی ماده جفت شده است. با حل معادله (۱۰-۴) درمی‌یابیم که ارتباط بین دو انحنای اسکالر ریچی و پالاتینی در این نظریه به شکل زیر خواهد شد

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2\phi^2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{\phi} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square \phi \right), \quad (۱۱-۴)$$

که در آن $(\partial\phi)^2 \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ می‌باشد، اکنون با جایگذاری رابطه فوق در کنش (۷-۴) خواهیم داشت

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa^2 (R + \phi R + \frac{3}{2\phi} (\partial\phi)^2 - 3\square\phi + \psi L_m - V(\phi, \psi)) + L_m \right\}. \quad (۱۲-۴)$$

از آنجا که جمله چهارم در کنش فوق مشتق کامل است بنابراین به دست می‌آوریم

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa^2 \left((1 + \phi)R + \frac{3}{2\phi} (\partial\phi)^2 + (1 + \kappa^2 \psi)L_m - V(\phi, \psi) \right) \right\}. \quad (۱۳-۴)$$

بنابراین نمایش اسکالر-تانسوری کنش (۱۳-۴)، به شکل فوق می‌شود و در ادامه با وردش‌گیری نسبت به متریک از آن معادله حرکت به شکل زیر نوشته می‌شود

$$(1 + \phi)G_{\mu\nu} - \frac{3}{2\phi} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + \frac{3}{2\phi} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \square \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi, \psi) = \left(\frac{1 + \kappa^2 \psi}{2\kappa^2} \right) T_{\mu\nu}. \quad (۱۴-۴)$$

از طرفی با وردش‌گیری از کنش (۱۳-۴)، نسبت به میدان‌های اسکالر ϕ و ψ به معادلات زیر دست می‌یابیم

$$R - \frac{3}{\phi} \square \phi + \frac{3}{2\phi^2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - V_\phi(\phi, \psi) = 0, \quad (۱۵-۴)$$

$$L_m - V_\psi(\phi, \psi) = 0, \quad (۱۶-۴)$$

که در آن $V_\psi(\phi, \psi) \equiv \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \psi}$ و $V_\phi(\phi, \psi) \equiv \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \phi}$ می‌باشند.

پر واضح است که این مدل دارای برهمکنش غیر خطی بین ماده و میدان اسکالر ψ می‌باشد بنابراین در این حالت رابطه بقای تانسور انرژی-تکانه وجود ندارد (یعنی $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$). این می‌تواند، قابل توجه باشد چرا که در مورد کیهان‌شناسی FLRW، بقای تانسور انرژی-تکانه به خوبی قابل رویت است و این موضوع مستقل از شکل پتانسیل می‌باشد. حال به سراغ محاسبه (عدم) بقای تانسور انرژی-تکانه می‌پردازیم برای این کار کافی است دیورژانس هم‌وردای معادله حرکت متریکی (۴-۱۴) را محاسبه کنیم، در این صورت خواهیم داشت

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2 \psi} [T_{\mu\nu} \nabla^\mu \psi - L_m \nabla_\nu \psi]. \quad (4-17)$$

چهار معادله متأخر، نشان دهنده دینامیک قابل بررسی در مدل ما می‌باشد. در ادامه به محاسبه معادلات کیهان‌شناختی حاصل از این روابط می‌پردازیم.

۴-۱-۲ کیهان‌شناسی مدل $f(R, L_m)$ در حالت غیر کمینه

در فصل ۲ به مفاهیم کیهان‌شناسی پرداختیم، حال در این بخش از آن مفاهیم وام می‌گیریم و به استخراج معادلات کیهان‌شناختی در مدل مورد مطالعه می‌پردازیم. در وهله اول از متریک FLRW در مختصات قطبی کروی^۱ استفاده می‌کنیم. ازین رو برای المان خط آن داریم

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (4-18)$$

از طرفی تانسور انرژی-تکانه به شکل زیر نوشته شده

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (4-19)$$

که با در نظر گرفتن سیال کامل، به شکل زیر تعریف می‌شود

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, P, P, P). \quad (4-20)$$

^۱ استفاده از مختصات دکارتی، هیچ تفاوتی در نتیجه اعمال نخواهد کرد.

با استفاده از روابط (۴-۱۸) و (۴-۲۰) در معادله حرکت متریکی (۴-۱۴) به معادلات کیهان‌شناختی تعمیم یافته فریدمان و ریچادوری دست می‌یابیم که به ترتیب ازین قراراند

$$3H^2 = \frac{1}{1+\phi} \left[\frac{1+\kappa^2\psi}{\kappa^2} \rho + \frac{V(\phi, \psi)}{2} - 3H\dot{\phi} - \frac{3}{4} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} \right], \quad (4-21)$$

$$2\dot{H} = \frac{1}{1+\phi} \left[-\frac{1+\kappa^2\psi}{2\kappa^2} (P+\rho) + H\dot{\phi} + \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - \ddot{\phi} \right], \quad (4-22)$$

که در آن از این تعریف چگالی لاگرانژی ماده استفاده کردیم $L_m = -\rho$ و همچنین نمادگذاری نقطه، نشان دهنده مشتق نسبت به زمان بی بعد τ می‌باشد یعنی $\partial/\partial\tau$. همچنین برای معادلات میدان‌های اسکالر ϕ و ψ داریم

$$H^2 = -2\dot{H} - \frac{3}{4} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{8} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - \frac{4}{3} \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \frac{V_\phi}{12}, \quad (4-23)$$

$$\rho + V_\psi = 0. \quad (4-24)$$

رابطه (عدم) بقا در این مدل، اینگونه تعریف می‌شود

$$3H(P+\rho) + \dot{\rho} = -\frac{\kappa^2\dot{\psi}}{1+\kappa^2\psi} (L_m + \rho). \quad (4-25)$$

تحت اعمال شرط $L_m = -\rho$ ، درمی‌یابیم که معادله فوق، پایسته می‌ماند. ازین رو داریم

$$3H(P+\rho) + \dot{\rho} = 0. \quad (4-26)$$

لازم به ذکر است که می‌توان از یک بدیل دیگر نیز استفاده کرد و آن هم این است که جمله $(1+\kappa^2\psi)$ را صفر در نظر بگیریم که این تحت شرایطی ارضا می‌شود که میدان ψ ثابت باشد. برای این کار ثابت نیوتون جدیدی را تعریف می‌کنیم که تحت این شرایط کنش (۴-۱) به مدل استاندارد گرانث متریک-پالاتینی تبدیل می‌شود و چگالی لاگرانژی جدید در این مدل به شکل زیر تعریف می‌شود

$$L'_m = \frac{L_m}{1+\kappa^2\psi}. \quad (4-27)$$

این مدل از اهمیت زیادی برخوردار نیست بنابراین از ارائه کامل آن صرف نظر می‌کنیم. به هر حال ما فرض کردیم که ماده پایسته می‌ماند و این مستقل از انتخاب پتانسیل می‌باشد.

به‌طور کلی با معادلات (۴-۲۱) تا (۴-۲۵) می‌توانیم دینامیک عالم را در مدل ما مورد بررسی قرار دهیم. حال در ادامه برای حالت غیرکمینه، دو شکل متفاوت پتانسیل خطی و ضربی را با توجه به رابطه (۴-۸)، مورد کنکاش خود قرار می‌دهیم.

