** مکانیک کوانتوم ۲ :

* چرخش :

* درمکانیک کلاسیک : درمکانیک کلاسیک با ماتریس 3 × 3 نشان می دهیم.

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[R_x(\delta), R_y(\delta)] = R_z(\delta^2) - 1$$

* درمکانیک کوانتومی :

✓ سه بعدی ⟵ تابع موج

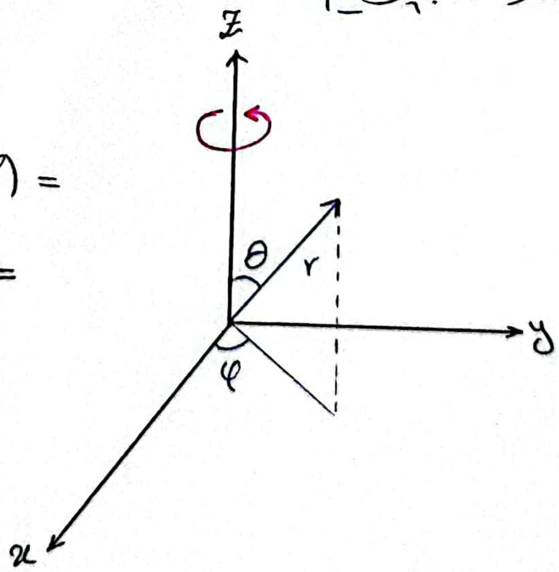
✓ هامیلتونی مولد تحول زمانی است.

$$\psi(\vec{r})$$

$$\psi(r, \theta, \varphi)$$

$$|\delta\varphi| \ll \varphi$$

- می خواهیم حول محور z بچرخونیم :



$$R_z(\delta\varphi)$$

$$R_z(\delta\varphi)\psi(r,\theta,\varphi) = \psi(r,\theta,\varphi - \delta\varphi) =$$

$$\psi(r,\theta,\varphi) - \partial_\varphi \psi(r,\theta,\varphi)\,\delta\varphi =$$

$$(1 - \delta\varphi\,\partial_\varphi)\psi(r,\theta,\varphi)$$

$$R_z(\delta\varphi) = 1 - \delta\varphi\,\partial_\varphi$$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial\varphi} L_z$$

$$L_z = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$R_z(\delta\varphi) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,\delta\varphi\, L_z$$

$$\boxed{R_{\hat{n}}(\delta) = 1 - \frac{i}{\hbar}\,\delta\,(\hat{n}\cdot\vec{L})}$$ $\Longleftarrow$ • عملگر چرخش برای زوایای بسیار کوچک

$\Downarrow$

✓ این برای ذراتی هست که اسپین نداشته باشن.

* عملگر چرخش رو بدست بیاریم برای زوایای دلخواه؛ حول محور z با زاویه φ بچرخونیمش.

زوایای: θ_n ام هستند ← بازاویه متناهی

$$R_z(\theta) = e^{-i/\hbar\, L_z} \longrightarrow R_{\hat{n}}(\theta)\, e^{-i/\hbar\,(\hat{n}\cdot\vec{L})}$$

$$\underset{\delta}{R_z(1^\circ)}\ \underset{\delta}{R(1^\circ)}\ \underset{\delta}{R_z(1^\circ)}\ \psi(r,\theta,\varphi)$$

$$N\delta = \theta$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{x}{N}\right)^N = e^{x}$$

$$R_z(\theta) = \lim_{N\to\infty}\left(R_z(\delta)\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\theta}{N}L_z\right)^N = e^{-i/\hbar\, L_z}$$

$$R_z(\theta) = e^{-i/\hbar\,\theta L_z} \longrightarrow \boxed{R_{\hat{n}}(\theta) = e^{-i/\hbar\,\theta\,\hat{n}\cdot\vec{L}}}$$ → مهم حفظ کنید

$$R^{-1}_{\hat{n}}(\theta) = R_{\hat{n}}(-\theta) = e^{i/\hbar\,\theta\,\hat{n}\cdot\vec{L}} = R^{+}_{n}(\theta)$$

• معکوسش با الحاقیش برابر است پس چرخش عملگر یکانی است.

$$R_n(\theta)\,R^{+}_n(\theta) = 1 \longrightarrow$$

✓ تعریف یکانی.

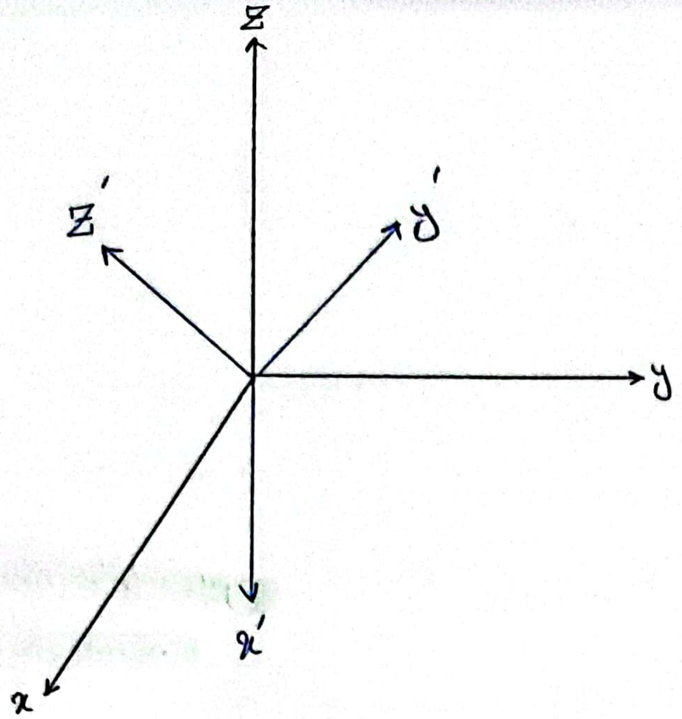
✓ چرخش عملگر یکانی است.

