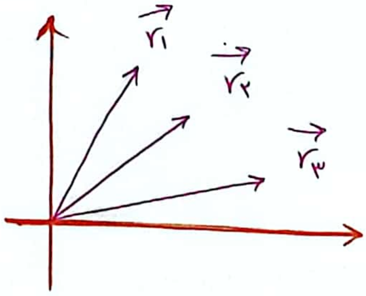
* ذرات یکسان ← سیستم بس ذره (بیش از یک ذره دارد)

(تعداد الکترون + هسته)

← مثل اتم ها



$$\hat{H}\psi(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N) = E\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$H = \sum_i \frac{\vec{P}_i}{2m_i} + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2_{R} - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{Z}\vec{\nabla}_i^2 - \sum_{i=1}^{Z}\frac{Ze^2}{|\vec{r}_i - \vec{R}|} + \sum_{i<0}\frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

← مرکز جرم

تقارن مبادله ⟵ $\psi(s_1, s_2, \dots, s_N)$

← تمام اعداد کوانتومی ذره اول

← مشخص کننده ذره Nام

$$P_{ij}\psi(s_1, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_N) = \psi(s_1, \dots s_j, \dots, s_i, \dots, s_N)$$

$$\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ji}$$

$\hat{P}_{ij}\hat{P}_{kl} \neq \hat{P}_{kl}\hat{P}_{ij}$ ⟵ باهم جابه‌جا نشوند

$$\psi(s_1, s_2, s_3, s_4) = \frac{s_5}{s_2 s_3}e^{-is_1}$$

$$P_{12}P_{14}\psi = P_{12}\left(\frac{s_1}{s_2 s_3}e^{-ig_4}\right) = \frac{s_2}{s_1 s_3}e^{-ij_4} \neq$$

$$P_{14}P_{12}\psi = P_{14}\left(\frac{s_4}{s_1 s_3}e^{-ig_2}\right) = \frac{s_1}{s_4 s_2}e^{-ij_2}$$

$$(\hat{P}_{ij})^2 = 1 \qquad P_{ij}P_{ij}\psi$$

- ویژه مقادیر عملگر مبادله ؟

$$P_{ij}P_{ij}\psi(s_1, \dots, s_N) = P_{ij}\,\alpha\,\psi(s_1, \dots, s_N)$$

(α ← ویژه مقدار)

$$\psi(s_1, \dots, s_N) = \alpha P_{ij}\psi(s_1, \dots, s_N) = \alpha^2\psi(s_1, \dots, s_N)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

$$\underbrace{P_{ij}\psi(s_1,\dots,s_N)}_{} = \pm\,\psi(s_1,\dots,s_N)$$

$+ \rightarrow$ تابع موج متقارن

$- \rightarrow$ تابع موج پادمتقارن

$\rightarrow \psi(s_i,\dots,s_j,\dots,s_i,\dots,s_N)$

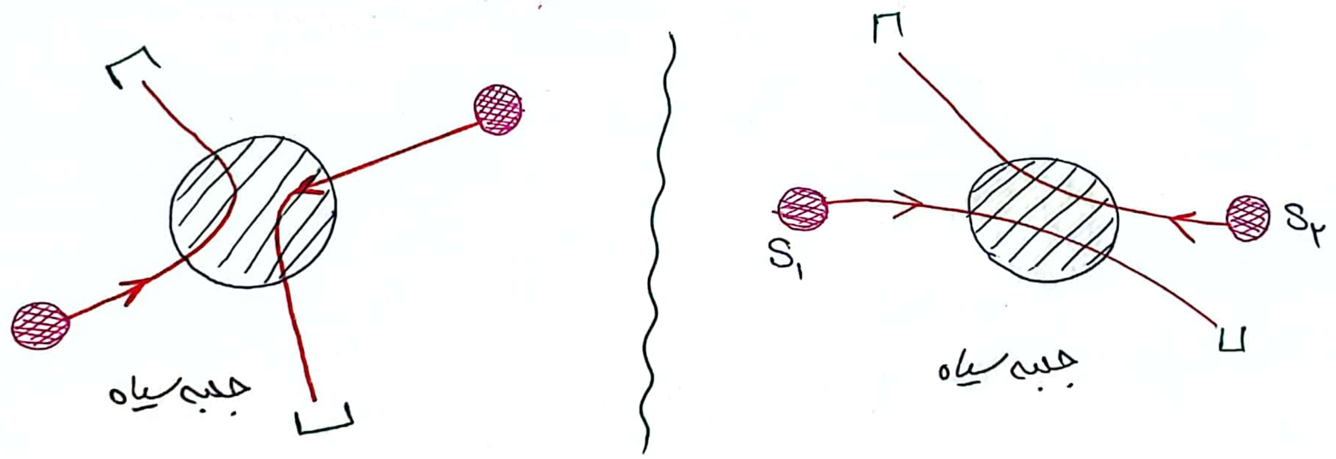
آیا دو ذره در کلاسیک تمیز پذیر هستند؟

مکانیک کلاسیک

تمیز پذیر: توپ بیلیارد

مکانیک کوانتومی

تمیز ناپذیر:



$$|\psi(\text{اتاق سمت چپ})|^2 = |\psi(\text{اتاق سمت راست})|^2$$

$$|\psi(s_1,s_2)|^2 = |\psi(s_2,s_1)|^2$$

$$|\psi(s_1,\dots,s_i,\dots,s_j,\dots,s_N)|^2 = |\psi(s_1,\dots,s_j,\dots,s_i,\dots,s_N)|^2$$

$$\boxed{1 = (P_{ij})}$$

پادمتقارن	متقارن
↓	↓
فرمیون‌ها	بوزون‌ها
↓	↓
آمار فرمی – دیراک	آمار بوز – اینشتین
	چگالش بوز – اینشتین

$$P_{ij}\psi(s_1,\dots,s_i,\dots,s_j,\dots,s_N)$$

تابع موجی که می‌تواند ذرات یکسان کوانتومی را توصیف کند.

$$[\hat{H}, P_{ij}] = 0$$

طبیعت تحت عملگر مبادله‌ای تغییر نکند!

$HP_{ij}\psi(s_1,\dots,s_i,\dots,s_j,\dots,s_N)$

$= H\psi(s_1,\dots,s_j,\dots,s_i,\dots,s_N) = E\psi(s_1,\dots,s_i,\dots,s_j,\dots,s_N) =$

$= EP_{ij}\psi(s_1,\dots,s_i,\dots,s_j,\dots,s_N) = P_{ij}E\psi(s_1,\dots,s_i,\dots,s_j,\dots,s_N)$

$= P_{ij}H\psi(s_1,\dots,s_i,\dots,s_j,\dots,s_N)$ $\qquad [x, p_x] \neq 0$

$\Rightarrow P_{ij}H = HP_{ij} \Rightarrow [H, P_{ij}] = 0$

* N تا ذره داریم: $\qquad V(s_i)$

$V(s_1,\dots,s_N) = V(s_1) + V(s_2) + \dots + V(s_N)$

$\hat{H} = \sum \frac{\hat{p}_i}{2m_i} + V = \sum_i \hat{H}_i = \sum_i \left(\frac{\hat{p}_i}{2m_i} + V(s_i)\right)$

$H\psi(s_1,\dots,s_N) = E\psi(s_1,\dots,s_N)$

$H_i\psi_i(s_i) = E_i\psi_i(s_i)$ $\qquad E = \sum_i E_i \longrightarrow$ سیستم بس ذره ذرات یکسان

$\psi(s_1,\dots,s_N) = \psi_1(s_1)\psi_2(s_2)\dots\psi_N(s_N) \longrightarrow$ آیا این تابع موج مناسب ذرات یکسان کوانتومی است؟

← متقارن / پادمتقارن سازی می‌کنیم

$\psi(s_1,s_2) = \psi_{n_1}(s_1)\psi_{n_2}(s_2)$

$\psi_s(s_1,s_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{n_1}(s_1)\psi_{n_2}(s_2) + \psi_{n_2}(s_2)\psi_{n_2}(s_1)\right)$

$\psi_a(s_1,s_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{n_1}(s_1)\psi_{n_2}(s_2) - \psi_{n_1}(s_2)\psi_{n_2}(s_1)\right)$

$\psi_s(s_1,\dots,s_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P P\psi_{n_1}(s_1)\dots\psi_{n_N}(s_N)$

۱	۲	۳	
۲	۱	۳	فرد
۱	۳	۲	فرد

۱۲۳ ← ۱۳۲ ← ۳۱۲

۱۲۳ ← ۱۳۲ ← ۳۱۲ زوج

۱۲۳ → ۳۱۲ → ۲۳۱ → ۱۲۳ زوج

۱۲۳ → ۲۱۳ → ۳۲۱ → ۱۳۲ → ۲۱۳ فرد

$$\psi_a(s_1,\dots,s_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P}(-P)^{P}P\,\psi_{n_1}(s_1)\dots\psi_{n_N}(s_N)$$

عدد زوج = جایگشت های زوج

عدد فرد = جایگشت های فرد

$$\psi_a(s_1,s_2)=\frac{1}{\sqrt{2!}}\left(\psi_{n_1}(s_1)\psi_{n_2}(s_2)-\psi_{n_1}(s_2)\psi_{n_2}(s_1)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2!}}\begin{vmatrix}\psi_{n_1}(s_1) & \psi_{n_1}(s_2)\\ \psi_{n_2}(s_1) & \psi_{n_2}(s_2)\end{vmatrix}$$

$$\psi_i(s_1,\dots,s_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\psi_{n_1}(s_1) & \psi_{n_1}(s_2) & \dots & \psi_{n_1}(s_N)\\ \psi_{n_2}(s_1) & & & \\ \psi_{n_3}(s_1) & & & \\ \vdots & & & \\ \psi_{n_N}(s_1) & & & \psi_{n_N}(s_N)\end{vmatrix}$$

* اصل طرد پاولی :

$$\psi(s_1,s_2)=\psi_{n_1}(s_1)\psi_{n_1}(s_2)$$

$$\psi_m(s_1,s_2)=\frac{1}{\sqrt{2!}}\left(\psi_{n_1}(s_1)\psi_{n_1}(s_2)-\psi_{n_1}(s_2)\psi_{n_1}(s_1)\right)=0$$