*** ترمودینامیک و مکانیک آماری ۲ :

* گاز ایده آل :

← به دست آوردن تابع پارش برای گاز ایده آل :

* گاز ایده آل با سیستم های قبلی متفاوت است.

{ سیستم های قبلی غیر مقید و تک ذره بودند
گاز در فیزیک مقید و غیر تک ذره است.

* یک ذره مقید (ذره در جعبه) : ← کلاسیکی ، ← کوانتومی ✓

گاز واقعی:
در یک سیستم قرار دارد
N مول ذره دارد

سیستم دو ترازه
SHD
مخزن گرمایی
دمای T
← غیر مقید و تک ذره

تابع پارش برای آنسامبل کانونی.
└ برای تمام میکروحالت ها فاکتور بولتزمان جمع می کنیم.

$$Z = \sum_{\{r\}} e^{-\beta \epsilon_r}$$

میکروحالتها ← $\{r\}$

ϵ_r ← انرژی یک ذره در جعبه :

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

p^2 ← تکانه خطی

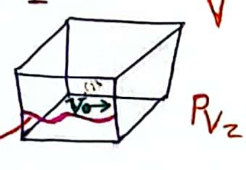
m ← جرم

- انرژی رو داریم فقط دنبال میکروحالت هاش باید باشیم:

* یک ذره مقید (ذره در جعبه) : ① کلاسیکی: اگر بصورت کلاسیکی نگاه کنیم آن ابعاد جعبه به اندازه کافی بزرگ باشند ذره درگیر از اینکه دیواره تماس ندارند. اطلاعاتی راجب اینکه دیواره ها کجان و چند تان ندارند، ← عملاً غیرمقید است.
حجمی احساس نمی کند.

② کوانتومی: ما ذرات میکروسکوپیک رو بررسی داشتیم و به جاش موج می داشتیم تا با معروفی به اسم تابع موج ψ مشخص می کردیم. در حالتی که موج است، موج پخش شده در فضا و تمام دیواره ها رو در لحظه لمس می کنند.

یک ذره به حجم V



$PV = nRT$

تابع موج ψ ←

عدد موج ⟵ $k = \frac{p}{\hbar}$ تکانه

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{V^{1/2}} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)$$

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L} \qquad n_x = 1, 2, \dots$$

$$k_y = n_y \frac{\pi}{L}$$

$$k_z = n_z \frac{\pi}{L}$$

حالت پایه $(1,1,1)$ $\quad E = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2+k_y^2+k_z^2) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$$

* انرژی به تکانه ربط داشت، تکانه هم به عدد موج ربط دارد.

$E = \frac{p^2}{2m}$ ⟵ انرژی خاص $\qquad P = \hbar k$ ⟵ عدد موج خاص

حالت اول بررسی $\left.\begin{matrix}(1,2,1)\\(2,1,1)\\(1,1,2)\end{matrix}\right\}$ ⟶ $E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \times 6$