مدل پتانسیل خطی برای حالت غیر کمینه

با فرض بسط خطی تا مرتبه اول برای تابع $f(A, B) = \alpha A + \beta B$ ، آنگاه برای پتانسیل $V(\phi, \psi)$ داریم

$$V(\phi, \psi) = -\alpha A - \beta B + \alpha A + \beta B = 0, \quad (28-4)$$

که در آن $f_A = \phi = \alpha$ و $f_B = \psi = \beta$ تعریف شده‌اند. قابل ذکر است که با استفاده از پتانسیل فوق در معادله (۲۴-۴) درمی‌یابیم که $\rho = 0$ است و ازین رو در حالتی که پتانسیل را صفر در نظر می‌گیریم، میدان ماده نمی‌توانیم داشته باشیم. بنابراین ابتدا سعی می‌کنیم که آن‌ها را صفر کنیم. تحت اعمال این شرایط، معادلات فریدمان (۲۱-۴) و ریچادوری (۲۲-۴) تعمیم یافته به شکل زیر بازنویسی می‌شوند

$$3H^2 = -\frac{1}{1+\phi} \left[\frac{\dot{\phi}}{4\phi} (4H\phi + \dot{\phi}) \right], \quad (29-4)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{1+\phi} \left[2H\dot{\phi} - \dot{\phi}H - \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \ddot{\phi} \right]. \quad (30-4)$$

و همچنین برای معادله میدان ϕ نیز داریم

$$H^2 = -2\dot{H} - \frac{3}{4}\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{8}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - 4\frac{\ddot{\phi}}{\phi}. \quad (31-4)$$

بنابراین با نادیده گرفتن بخش ماده، میدان اسکالر ψ ، از مدل ما حذف می‌شود که این یک ویژگی در حالت کمینه، بدون میدان ماده است و این مشابه با نظریه دوگانه متریک-پالاتینی بدون میدان ماده است. حال با توجه به گفته‌هایمان، معادلات لازم برای حل متغیرهای H و ϕ را به دست می‌آوریم. ترکیب خطی از معادلات (۲۹-۴)، (۳۰-۴) و (۳۱-۴) به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$\dot{H} = \frac{(2H\phi + \dot{\phi})^2}{2\phi}. \quad (32-4)$$

باید توجه کنیم که چون معادله (۳۰-۴)، وابسته می‌باشد بنابراین برای حل متغیرهای H و ϕ تنها احتیاج به معادلات (۲۹-۴) و (۳۱-۴) داریم. از آنجا که حل دوسویه این معادلات درست نیست، بنابراین به حل تحلیلی آن می‌پردازیم. از معادله فریدمان (۲۹-۴)، بدیهی است که میدان اسکالر ϕ باید منفی باشد بنابراین با این فرض، برای حل این معادله برای پارامتر هابل H خواهیم داشت

$$H = -\frac{\dot{\phi}}{2(\phi - \sqrt{\phi})}. \quad (33-4)$$

با این جواب، معادله حاکم به شکل زیر نوشته می‌شود

$$(1 + 4\sqrt{\phi})\dot{\phi}^2 - 2(1 + \sqrt{\phi})\phi\ddot{\phi} = 0, \quad (34-4)$$

که برای ساده‌سازی معادله دیفرانسیلی معمولی فوق تابع جدیدی به شکل $\phi = \tilde{\phi}^2(t)$ تعریف می‌شود و با حل آن نسبت به این تابع جدید سه جواب خواهیم داشت که یک جواب بدیهی $\tilde{\phi} = 0$ ، می‌باشد و دو جواب دیگر اینگونه‌اند

$$\tilde{\phi} = \frac{-2(tc_1 + c_1c_2) \pm \sqrt{2}\sqrt{-tc_1 - c_1c_2}}{2(tc_1 + c_1c_2)}, \quad (35-4)$$

که در آن c_1 و c_2 ضریب ثابت می‌باشند. محتمل‌تر است که جواب مثبت را در نظر بگیریم که با این فرض، برای آن که $\tilde{\phi}$ مثبت باشد باید $c_1 < 0$ و $c_1 > 0$ باشند. در نهایت عبارت به دست آمده برای پارامتر هابل به شکل زیر نوشته می‌شود

$$H = -\frac{\dot{\tilde{\phi}}}{1 + \tilde{\phi}}. \quad (36-4)$$

با جایگذاری حل (۳۵-۴) برای $\tilde{\phi}$ در معادله (۳۶-۴) نهایتاً به دست خواهیم آورد

$$H = -\frac{1}{2t + 2c_2}. \quad (37-4)$$

رابطه فوق وابستگی به ضریب c_1 ندارد و توصیف کننده جهان تابش-غالب می‌باشد ولی از آنجا که نمی‌تواند شتاب تندشونده عالم را توصیف کند پس برای ادامه کارمان قابل استناد و بررسی نمی‌باشد.

مدل پتانسیل ضربی برای حالت غیر کمینه

ابتدا بسط تابع $f(A, B)$ به شکل $f(A, B) = \alpha A - \beta A(-B)^n$ را در نظر می‌گیریم که در این صورت پتانسیل (۸-۴)، به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$V(\phi, \psi) = -\psi \left(\frac{\alpha - \phi}{\beta} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (38-4)$$

که در آن $f_A = \phi = \alpha - \beta(-B)^n$ و $f_B = \psi = \beta n A(-B)^{n-1}$ می‌باشند.

حال با جایگذاری پتانسیل ضربی (۳۸-۴) در معادلات فریدمان (۲۱-۴) و ریچادوری تعمیم‌یافته (۲۲-۴) خواهیم داشت

$$3H^2 = \frac{1}{1 + \phi} \left[\frac{1 + \kappa^2 \psi}{\kappa^2} \rho - \frac{\psi}{2} \left(\frac{\alpha - \phi}{\beta} \right)^{\frac{1}{n}} - 3H\dot{\phi} - \frac{3}{4} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} \right], \quad (39-4)$$

$$2\dot{H} = \frac{1}{1 + \phi} \left[-\frac{1 + \kappa^2 \psi}{2\kappa^2} (P + \rho) + H\dot{\phi} + \frac{3}{4} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - \ddot{\phi} \right]. \quad (40-4)$$

همچنین با استفاده از پتانسیل ضربی (۴-۳۸)، برای معادلات میدان اسکالر ϕ و ψ به ترتیب داریم

$$H^2 = -2\dot{H} - \frac{3}{4}\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{8}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{4\phi} + \frac{\psi}{12\beta n}\left(\frac{\alpha - \phi}{\beta}\right)^{\frac{1-n}{n}}, \quad (4-41)$$

$$\rho - \left(\frac{\alpha - \phi}{\beta}\right)^{\frac{1}{n}} = 0. \quad (4-42)$$

از معادله (۴-۴۲)، درمی‌یابیم که میدان اسکالر ϕ به‌طور خطی به چگالی انرژی مربوط است بنابراین با حل آن داریم

$$\phi(t) = \alpha - \beta\rho^n(t). \quad (4-43)$$

همچنین به دلیل آنکه معادله (۴-۲۶) پایسته می‌ماند، می‌توانیم پارامتر معادله حالت را به شکل $w = P/\rho$ تعریف کنیم. بنابراین برای مشتق مرتبه اول و دوم چگالی انرژی ρ به دست می‌آوریم

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + w\rho), \quad (4-44)$$

$$\ddot{\rho} = 3(1+w)\rho\left[3(1+w)H^2 - \dot{H}\right]. \quad (4-45)$$

لازم به ذکر است که با جایگذاری معادلات فوق و با استفاده از معادله (۴-۴۳)، در روابط (۴-۳۹) تا (۴-۴۲) و همچنین معادله بقای (۴-۲۶)، درمی‌یابیم که تنها سه معادله و دو مجهول داریم که در آن ρ یک متغیر مستقل است. ازین روی یکی از آن‌ها باید وابسته به دیگری باشد. حال واضح است که می‌توان شکل تابعی ρ را به دست آورد

$$\rho(t) = 6H^2\kappa^2\Omega_m a^{-3(1+w)}(t). \quad (4-46)$$

از معادله (۴-۴۱) نیز می‌توانیم شکل جبری میدان اسکالر ψ را محاسبه کنیم

$$\psi(t) = \beta n \rho^{n-1}(t) \left\{ 12H^2(t) + 6\dot{H}(t) + \frac{9\beta n(1+w)\rho^n(t)}{2(\alpha - \beta\rho^n(t))^2} \left[3H^2(t) \left(-2\alpha(n-1+nw) + \beta(n-2+nw)\rho^2(t) \right) + 2(\alpha - \beta\rho^n(t))\dot{H}(t) \right] \right\}. \quad (4-47)$$

حال به سراغ محاسبه پارامتر هابل می‌رویم که با حل معادله فریدمان تعمیم یافته (۴-۳۹)، به دست می‌آید و شکل آن اینگونه است

$$H(t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\rho(t)}}{\kappa\sqrt{\frac{4\alpha^2 + \beta\rho^n(t)(-4 + \beta(2-3n(1+w)))^2\rho^n(t) + 4\alpha(1 + \beta(-2 + 3n(1+w)))\rho^n(t)}{\alpha - \beta\rho^n(t)}}}. \quad (4-48)$$

بنابراین چهار رابطه (۴-۴۳)، (۴-۴۶)، (۴-۴۷) و (۴-۴۸)، معادلات اصلی این بخش می‌باشند. حال با در نظر گرفتن جهانی با پارامتر حالت $w = 0$ یا $P = 0$ و همچنین بی‌بعد سازی این چهار معادله و انتقال آن به دستگاه مختصات انتقال به سرخ، برای پارامتر هابل خواهیم داشت

$$h(z) = \frac{2(1+z)^2 \sqrt{\Omega_m} \sqrt{\alpha - \beta(1+z)} \Omega_m^n}{\sqrt{4\alpha(1+\alpha) + 4\beta(-1+\alpha(-2+3n))(1+z) \Omega_m^n + \beta^2(2-3n)^2(1+z) \Omega_m^n}}. \quad (4-49)$$

