*** مکانیک کوانتومی ۲ :

عملگر هرمیتی $A^\dagger = A$ ⟵ $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$ ⟵ غیر تبهگن

حقیقی

عملگر پادهرمیتی $A^\dagger = -A$

عملگر یکانی $U^\dagger = U^{-1}$

پایه فضای هیلبرت $\{|\psi_n\rangle\}$

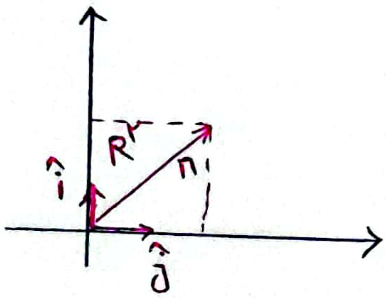
$$\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = 1$$

$$|\phi\rangle = \sum_n \underbrace{|\psi_n\rangle}\underbrace{\langle\psi_n|\phi\rangle} = 1$$

کت دلخواه

پایه فضا

مؤلفه های $|\phi\rangle$ در پایه $|\psi_n\rangle$



$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1$

$\hat{j}\cdot\hat{j} = 1$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$

$(\hat{i}, \hat{j})$

$$\vec{A} = \underbrace{\boxed{(\vec{A}\cdot\hat{i})}}_{A_x}\hat{i} + \underbrace{\boxed{(\vec{A}\cdot\hat{j})}}_{A_y}\hat{j}$$

$$\vec{B} = \underbrace{\boxed{(\vec{B}\cdot\hat{i})}}_{B_x}\hat{i} + \underbrace{\boxed{(\vec{B}\cdot\hat{j})}}_{B_y}\hat{j}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

$|\phi_1\rangle$

$|\phi_2\rangle$

$$\langle\phi_2|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\,1\,|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|\sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\phi_1\rangle$$

$$\{|\psi_n\rangle\} \quad = \sum_n \underbrace{\langle\phi_2|\phi_n\rangle}_{\langle\psi_n|\phi_2\rangle^*}\langle\psi_n|\phi_1\rangle = \sum_n (\langle\psi_n|\phi_2\rangle)^*(\langle\psi_n|\phi_1\rangle)$$

چشم داشتی $\quad \langle A\rangle_\psi = \dfrac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = a$

عملگر A $\quad \Delta A = A - \langle A \rangle$

عملگر B $\quad \Delta B = B - \langle B \rangle$

اختلاف از = موجود - میانگین

میانگین عملگر A

هرمیتی

واریانس $|\Delta B| = \sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}$

$$|\Delta A| = \sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle} = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)(A - \langle A \rangle) \rangle} = \sqrt{\langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle A^2 \rangle - \underbrace{\langle 2A\langle A \rangle \rangle}_{2\langle A \rangle \langle A \rangle = 2\langle A \rangle^2} + \langle \langle A \rangle^2 \rangle}$$

$$|\Delta A| = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \longrightarrow$$ واریانس عملگر A

کای chi

$$|\chi\rangle = \Delta A |\psi\rangle$$

$$|\phi\rangle = \Delta B |\psi\rangle \qquad \langle \phi | \phi \rangle \langle \chi | \chi \rangle \geq |\langle \phi | \chi \rangle|^2$$

$$\langle \chi | \chi \rangle = \langle \psi | (\Delta A)^\dagger (\Delta A) | \psi \rangle = \langle \psi | (\Delta A)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle |\Delta A|^2$$

$$* = \frac{\langle \psi | (\Delta A)^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \langle (\Delta A)^2 \rangle_\psi$$

$$\langle \phi | \phi \rangle = \langle \psi | (AB)^\dagger (AB) | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle |\Delta B|^2$$

$$\langle \phi | \chi \rangle = \langle \psi | AB\,\Delta A | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle | \langle AB\,\Delta A \rangle |^2$$