تبهگنی سه‌گانه

سه تا حالت با انرژی یکسان

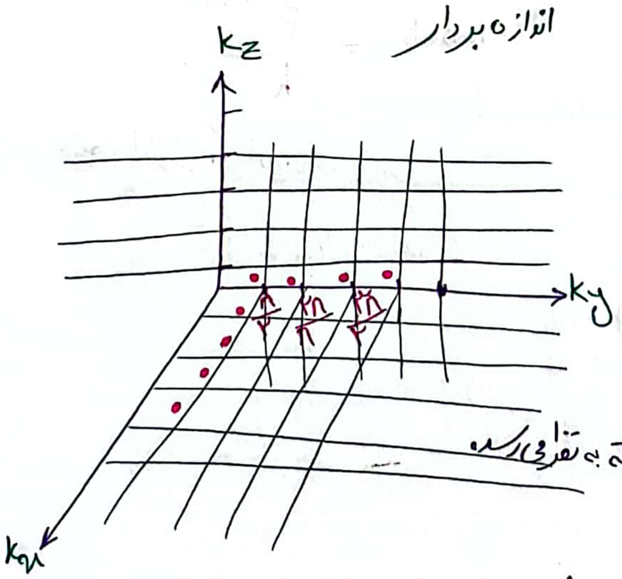
انرژی‌ها هم کوانتیده، حالت‌ها تبهگن به

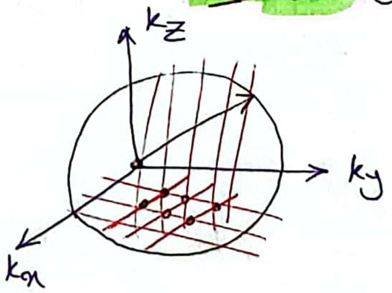
دلیل اینکه ذره رو به صورت کوانتومی در نظر گرفتیم.

فرض کنیم k یک تعداد مشخص باشد ⟵ چند تا میکروحالت نسبت به این تعداد k هست؟ (تبهگنی)

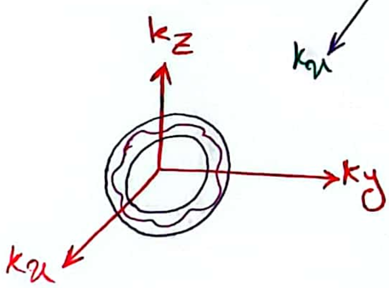
یعنی انرژی یک مقدار مشخص داشته باشد.

$$k_{\text{مشخص}} = \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} = \frac{\pi}{L}\underbrace{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}_{\text{اندازه بردار}} = \frac{Lk}{\pi}$$





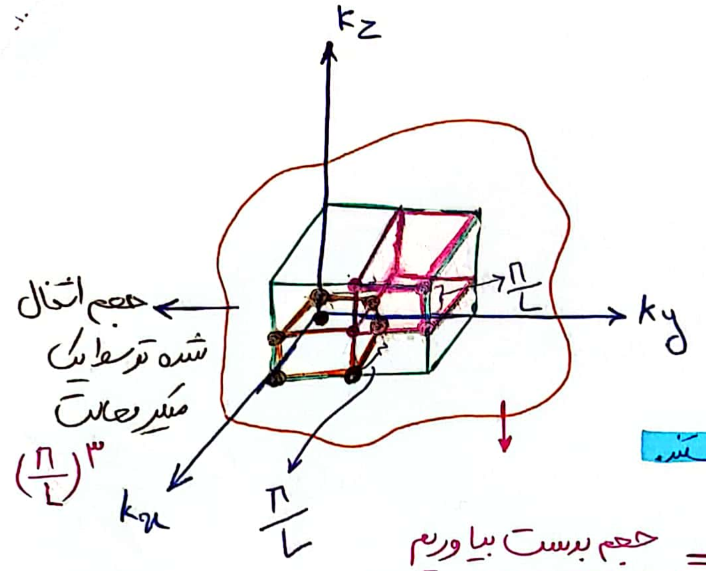
* چون تعداد نقطه‌ها زیاد است ⟵ اندازه بردار پیوسته به نظر می‌رسد.



چند تا نقطه هستند که k آن‌ها بین k و $k+dk$ قرار دارد؟

≡ تعداد میکروحالت‌هایی که انرژی ذره بین k و $k+dk$ است.

* هرکدام از این نقطه‌ها یک حجمی از فضا را اشغال می‌کنند.



$$k = \frac{\pi}{L}(n)$$

$$(|n_x, n_y, n_z|)$$

* یک حجمی داریم که میخواهیم بدانیم، چندتا نقطه داخلش هستند.

$$\text{تعداد نقطه ها} = \frac{\text{حجم بدست بیاوریم}}{\text{حجم یک مکعب}^3 \left(\frac{\pi}{L}\right)}$$

- پس آن‌چه میخواهیم حجم رو وارد سیستم ترمودینامیکی کنیم برای یک ذره با دید کوانتومی نگاه کنیم. چون اگر کلاسیکی نگاه کنیم مثل قبل غیرمقید است.