همچنین به ترتیب برای معادلات میدان‌های اسکالر ϕ و ψ داریم

$$\phi(z) = \alpha - \beta(1+z) \Omega_m^n, \quad (4-50)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & -\frac{\beta n \left(\frac{1}{1+z}\right)^{3-3n} \Omega_m^{n-1} h(z)}{4\kappa^2 \left(\alpha \left(\frac{1}{1+z}\right)^{3n} - \beta \Omega_m^n\right)^2} \left\{ h(z) \left[-\lambda \alpha^2 \left(\frac{1}{1+z}\right)^{6n} \right. \right. \\ & + 2\alpha\beta(\lambda + 9(n-1)n) \left(\frac{1}{1+z}\right)^{3n} \Omega_m^n - \beta^2(\lambda + 9(n-2)n) \Omega_m^{2n} \left. \right] \\ & \left. + 2(1+z)h'(z) \left[\alpha \left(\frac{1}{1+z}\right)^{3n} - \beta \Omega_m^n \right] \left[2\alpha \left(\frac{1}{1+z}\right)^{3n} + \beta(3n-2) \Omega_m^n \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4-51)$$

و در نهایت، معادله (۴-۴۶) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\rho(t) = \frac{6H^2 \kappa^2 \Omega_m}{a^3(t)}. \quad (4-52)$$

همچنین با فرض $z = 0$ ، از رابطه (۴-۴۹)، می‌توانیم مقدار ضریب α را محاسبه کنیم که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(\Omega_m - 1 - \beta(3n-2) \Omega_m^n + \sqrt{(\Omega_m - 1)(\Omega_m - 1 - 6\beta n \Omega_m^n)} \right). \quad (4-53)$$

رابطه فوق قابل جایگذاری در معادله (۴-۴۹) می‌باشد. بنابراین با استفاده از معادلات متأخر به دست آمده می‌توانیم دینامیک کیهان را در حالت غیرکمینه با پتانسیل ضربی محاسبه کنیم.

حال برای محاسبه مقدار ضرایب α ، β و n در مدل ما و همچنین پارامترهای کیهان‌شناختی H و Ω_m از داده‌های مربوط به پارامتر هابل که در مرجع [۹۹] جمع‌آوری شده‌اند کمک می‌گیریم. در حالتی که داده‌ها مستقل باشند، تابع احتمال به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L = L_0 \exp\left(-\frac{\chi^2}{4}\right), \quad (4-54)$$

که در آن L یک ثابت بهنجارش است و برای تابع خطا داریم

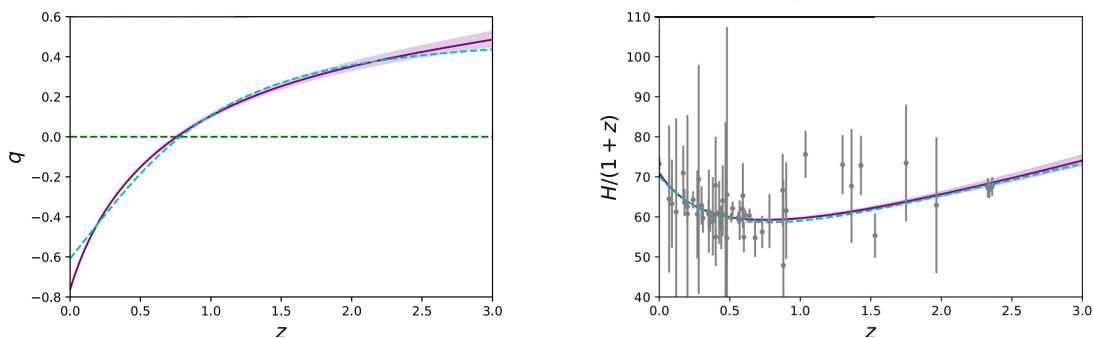
$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{O_i - T_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (۵۵-۴)$$

که O_i و σ_i داده‌های رصدی به همراه خطای آن‌ها و T_i داده‌های نظری هستند.

با بیشینه کردن تابع احتمال (۵۴-۴) بهترین مقادیر برای پارامترهای مدل به همراه خطای 1σ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} H_0 &= 70.976^{+0.960}_{-0.920}, & \Omega_{m0} &= 0.272^{+0.094}_{-0.097}, & \alpha &= 0.369^{+0.006}_{-0.003} \\ \beta &= 1/583^{+0.99}_{-0.99}, & n &= 0.726^{+0.084}_{-0.086}. \end{aligned} \quad (۵۶-۴)$$

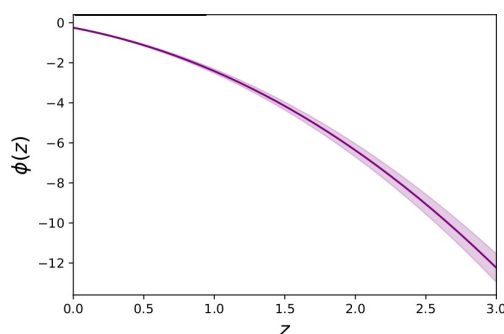
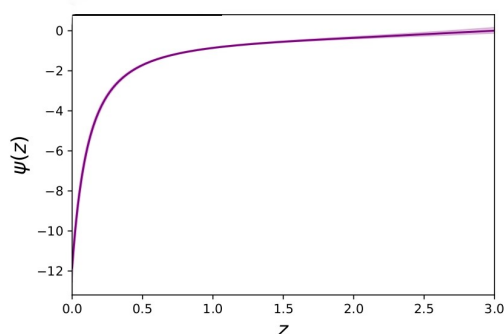
در شکل‌های و تحول پارامتر هابل و همچنین پارامتر کندشوندگی را در این مدل رسم کرده‌ایم. همچنین داده‌های هابل به همراه خطای آن‌ها و پیش‌بینی مدل Λ CDM قابل مشاهده است.



شکل ۴-۱: نمودار تحول پارامتر هابل نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z . نقطه چین در این نمودار نشان‌دهنده مدل ما بوده و خط، حاکی از مدل Λ CDM می‌باشد. شکل ۴-۲: نمودار پارامتر کندشوندگی نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z . نقطه چین در این نمودار نشان‌دهنده مدل ما بوده و خط، حاکی از مدل Λ CDM می‌باشد.

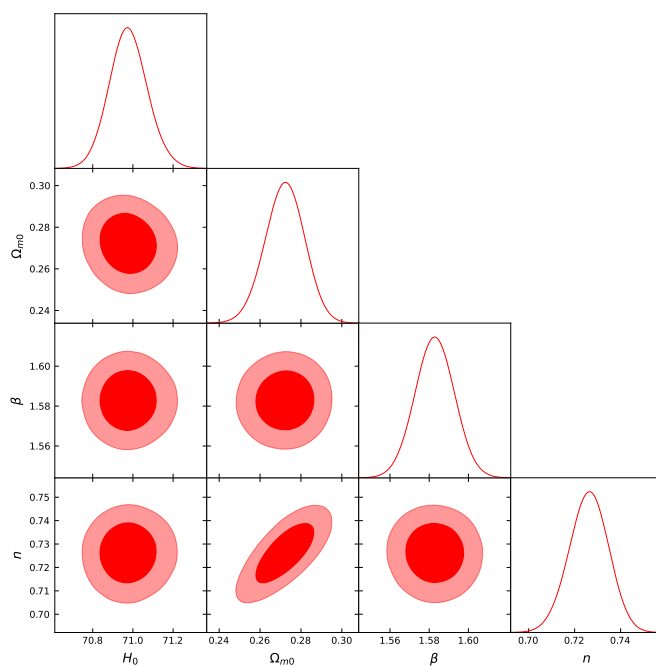
همانطور که مشهود است با بررسی شکل ۴-۱ در می‌یابیم که پارامتر هابل در مدل مورد مطالعه با مدل استاندارد Λ CDM تا حد قابل توجه‌ای هم‌رفتار است. به عنوان مثال می‌بینیم که در $0.1 < z < 0.6$ ، مدل ما در پیش‌بینی مقدار ثابت هابل با Λ CDM هم‌پوشانی دارد. با توجه به شکل ۴-۲، می‌بینیم که در زمان حال یعنی پارامتر کندشوندگی در مدل ما نسبت به Λ CDM بیشتر است که این خود به معنی بیشتر بودن شتاب در مدل غیرکمینه $f(R, L_m)$ می‌باشد و هرچه به سمت مقادیر بالاتر z پیش می‌رویم یعنی $3/0 < z < 2/5$ ، مدل تعمیم یافته‌مان، کندشونده‌تر عالم را پیش‌بینی می‌کند.