** * در حالتی که اسپین داشته باشیم:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad R_n(\theta) = e^{-i/\hbar\,\theta(\hat{n}\cdot\vec{L})}$$

→ * اگر اسپین داشته باشیم عملگر چرخش فرمولش بصورت رو برو است.

*** زوایای اویلر:



$$xyz \xrightarrow[\text{حول } z \text{ با زاویه } \alpha]{} uvz \xrightarrow[\text{حول } v \text{ با زاویه } \beta]{} wvz' \xrightarrow[\text{حول } z' \text{ با زاویه } \gamma]{} x'y'z'$$

(α, β, γ)

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{z'}(\gamma) R_v(\beta) R_z(\alpha) = e^{-i/\hbar\, \gamma L_{z'}}\, e^{-i/\hbar\, \beta L_v}\, e^{-i/\hbar\, \alpha L_z}$$

$$L_v = R_z(\alpha) L_y R_z(-\alpha) \longrightarrow R_y(\beta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(-\alpha)$$

$$R_v(\beta) = e^{-i/\hbar\, \beta L_v} = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\beta L_v\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\beta L_z\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i}{\hbar}\beta L_v\right)^3 + \cdots$$

$$L_v = R_z(\alpha) L_y R_z(-\alpha)$$

$$L_v^2 = L_v L_v = R_z(\alpha) L_y R_z(-\alpha) R_z(\alpha) L_y R_z(-\alpha) = R_z(\alpha) L_y^2 R_z(-\alpha) =$$

$$e^{-i/\hbar\, \beta L_v} = R_z(\alpha) e^{-i/\hbar\, \beta L_y} R_z(-\alpha)$$

$$R_{z'}(\gamma) = R_v(\beta) R_z(\gamma) R_v(-\beta)$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{z'}(\gamma) R_v(\beta) R_z(\alpha) = R_v(\beta) R_z(\gamma) \underbrace{R_v(-\beta) R_v(\beta)}_{1} R_z(\alpha)$$

$$= R_v(\beta) R_z(\gamma) R_z(\alpha)$$

$$= R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(-\alpha) R_z(\gamma) R_z(\alpha)$$

$$\Rightarrow R(\alpha,\beta,\gamma) = \underbrace{R_z(\alpha)}_{e^{i\gamma\hbar L_z}}\,\underbrace{R_y(\beta)}_{L_y}\,\underbrace{R_z(\gamma)}_{L_z} \Rightarrow$$ حفظ کنیم

$$A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle \qquad H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

* دنبال پایه هایی می گردیم که R در آن قطری باشد:

$$[B,A]=0 \qquad BA=AB \qquad AB|\psi\rangle = BA|\psi\rangle$$

✓ به دنبال عملگری می گردیم که با عملگر جدید جابه جا شوند

$$A(B|\psi_n\rangle) = BA|\psi_n\rangle = B(a_n|\psi_n\rangle) = a_n(B|\psi_n\rangle)$$

$$B|\psi_n\rangle = \alpha|\psi_n\rangle$$

وقتی جابه جا شوند ویژه پایه های عملگرها هم روی همان پایه ها قطری می شوند.

✓ تمام عملگرهای دو به دو جابه جا شونده همزمان قطری می شوند.

(در مجموعه عملگرهای دو به دو جابه جا شونده همشان باهم قطری می شوند)

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) \qquad [L^2, L_z] = 0$$

$$\begin{cases} L^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle \\ L_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle \end{cases}$$

$$L^2 \underbrace{Y_{l,m}(\theta,\varphi)}_{\text{هماهنگ کروی}} = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \langle \vec{r}|l,m\rangle$$

$$\psi(r) = \langle \vec{r}|\psi\rangle \qquad L_z Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \hbar m Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

$1S^2\ 2S^2\ 2P^4$ ($m=1$, $m=3$, n, $l=0$, $l=1$)

$$[L^2, R] = 0 \longrightarrow R(\alpha,\beta,\gamma)|l,m\rangle = A|l,m\rangle$$

$$1R(\alpha,\beta,\gamma)|l,m\rangle = \sum_{l',m'} |l',m'\rangle \underbrace{\boxed{\langle l',m'|R(\alpha,\beta,\gamma)|l,m\rangle}}_{D}$$

ماتریس ویگنر

$$\text{نمایش ماتریسی عملگر } R \text{ در پایه های } ml \longleftarrow D^{(l)}_{l',m}(\alpha,\beta,\gamma)$$