- حجم به صورت ترمودینامیکی در معادلات بوده است:

$$PV = nRT$$

* ذرات رفتار یک گاز در یک جعبه کوانتومی است.

تابع موج یک ذره در جعبه

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{V^{1/2}} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)$$

اعداد موج در راستای x و y و z: $k_x \quad k_z \quad k_y$

$$k_{\text{عدد موج}} = \frac{P^{\text{تکانه}}}{\hbar}$$

به تکانه ربط دارد.

* تکانه و در نتیجه انرژی کوانتیده هستند.

$k_x = \underbrace{n_x}_{**} \frac{\pi}{L}$ ضریبی است $\frac{\pi}{L}$ هستند $\qquad n_x = 1, 2, \ldots$

$k_y = \underbrace{n_y}_{**} \frac{\pi}{L} \qquad n_y = 1, 2, \ldots$

$k_z = \underbrace{n_z}_{**} \frac{\pi}{L} \qquad n_z = 1, 2, \ldots$

انرژی

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

$$= \hbar^2\pi^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

CS CamScanner

* k مقدارش بزرگ است ولی از اجزای خیلی کوچک تشکیل شده است، چون عدد خیلی بزرگی است ما اون مقدار کوچک رو نمی‌بینیم.

- میکروحالت ها متناظر با k هستند، این k پیوسته است.

$$Z=\int dk\, g(k)\, e^{-\beta\hbar^2\frac{k^2}{2m}}$$

تابع پارش تک ذره

$g(k)$: تعداد تبهگنی

چگالی حالت ها

$$e=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

* تابع پارش تک ذره

$$Z=\int e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}}\, g(k)\,dk$$

$$=\int e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2}{2m}}\,\frac{Vk^2}{2\pi^2}\,dk$$

$$=\frac{V}{2\pi^2}\int k^2 e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2m}k^2}\,dk \qquad \alpha=\frac{\beta\hbar^2}{2m}$$

$$dk=\frac{V}{2\pi^2}\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)\underbrace{\int e^{-\alpha k^2}dk}_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

* تابع پارش تک ذره در جعبه ای به حجم V:

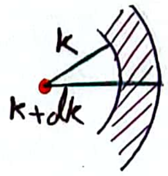
$$Z_1=\frac{V}{\hbar^3}\left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{V}{\hbar^3}\left(\frac{mk_BT}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$Z(T,V,N)$$

چون تک ذره است به N بستگی ندارد.

* حجم پوسته کروی:



$$\frac{\frac{1}{8}\times 4\pi k^2dk}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}=\text{تعداد میکروحالت ها}$$

CamScanner

تعداد میکروحالت هایی که انرژی ذره بین k و dk و k قرار گرفته است.

$$\frac{L^3}{8\pi^3} 4\pi k^2 dk = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \equiv g(k)dk$$

چگالی حالت ها

تعداد میکروحالتهایی که انرژی ذره بین k و $k+dk$ قرار گرفته است.

(در واقع تعداد تبهگنی است)

* k ولقعاً گسسته است ← ولی چون N زیاد ما پیوسته در نظرش گرفتیم.

مهم*

$$g(k)dk = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk$$

→ حالت نیمه پیوسته از تبهگن

چگالی حالتها برای گاز ایده آل

نکته پایین صفحه ⇐ می توان معادلش از صفر تا بی نهایت تعمیم گیرد.