در شکل ۴-۳، که به میدان اسکالر ϕ اشاره دارد و توصیف کننده برهمکنش غیرکمینه با انحنای است، مشاهده می‌کنیم که با افزایش پارامتر انتقال به سرخ z ، مقدار ϕ کاهش می‌یابد که این به معنی آن است که



شکل ۴-۴: نمودار میدان اسکالر ψ نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z . نقطه چین در این نمودار نشان‌دهنده مدل ما بوده و خط، حاکی از مدل Λ CDM می‌باشد.

شکل ۴-۳: نمودار میدان اسکالر ϕ نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z . نقطه چین در این نمودار نشان‌دهنده مدل ما بوده و خط، حاکی از مدل Λ CDM می‌باشد.



شکل ۴-۵: نمودار مقایسه پارامترها و ضرایب مدل ما نسبت به یکدیگر.

هرچه به زمان حال نزدیک‌تر می‌شویم برهمکنش میدان ϕ با انحنای کم و کم‌تر می‌شود و در زمان گذشته این برهمکنش افزایش می‌یابد. در شکل ۴-۴ نیز که توصیف‌کننده برهمکنش میدان اسکالر ψ با ماده است، درمی‌یابیم که هرچه به گذشته می‌رویم، برهمکنش ψ با ماده کاهش پیدا می‌کند و در مقادیر نزدیک به زمان کنونی و بیشتر از آن، شاهد کاهش این برهمکنش می‌باشیم.

۲-۴ حالت جفت‌شدگی کمینه

از کنش زیر برای توصیف حالت جفت‌شدگی کمینه استفاده می‌کنیم

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa^2 (R + f_1(\mathcal{R}) + f_2(L_m)) \right\} + S_m. \quad (57-4)$$

واضح است که بین انحنا اسکالر پالاتینی $\mathcal{R}$ و چگالی لاگرانژی L_m برهم‌کنش کمینه وجود دارد. همانند رویه قبل ابتدا از کنش فوق نسبت به متریک و هموستار مستقل از متریک، وردش می‌گیریم. آنگاه به ترتیب خواهیم داشت

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{\kappa^2} g_{\mu\nu} f_1(\mathcal{R}) - \frac{1}{\kappa^2} g_{\mu\nu} f_2(L_m) + f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) - \nabla_\mu \nabla_\nu f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = \left(\frac{1 + \kappa^2 f_{L_m}(L_m)}{2\kappa^2} \right) T_{\mu\nu}, \quad (58-4)$$

$$\bar{\nabla}_\alpha (\sqrt{-g} \phi g^{\mu\nu}) = 0. \quad (59-4)$$

از رابطه (۵۹-۴)، همانند مورد غیرکمینه، ارتباط بین تانسور انحنا پالاتینی و ریچی با معادله (۱۱-۴) داده می‌شود. بنابراین با جایگذاری رد رابطه (۱۱-۴) در کنش (۵۷-۴)، به شکل اسکالر-تانسوری از آن دست می‌یابیم

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \kappa^2 \left[(1 + \phi) R + \frac{3}{2\phi} (\partial\phi)^2 + f_2(L_m) - V(\phi) \right] \right\} + S_m, \quad (60-4)$$

که در آن پتانسیل به شکل $V(\phi) \equiv Af_A - f(A)$ اتخاذ شده است که از معادله کلرو تبعیت می‌کند و میدان اسکالر ϕ نیز اینگونه تعریف شده است $\phi = f_A$.

حال که به نمایش اسکالر-تانسوری مدل کمینه دست یافتیم، به سراغ استخراج معادلات حرکت از آن می‌رویم. برای این کار از کنش (۶۰-۴) نسبت به متریک و میدان اسکالر ϕ وردش می‌گیریم که منجر به روابط زیر می‌شود

$$(1 + \phi) G_{\mu\nu} - \frac{3}{\kappa^2 \phi} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + \frac{3}{\kappa^2 \phi} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \square \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{1}{\kappa^2} g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{1}{\kappa^2} g_{\mu\nu} L_m f_{2,L_m} - \frac{1}{\kappa^2} g_{\mu\nu} f_2 = \left(\frac{1 + \kappa^2 f_{2,L_m}}{2\kappa^2} \right) T_{\mu\nu}, \quad (61-4)$$

$$R - \frac{3}{\kappa^2 \phi} \square \phi + \frac{3}{\kappa^2 \phi^2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - V_\phi(\phi) = 0. \quad (62-4)$$

همچنین با محاسبه دیورژانس هم‌وردای معادله حرکت متریکی (۴-۶۱)، به رابطه (عدم) بقای تانسور انرژی-تکانه دست می‌یابیم

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2 f_{\gamma, L_m}} \left[L_m \nabla_\nu L_m f''_\gamma - T_{\nu\mu} \nabla^\mu L_m f''_\gamma \right], \quad (۴-۶۳)$$

که در آن $f''_\gamma = \frac{d^2 f_\gamma}{dL_m^2}$ تعریف شده است. رابطه فوق را می‌توان ساده‌سازی کرد و به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2 f_{\gamma, L_m}} \left[g_{\mu\nu} L_m - T_{\mu\nu} \right] \nabla^\mu f'_\gamma, \quad (۴-۶۴)$$

که در آن از این نکته سود جستیم که $\nabla_\mu (T_{\nu}^\mu f'_\gamma(L_m)) = \nabla_\mu T_{\nu}^\mu f'_\gamma - T_{\nu\mu} \nabla^\mu L_m f''_\gamma$ حال که شالوده معادلات میدان را در حالت کمینه به دست آوردیم، به استخراج معادلات کیهان‌شناختی آن می‌پردازیم.

۴-۲-۱ کیهان‌شناسی مدل $f(R, L_m)$ در حالت کمینه

همانند رهیافتی که در بخش ۴-۱-۲ در پیش گرفتیم با استفاده از متریک FLRW و تعریفی که از سیال کامل داشتیم به معادلات فریدمان و ریچادوری تعمیم یافته در این حالت می‌رسیم و خواهیم داشت

$$3H^2 = \frac{1}{1 + \phi} \left\{ \left(\frac{1 + \kappa^2 f_{\gamma, L_m}}{\kappa^2} \right) \rho - 3H\dot{\phi} - \frac{3\dot{\phi}^2}{4\phi} + \frac{1}{4} L_m f_{L_m} - \frac{1}{4} f_{L_m} + \frac{V}{4} \right\}, \quad (۴-۶۵)$$

$$2\dot{H} = \frac{1}{1 + \phi} \left\{ - \left(\frac{1 + \kappa^2 f_{\gamma, L_m}}{2\kappa^2} \right) (P + \rho) + H\dot{\phi} + \frac{15\dot{\phi}}{4\phi} + \ddot{\phi} \right\}. \quad (۴-۶۶)$$

همچنین برای معادله میدان اسکالر ϕ (۴-۶۲) و رابطه (عدم) بقای (۴-۶۴) در این حالت داریم

$$H^2 = -2\dot{H} - \frac{3}{4} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{8} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{4\phi} + \frac{V_\phi}{12}, \quad (۴-۶۷)$$

$$3H(P + \rho) + \dot{\rho} = - \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2 f_{L_m}} (L_m + \rho) \dot{L}_m f''. \quad (۴-۶۸)$$

انتخاب چگالی لاگرانژی ماده به شکل $L_m = -\rho$ ، باعث پایداری ماده در رابطه (۴-۶۸) می‌شود، ازین رو می‌رسیم به

$$(1 + \kappa^2 f'(-\rho)) [3H(P + \rho)] = 0, \quad (۴-۶۹)$$

که در آن $f'(-\rho) = \partial f / \partial(-\rho)$ می‌باشد. با صفر کردن پرانتز اول، خواهیم داشت

$$f(-\rho(t)) = c_1 + \frac{\rho(t)}{\kappa^2}, \quad (70-4)$$

که در آن c_1 یک ثابت است. در این جواب بدیهی ست که جمله ثابت، بیان‌کننده همان ثابت کیهان‌شناختی Λ می‌باشد. با اعمال این گزاره به کنش (۵۷-۴) در می‌یابیم

$$L = \kappa^2 \sqrt{-g} \left\{ (1 + \phi)R + \frac{3}{2\phi} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - V(\phi) - 2\Lambda \right\}. \quad (71-4)$$

واضح است که در این حالت، بخش ماده از کنش فوق نسبت به کنش (۵۷-۴) حذف شده است که برای ما در این مدل اهمیت خاصی ندارد.

حال به حالتی که تانسور انرژی-تکانه در آن پایسته می‌ماند برمی‌گردیم و داریم

$$3H(P + \rho) + \dot{\rho} = 0. \quad (72-4)$$

بنابراین در ادامه، معادله بقای انرژی-تکانه فوق را در نظر می‌گیریم و همچنین از سه معادله (۶۵-۴)، (۶۶-۴) و (۶۷-۴) مشهود است که مستقل از یکدیگر نمی‌باشند، پس می‌توانیم ازین چهار معادله استفاده کنیم و به دنبال دو معادله کلی برای حل دو متغیر $\dot{H}$ و $\dot{\phi}$ بگردیم. ابتدا به حل معادله فریدمان (۶۵-۴) می‌رسیم و برای $\dot{\phi}$ به دست می‌آوریم

$$\dot{\phi} = \frac{1}{3\kappa} \sqrt{-\epsilon \kappa^2 (f(-\rho)) + \epsilon H^2 - V(\phi) + \epsilon \rho \sqrt{\phi} - \epsilon \kappa H \phi}. \quad (73-4)$$

بدیهی است که رابطه $\ddot{\phi}$ ، به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \frac{1}{3} \left(-\epsilon H^2 + V(\phi) + \frac{\rho}{\kappa^2} \right) - \frac{1}{3} f(-\rho) + \epsilon H^2 \phi - 2\phi \dot{H} + \frac{1}{3} \phi V_\phi \\ & + \frac{\kappa \sqrt{\phi} (\epsilon f(-\rho) H + 3\epsilon H^3 + \dot{\rho} f'(-\rho) - 2H(3V + \epsilon \dot{H} + \phi V_\phi))}{\sqrt{-\epsilon \kappa^2 (f(-\rho)) + \epsilon H^2 - V(\phi) + \epsilon \rho \sqrt{\phi} - \epsilon \kappa H \phi}} \\ & + \frac{\sqrt{\phi} (-\epsilon H \rho + \dot{\rho})}{\kappa^2 \sqrt{-\epsilon \kappa^2 (f(-\rho)) + \epsilon H^2 - V(\phi) + \epsilon \rho \sqrt{\phi} - \epsilon \kappa H \phi}}. \end{aligned} \quad (74-4)$$

برای متغیر $\dot{H}$ نیز خواهیم داشت

$$\dot{H} = \frac{1}{12\kappa^2} \rho - 3P - \kappa^2 (4f(-\rho) + 24H^2 - 4V + 3(P + \rho)f'(-\rho) + 2\phi V_\phi). \quad (75-4)$$

حال با داشتن روابط فوق می‌توانیم شروع به پرداخت کیهان‌شناختی آن کنیم و در وهله اول فرض می‌کنیم که جهان با غبار پر شده است که این به معنی $P = 0$ است و همچنین با فرض $f(L_m) = \alpha(-L_m)^\beta$

$$V(\phi) = \gamma\phi^\delta, \text{ می‌رسیم به}$$

$$\Omega_m(z) = (1+z)^3 \Omega_{m,0} \quad (۷۶-۴)$$

قابل ذکر است که این معادله منتج از معادله بقا (۷۲-۴) می‌باشد.

با اعمال فرضیات گفته شده بر روی معادله (۷۵-۴) نیز به دست می‌آوریم

$$h'(z) = \frac{-6(1+z)^3 \Omega_{m,0} - \tilde{\alpha}(-4+3\beta)(1+z)^{3\beta} \Omega_{m,0}^\beta + 24h^2(z) + 6(-2+\delta)\tilde{\gamma}\phi f^\delta(z)}{12(1+z)h(z)}, \quad (۷۷-۴)$$

که در جهت بی‌بعدسازی معادلات فوق از پارامترهای بدون بعد $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{6\beta H_0^{3(\beta-1)} \kappa^{2\beta}}$ و $\gamma = 3H_0^3 \tilde{\gamma}$ استفاده کردیم. در نهایت با اعمال شروط گفته شده برای معادله (۷۳-۴) نیز خواهیم داشت

$$\phi'(z) = \frac{6h(z)\phi(z) - \sqrt{6}\sqrt{\phi f(z)}\sqrt{6(1+z)^3 \Omega_{m,0} - \tilde{\alpha}(1+z)^{3\beta} \Omega_{m,0}^\beta - 6h^2(z) + 3\tilde{\gamma}\phi f^\delta(z)}}{3(1+z)h(z)}. \quad (۷۸-۴)$$

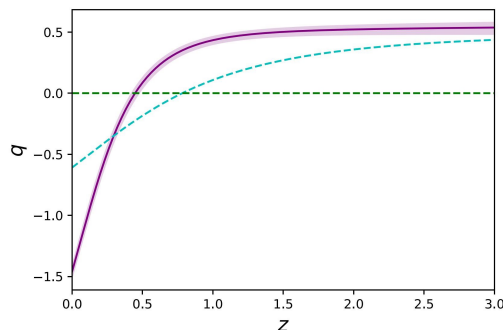
با در نظر گرفتن علامت زیر رادیکال که باید مثبت باشد، شالوده روابط اصلی مان برای کاوش در بحث‌های تجربی، دو معادله (۷۷-۴) و (۷۸-۴) می‌باشند.

در نهایت با توجه به بخش ۴-۱-۲، می‌توانیم پارامترها و ضرایب موجود در مدل کمینه را با بیشینه کردن تابع احتمال (۵۴-۴)، با توجه به تابع خطا (۵۵-۴) تا خطای 1σ به شکل زیر بیان کرد

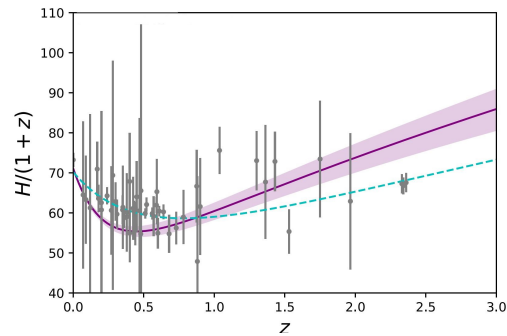
$$H_0 = 71.031^{+1.09}_{-0.634}, \quad \Omega_{m,0} = 0.335^{+0.051}_{-0.157}, \quad \phi_0 = 0.10^{+0.001}_{-0.001}, \\ \alpha = -1/320^{+0.245}_{-0.121}, \quad \beta = -1/000^{+0.001}_{-0.001}, \quad \gamma = 0/001^{+0.000}_{-0.000}, \quad \delta = 2/000^{+0.001}_{-0.001}. \quad (۷۹-۴)$$

در شکل ۴-۶ مشاهده می‌کنیم که در مدل کمینه، مقدار پارامتر هابل نسبت به مدل Λ CDM هرچه به سمت مقادیر پائین‌تری از z ، حرکت می‌کنیم، کم‌تر پیش‌بینی شده است یعنی انبساط عالم یا شدت کمتری در مدل ما صورت می‌گیرد. در حالی که با افزایش زمان، نرخ مقدار پارامتر هابل نیز بیشتر می‌شود. همچنین مشهود است که تقعر نمودار مدل کمینه نسبت به مدل استاندارد Λ CDM بیشتر می‌باشد که این خود منجر به بیشتر بودن مقدار پارامتر جهش^۱ در مدل ما می‌شود.

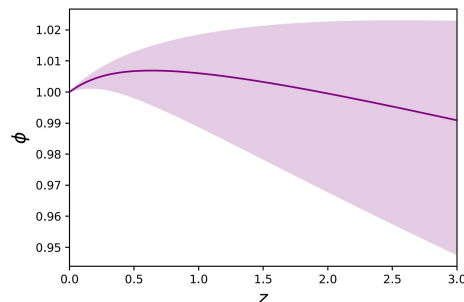
^۱ Jerk parameter



شکل ۴-۷: نمودار پارامتر کندشوندگی نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z . نقطه چین در این نمودار نشان‌دهنده مدل ما بوده و خط، حاکی از مدل Λ CDM می‌باشد.