انرژی $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$

هم پیوسته در نظر می گیریم

$k = 0 \to \infty$ (در یک جعبه)

$g(k) \leftarrow k, k+dk$

انرژی نسبت به میکروحالت r

تابع پارش تک ذره

$$Z = \sum_{\{r\}} e^{-\beta \epsilon_r} \longrightarrow Z_1 = dk\, g(k) e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

$$\int dk\, g(k) e^{-\beta E(k)} \to \sum_{\{r\}}$$

میکروحالتها ← متناظر با k هستند (k پیوسته است)

تعداد تبهگنی چگالی حالت ها

$$Z_1 = \int e^{\frac{-\beta \hbar^2 k^2}{2m}} g(k)dk = \int e^{-\frac{\beta \hbar^2 k^2}{2m}} \frac{V k^2}{2\pi^2} dk = \frac{V}{\pi^2} \int k^2 e^{-\frac{\beta \hbar^2}{2m} k^2} dk =$$

$$\alpha = \frac{\beta\hbar^2}{2m}$$

$$\frac{V}{2\pi^2}\left(-\frac{d}{d\alpha}\right) \underbrace{\int e^{-\alpha k^2} dk}_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$Z_1 = \frac{V}{\hbar^3}\left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{3/2} = \frac{V}{\hbar^3}\left(\frac{m k_B T}{2\pi}\right)^{3/2}$$

تک ذره

$$Z(T, V, N)$$

$$Z = V\left(\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m k_B T}{2\pi}}\right)^3 \qquad \lambda_{th} = \hbar\sqrt{\frac{2\pi}{m k_B T}} \qquad Z_1 = \frac{V}{\lambda_{th}^3}$$

$(\text{طول})^3$ $\left(\frac{1}{\text{طول}}\right)^3$

طول موج ترمالی

*کوانتومی: میکروحالتها نقاط فضای فاز $n_x \quad n_y \quad n_z$

*کلاسیکی: میکروحالتها همان k هستند یا عدد حقیقی بین صفر و بی نهایت است. $k = 0 \to \infty$

CamScanner

تابع پارش برای یک ذره در جعبه ای به حجم V و در تماس با منبع گرمایی با دمای T : $Z_1 = \frac{V}{\lambda_{th}^3}$

N تا ذره :

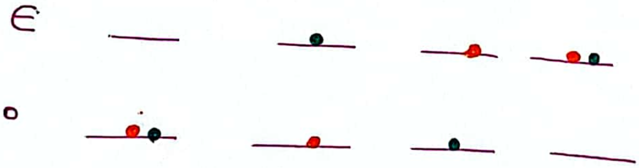
تمیز پذیری ←

تمیز ناپذیر ←

دو تا ذره { کلاسیک / کوانتومی

$$Z_2 = 1 + e^{-\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon} + e^{-2\beta\epsilon} = 1 + 2e^{-\beta\epsilon} + (e^{-\beta\epsilon})^2 = (1+e^{-\beta\epsilon})^2$$

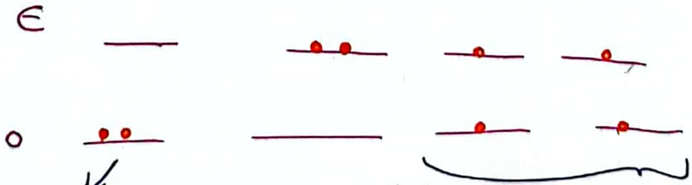
تمیز پذیر =



(۴ میکروحالت)

$Z_N = Z_1^N$ ← اگر ذرات تمیز پذیر باشند.

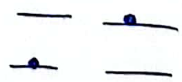
تمیز ناپذیر = (کلاسیکی)



(۳ میکروحالت)

از هم تشخیص داده نمی‌شوند.

$$1+e^{-2\beta\epsilon}+e^{-\beta\epsilon} \neq Z_1^2$$

$Z_1 =$ 

برای گاز ایده آل = ذرات تمیز ناپذیر هستند

$$Z_N \neq Z_1^N$$

$$Z_1 = 1+e^{-\beta\epsilon}$$