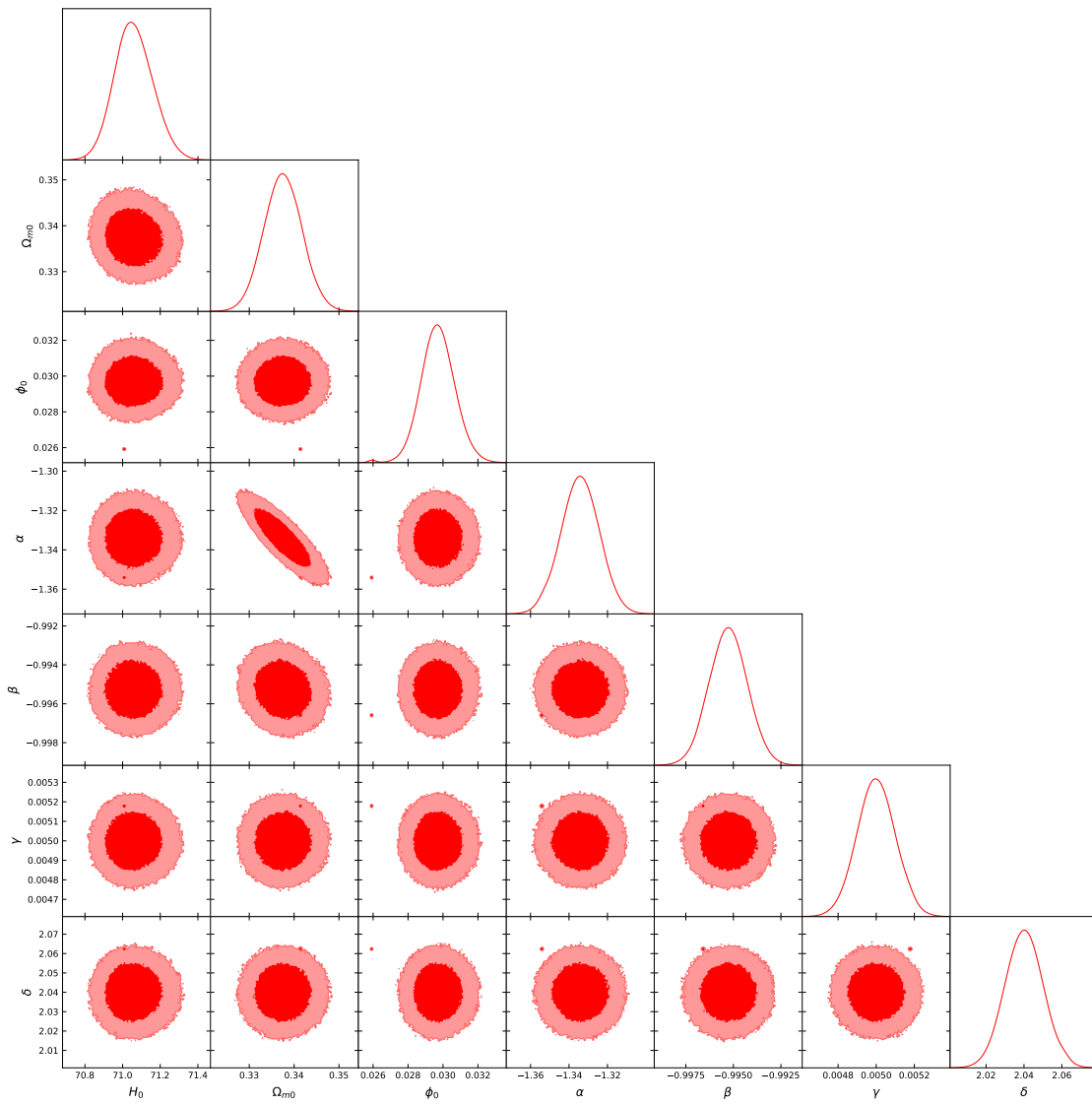


شکل ۴-۶: نمودار تحول پارامتر هابل نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z . نقطه چین در این نمودار نشان‌دهنده مدل ما بوده و خط، حاکی از مدل Λ CDM می‌باشد.



شکل ۴-۸: نمودار میدان اسکالر ϕ نسبت به پارامتر انتقال به سرخ z . نقطه چین در این نمودار نشان‌دهنده مدل ما بوده و خط، حاکی از مدل Λ CDM می‌باشد.

همچنین در شکل ۴-۷ می‌بینیم که در زمان حال، شتاب تندشونده‌تری را نسبت به مدل Λ CDM پیش‌بینی می‌کنیم. قابل ذکر است که مدل کمینه در $z \approx 0/5$ ، مرز کندشونده به تندشونده را نسبت به مدل Λ CDM، سریع‌تر قطع می‌کند، بنابراین مدل ما، نرخ کندشوندگی بهتری را پیش‌بینی می‌کند که این به معنی آن است که عالم کندشونده‌تری نسبت به مدل Λ CDM داریم اما این نرخ با افزایش z ، تقریباً ثابت می‌ماند. نهایتاً در شکل ۴-۸ که نشان‌دهنده میدان اسکالر ϕ در حالت کمینه است نیز مشاهده می‌کنیم که با افزایش زمان، نمودار کاهش می‌یابد و این به معنی کاهش جفت‌شدگی کمینه با انحنا می‌شود و هرچه به زمان‌های قبل‌تر برمی‌گردیم این برهمکنش با انحنا، افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۹: نمودار مقایسه پارامترها و ضرایب مدل ما نسبت به یکدیگر.

۳-۴ نتیجه‌گیری

در این فصل، مدل دوگانه متریک-پالاتینی $f(R, L_m)$ که تعمیمی از مدل دوگانه متریک-پالاتینی $f(R)$ است را به تفصیل به عنوان موضوع اصلی کارمان در این پایان‌نامه، مورد بررسی قرار دادیم. در ابتدا سعی کردیم کنش اصلی نظریه را تعریف کرده و به معادلات میدان آن دست یابیم. در ادامه توانستیم برای مدل $f(R, L_m)$ ، دو حالت برهمکنش کمینه و غیرکمینه را توصیف کنیم.

در بخش ۴-۱-۱، نمایش اسکالر-تانسوری از مدل غیر کمینه را به دست آوردیم و به معادلات میدان حرکت و همچنین به رابطه (عدم) بقای تانسور انرژی-تکانه رسیدیم. سپس با در نظر گرفتن متریک FLRW و سیال کامل برای تانسور انرژی-تکانه، معادلات فریدمان و ریچادوری تعمیم یافته $f(R, L_m)$ را استخراج کردیم. بعد از آن دو حالت پتانسیل خطی و ضربی برای برهمکنش غیرکمینه، در نظر گرفتیم و در ادامه دریافتیم که حالت پتانسیل خطی، به دلیل عدم توضیح شتاب تندشونده عالم، مناسب نبوده و ازین رو حالت پتانسیل ضربی را مورد کنکاش قرار دادیم.

در حالت پتانسیل ضربی، توانستیم دینامیک عالم را توضیح دهیم و پارامترهای کیهان‌شناختی مدل ما را به دست آوریم. پیش‌بینی مدل ما برای پارامتر هابل تا حد خوبی همانند مدل Λ CDM رفتار می‌کند ولی شتاب کندشونده عالم را نسبت به آن کم‌تر نشان می‌دهد. با مشاهده نمودارهای ۴-۳ و ۴-۴، دریافتیم که میدان‌های اسکالر ϕ و ψ با افزایش مقدار پارامتر انتقال به سرخ، بر خلاف یکدیگراند، به این معنی که برهمکنش ϕ با انحنا کم‌تر می‌شود در حالی که برهمکنش ψ با ماده افزایش می‌یابد.

در بخش ۴-۲، حالت جفت‌شدگی کمینه مدل $f(R, L_m)$ را توصیف کردیم و با استفاده از معادلات (۴-۷۷) و (۴-۷۸)، توانستیم برای این حالت، دینامیک عالم را توصیف کنیم. در این بخش مشاهده کردیم که انبساط عالم نسبت به مدل استاندارد Λ CDM از شدت کم‌تری برخوردار است و مقدار پارامتر جهش در مدل کمینه بیشتر است. با توجه به شکل ۴-۷ نیز درمی‌یابیم که نرخ کندشوندگی بهتری در این حالت داریم. در انتها نیز مشاهده کردیم که میدان اسکالر ϕ با افزایش زمان، کاهش می‌یابد که این به معنی کاهش برهمکنش کمینه بین میدان اسکالر ϕ و انحنا می‌باشد.

مراجع

- [1] Newton, Isaac. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Vol. 1. G. Brookman, 1833.
- [2] Einstein, Albert. "Zür allgemeinen Relativitätstheorie." *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber* 47 (1915): 778-786.
- [3] Casey, James. *Exploring curvature*. Springer Science and Business Media, 2012.
- [4] Hicks, Noel J. *Notes on differential geometry*. Vol. 1. Princeton: van Nostrand, 1965.
- [5] Bishop, Richard L., and Richard J. Crittenden. *Geometry of Manifolds: Geometry of Manifolds*. Academic press, 2011.
- [6] Nomizu, Katsumi. *Foundations of differential geometry*. Interscience, 1969.
- [7] A'Campo, Norbert, and Athanase Papadopoulos. "Notes on non-Euclidean geometry." (2012): 1-182.
- [8] Goldberg, Samuel I., and L. Samuel. *Tensor analysis on manifolds*. New York: Macmillan, 1968.
- [9] Danielson, Donald A. *Vectors and Tensors in Engineering and Physics*. Addison-Wesley Longman, 20 July 1992.
- [10] Nakahara, Mikio. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [11] Lee, John M. *Introduction to Riemannian manifolds*. Vol. 2. Cham: Springer, 2018.

- [12] Misner, Charles W, et al. Gravitation. Macmillan, 15 Sept. 1973.
- [13] Christoffel, Elwin Bruno. "Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades." (1869): 46-70.
- [14] O'Neill, B. "Semi-Riemannian geometry with applications to relativity." Pure and Applied Mathematics/Academic Press, Inc (1983).
- [15] Weyl, Hermann. "Reine infinitesimalgeometrie." Mathematische Zeitschrift 2.3 (1918): 384-411.
- [16] Besse, Arthur L. Einstein manifolds. Springer, 2007.
- [17] Lovelock, David. "The four-dimensionality of space and the Einstein tensor." Journal of Mathematical Physics 13.6 (1972): 874-876.
- [18] Weinberg, S. "Gravitation and Cosmology Wiley New York." (1972).
- [19] Natario, Jose. "Relativity and singularities-a short introduction for mathematicians." arXiv preprint math/0603190 (2006).
- [20] Ohanian, Hans C., and Remo Ruffini. Gravitation and spacetime. Cambridge University Press, 2013.
- [21] Carroll, Sean M. Spacetime and geometry. Cambridge University Press, 2019.
- [22] Einstein, Albert. "Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus." Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932 (2005): 316-321.
- [23] Flanders, Harley. Differential forms with applications to the physical sciences. Vol. 11. Courier Corporation, 1963.
- [24] Adamson, Iain T. Introduction to field theory. Courier Corporation, 2007.
- [25] Riesz, F., and B. Szőkefalvi-Nagy. "Functional Analysis (New York: Ungar)." (1955).

- [26] Reed, Michael, and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis*. Vol. 1. Gulf Professional Publishing, 1980.
- [27] Goldstein, Herbert. *Classical Mechanics*. 1950.
- [28] Klein, Oskar. "Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie." *Zeitschrift für Physik* 37.12 (1926): 895-906.
- [29] Gordon, Walter. "Der comptoneffekt nach der schrödingerschen theorie." *Zeitschrift für Physik* 40.1 (1926): 117-133.
- [30] Cohen, Jeffrey M., and Lawrence S. Kegeles. "Electromagnetic fields in curved spaces: A constructive procedure." *Physical Review D* 10.4 (1974): 1070.
- [31] Einstein, Albert. "Die feldgleichungen der gravitation." *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften* (1915): 844-847.
- [32] Ashtekar, Abhay, and Anne Magnon-Ashtekar. "Energy-momentum in general relativity." *Physical Review Letters* 43.3 (1979): 181.
- [33] Ashtekar, Abhay, and Anne Magnon-Ashtekar. "On conserved quantities in general relativity." *Journal of Mathematical Physics* 20.5 (1979): 793-800.
- [34] Johnson, Tristan. "Noether's Theorem: Symmetry and Conservation." (2016).
- [35] Moser, Seth. "Understanding Noether's Theorem by Visualizing the Lagrangian." (2020): 1.
- [36] Abers, Ernest S. and Benjamin W. Lee. "Gauge Theories." *Physics Reports* 9 (1973): 1-141.
- [37] Palatini, Attilio. "Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton." *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1884-1940) 43.1 (1919): 203-212.

- [38] Ferraris, Marco, Mauro Francaviglia, and Cesare Reina. "Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 "Palatini's method" discovered by Einstein in 1925." *General relativity and gravitation* 14 (1982): 243-254.
- [39] Hilbert, David. "Die grundlagen der physik." *Mathematische Annalen* 92.1 (1924): 1-32.
- [40] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Society, 2022.
- [41] Coddington, Earl A., Norman Levinson, and T. Teichmann. "Theory of ordinary differential equations." (1956): 18-18.
- [42] Blair, David E. *Inversion theory and conformal mapping*. Vol. 9. American Mathematical Soc., 2000.
- [43] Ahlfors, Lars Valerian. *Conformal invariants: topics in geometric function theory*. Vol. 371. American Mathematical Soc., 2010.
- [44] Brans, Carl, and Robert H. Dicke. "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation." *Physical review* 124.3 (1961): 925.
- [45] Will, Clifford M. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press (Cambridge, 1993), 1953.
- [46] Magnano, Guido, and Leszek M. Sokółowski. "Physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general-relativistic self-gravitating scalar field." *Physical Review D* 50.8 (1994): 5039.
- [47] Faraoni, Valerio, Edgard Gunzig, and Pasquale Nardone. "Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology." *arXiv preprint gr-qc/9811047* (1998).

- [48] Bombelli, Luca, et al. "On energy in 5-dimensional gravity and the mass of the Kaluza-Klein monopole." *Nuclear Physics B* 289 (1987): 735-756; Sokołowski, Leszek M., and Zdzisław A. Gola. "Instability of Kaluza-Klein cosmology." *Physics Letters B* 195.3 (1987): 349-356; Sokoowski, L. M. "Physical versions of nonlinear gravity theories and positivity of energy." *Classical and Quantum Gravity* 6.12 (1989): 2045; Cho, Y. M. "Unified cosmology." *Physical Review D* 41.8 (1990): 2462.
- [49] Cho, Y. M. "Quantum violation of the equivalence principle in Brans-Dicke theory." *Classical and Quantum Gravity* 14.10 (1997): 2963.
- [50] Wald, Robert M. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [51] Taylor, T. R., and Gabriele Veneziano. "Dilaton couplings at large distances." *Physics Letters B* 213.4 (1988): 450-454; Cvetič, Mirjam. "Low energy signals from moduli." *Physics Letters B* 229.1-2 (1989): 41-44; Ellis, John, et al. "Density-dependent couplings and astrophysical bounds on light scalar particles." *Physics Letters B* 228.2 (1989): 264-272; Damour, Thibault, and Alexander M. Polyakov. "The string dilation and a least coupling principle." *Nuclear Physics B* 423.2-3 (1994): 532-558; Damour, Thibault, and Alexander M. Polyakov. "String theory and gravity." *General Relativity and Gravitation* 26 (1994): 1171-1176.
- [52] Witten, Edward. "Instability of the Kaluza-Klein vacuum." *Nuclear Physics B* 195.3 (1982): 481-492.
- [53] Ford, L. H., and Thomas A. Roman. "Cosmic flashing" in four dimensions." *Physical Review D* 46.4 (1992): 1328; Ford, Larry H., and Thomas A. Roman. "Motion of inertial observers through negative energy." *Physical Review D* 48.2 (1993): 776; Ford, Larry H., and Thomas A. Roman. "Averaged energy conditions and quantum inequalities." *Physical Review D* 51.8 (1995): 4277.

- [54] Teyssandier, Pierre, and Ph Tourrenc. "The Cauchy problem for the $R_+ R_2$ theories of gravity without torsion." *Journal of mathematical physics* 24.12 (1983): 2793-2799; Damour, Thibault, and Gilles Esposito-Farèse. "Tensor-multi-scalar theories of gravitation." *Classical and Quantum Gravity* 9.9 (1992): 2093; Damour, Thibault, and Kenneth Nordtvedt. "Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity." *Physical Review D* 48.8 (1993): 3436.
- [55] Scheel, Mark A., Stuart L. Shapiro, and Saul A. Teukolsky. "Collapse to black holes in Brans-Dicke theory. II. Comparison with general relativity." *Physical Review D* 51.8 (1995): 4236.
- [56] Ravndal, Finn. "Scalar gravitation and extra dimensions." *arXiv preprint gr-qc/0405030* (2004).
- [57] Jordan, P. "Schwerkraft und Weltall; Friedr." Vieweg and Sohn Verlag 2 (1955).
- [58] Dirac, Paul Adrien Maurice. "A new basis for cosmology." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 165.921 (1938): 199-208.
- [59] Kaluza, Th. "Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.(1921), 966. O. Klein." *Z. Phys* 37 (1926): 895.
- [60] Hermann Weyl. *Space - Time - Matter*. New York, Dover Publications, 1952.
- [61] Scherk, Joel, and John H. Schwarz. "How to get masses from extra dimensions." *Nuclear Physics B* 153 (1979): 61-88.
- [62] Cho, Y. M. "Reinterpretation of Jordan-Brans-Dicke theory and Kaluza-Klein cosmology." *Physical Review Letters* 68.21 (1992): 3133.
- [63] Flanagan, Eanna E. "Higher-order gravity theories and scalar-tensor theories." *Classical and Quantum Gravity* 21.2 (2003): 417.

- [64] Olmo, Gonzalo J., and Parampreet Singh. "Covariant effective action for loop quantum cosmology à la Palatini." *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2009.01 (2009): 030.
- [65] Capozziello, Salvatore, et al. "Cosmology of hybrid metric-Palatini $f(X)$ -gravity." *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2013.04 (2013): 011.
- [66] Harko, Tiberiu, et al. "Metric-Palatini gravity unifying local constraints and late-time cosmic acceleration." *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 85.8 (2012): 084016.
- [67] Olmo, Gonzalo J. "The gravity lagrangian according to solar system experiments." *Physical review letters* 95.26 (2005): 261102.
- [68] Olmo, Gonzalo J. "Post-Newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric and Palatini formalism." *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 72.8 (2005): 083505.
- [69] Zwillinger, Daniel, and Vladimir Dobrushkin. *Handbook of differential equations*. Chapman and Hall/CRC, 2021.
- [70] Koivisto, Tomi S. "Cosmology of modified (but second order) gravity." *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1206. No. 1. American Institute of Physics, 2010.
- [71] Capozziello, Salvatore, and Mariafelicia De Laurentis. "Extended theories of gravity." *Physics Reports* 509.4-5 (2011): 167-321.
- [72] Olmo, Gonzalo J. "Palatini approach to modified gravity: $f(R)$ theories and beyond." *International Journal of Modern Physics D* 20.04 (2011): 413-462.
- [73] Tamanini, Nicola, and Christian G. Boehmer. "Generalized hybrid metric-Palatini gravity." *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 87.8 (2013): 084031.

- [74] Weinberg, Steven. *Cosmology*. OUP Oxford, 21 Feb. 2008.
- [75] Hubble, Edwin. "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae." *Proceedings of the national academy of sciences* 15.3 (1929): 168-173; Hubble, Edwin, and Milton L. Humason. "The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae." *Astrophysical Journal*, vol. 74, p. 43 74 (1931): 43.
- [76] Guth, Alan H. "Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems." *Physical Review D* 23.2 (1981): 347.
- [77] Ryden, Barbara S. *Introduction to Cosmology*. Second ed., New York, Ny, Cambridge University Press, 2017.
- [78] Friedmann, Alexander. "Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes." *Zeitschrift für Physik* 21.1 (1924): 326-332.
- [79] Friedman, Alexander. "Über die krümmung des raumes." *Zeitschrift für Physik* 10.1 (1922): 377-386.
- [80] d'Inverno, Ray, and James Vickers. *Introducing Einstein's relativity: a deeper understanding*. Oxford University Press, 2022.
- [81] Robertson, Howard Percy. "Kinematics and world-structure." *Astrophysical Journal*, vol. 82, p. 284 82 (1935): 284; Robertson, Howard P. "Kinematics and World-Structure II." *Astrophysical Journal*, vol. 83, p. 187 83 (1936): 187; Robertson, Howard P. "Kinematics and World-Structure III." *Astrophysical Journal*, vol. 83, p. 257 83 (1936): 257.
- [82] Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker. *Fundamentals of physics*. John Wiley and Sons, 2013.
- [83] Hubble, Edwin Powell. *The observational approach to cosmology*. Vol. 30. Oxford: Clarendon Press, 1937.

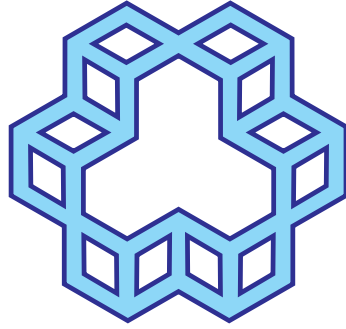
- [84] Carroll, Bradley W., and Dale A. Ostlie. *An introduction to modern astrophysics*. Cambridge University Press, 2017.
- [85] Eddington, A. S. "The pulsation theory of Cepheid variables." *The Observatory*, Vol. 40, p. 290-293 (1917) 40 (1917): 290-293.
- [86] Baumann, Daniel. *Cosmology*. Cambridge University Press, 2022.
- [87] Landau, Lev Davidovich, and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. *Fluid Mechanics: Volume 6*. Vol. 6. Elsevier, 1987.
- [88] Wandelt, Benjamin D., et al. "Self-interacting dark matter." *Sources and Detection of Dark Matter and Dark Energy in the Universe: Fourth International Symposium Held at Marina del Rey, CA, USA February 23–25, 2000*. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [89] Bertone, Gianfranco, Dan Hooper, and Joseph Silk. "Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints." *Physics reports* 405.5-6 (2005): 279-390.
- [90] Cao, Tian Yu, ed. *Conceptual foundations of quantum field theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [91] Weinberg, Steven. "The cosmological constant problem." *Reviews of modern physics* 61.1 (1989): 1; Burgess, C. P. "The cosmological constant problem: why it's hard to get dark energy from micro-physics." *100e Ecole d'Ete de Physique: Post-Planck Cosmology* (2015): 149-197; Padilla, Antonio. "Lectures on the cosmological constant problem." *arXiv preprint arXiv:1502.05296* (2015).
- [92] Aghanim, Nabila, et al. "Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters." *Astronomy and Astrophysics* 641 (2020): A6.

- [93] Einstein, A, and W de Sitter. "On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* vol. 18,3 (1932): 213-4.
- [94] DLT40 Collaboration Haislip JB 241 Kouprianov VV 241 Reichart DE 241 Tartaglia L. 242 243 Sand DJ 242 Valenti S. 243 Yang S. 243 244 245, and Las Cumbres Observatory Collaboration Arcavi Iair 246 247 Hosseinzadeh Griffin 246 247 Howell D. Andrew 246 247 McCully Curtis 246 247 Poznanski Dovi 248 Vasylyev Sergiy 246 247. "A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant." *Nature* 551.7678 (2017): 85-88.
- [95] Milne, Edward Arthur. "Relativity, gravitation, and world-structure." (1936).
- [96] Walker, Arthur Geoffrey. "On Milne's theory of world-structure." *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1937): 90-127.
- [97] Bengtsson, Ingemar. "Anti-de Sitter space." *Lecture notes* 118 (1998).
- [98] Fixsen, Dale J., et al. "The cosmic microwave background spectrum from the full coBE* firas data set." *The Astrophysical Journal* 473.2 (1996): 576.
- [99] Farooq, Omer, et al. "Hubble parameter measurement constraints on the redshift of the deceleration–acceleration transition, dynamical dark energy, and space curvature." *The Astrophysical Journal* 835.1 (2017): 26.

Abstract

In this study, we will consider the cosmological implications of the generalized hybrid metric-Palatini gravity in which the affine connection Ricci scalar is coupled to the baryonic matter Lagrangian through an arbitrary function. For a special case of this function, we will show that the late time observational data on the Hubble parameter could be satisfied by the model. At last we will compare the theory with Λ CDM model.

Keywords: Physics, Hybrid metric-Palatini gravity, Matter-geometry coupling, Cosmology, Scalar-Tensor theory, Hubble parameter.



**K. N. Toosi University of Technology
Faculty of Physics**

**Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Physics**

Cosmology of generalized hybrid metric-Palatini gravity with baryonic matter coupling

**by
Seyyed Reza Jalali**

Supervisors

**Mohammad Hossein Zhoolideh Haghighi and Seyyed
Shahab Shahidi Shadkaam**

Advisors

Javad Taghizadeh Firouzjaee and Abasalt Rostami

February 2025