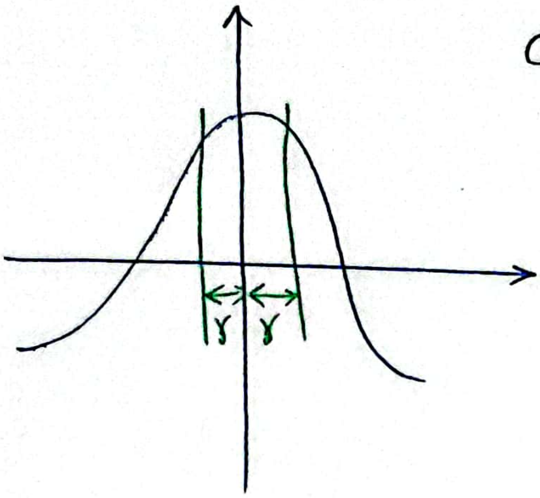
$$\langle \psi | \psi \rangle |\Delta B|^2 \langle \psi | \psi \rangle |\Delta A|^2 \geq \langle \psi | \psi \rangle^2 \langle AB\,\Delta A \rangle_\psi^2$$

$(|\Delta B|^2 |\Delta A|^2 \geqslant \langle \Delta B \Delta A \rangle^2)$

اینجوری هم سادش کنم:

$$xy = \frac{1}{2}(xy - yx + \frac{1}{4}(xy + yx)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{[x,y]}_{\text{مقدار ویژه موهومی}} + \frac{1}{2}\underbrace{\{x,y\}}_{\text{مقدار ویژه حقیقی}}$$



*واریانس رو می‌تونیم با سیگما بدست بیاریم.

۲عدم قطعیت در اندازه‌گیری اون عدد اینجا A هست که مشاهده‌گر

که انتظار دارم چشم‌داشتی رو بدست بیاره.

یک عدد حول خودش میانگین.

$$\Delta B \Delta A = \frac{1}{2}[\Delta B, \Delta A] = \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\}$$

$$[A,B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = -[A,B]$$

* اگر دو عملگر هرمیتی باشند جابه‌جاگر آنها پادهرمیتی است و پادجابه‌جاگرشان هرمیتی است.

$$|\langle \Delta B \, \Delta A \rangle_\psi|^2 = \frac{1}{2}\langle [\Delta B, \Delta A] \rangle_\psi + \frac{1}{2}\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle_\psi$$

$$= \frac{1}{4}|\langle \Delta B, \Delta A \rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle|^2$$

طبق $\Rightarrow = \frac{1}{4}|\langle [\Delta B, \Delta A] \rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle \{\Delta B, \Delta A\} \rangle|^2 \geqslant \frac{1}{4}|\langle [\Delta B, \Delta A] \rangle|^2$

$$|\Delta A||\Delta B| \geqslant \frac{1}{2}|\langle [\Delta B, \Delta A] \rangle|$$

$$[\Delta B, \Delta A] = \Delta B \Delta A - \Delta A \Delta B = (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle) - (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle)$$

$$= BA - B\cancel{\langle A \rangle} - \cancel{\langle B \rangle}A + \langle A \rangle\langle B \rangle - AB + \cancel{A}\langle B \rangle + B\cancel{\langle A \rangle} - \cancel{\langle A \rangle}\langle B \rangle$$

$$= BA - AB$$

$$\boxed{|\Delta A||\Delta B| \geqslant \frac{1}{2}|\langle [A,B] \rangle|} \Leftarrow \text{طبق عدم قطعیت}$$

$A = x \quad [x, P_x] = i\hbar$

$B = P_x \quad \Delta x \Delta P_x \geqslant \frac{1}{2}|\langle i\hbar \rangle| = \frac{\hbar}{2}$

** چرخش :

عملگر تکانه زاویه ای $\vec{L}$

$$H|nlm\rangle = E_n|nlm\rangle$$

$$L^2|nlm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|nlm\rangle$$

$$L_z|nlm\rangle = \hbar m|nlm\rangle$$

$$\psi_{nlm}(\vec{r})$$

* $\vec{S}$ عملگر اسپین

- به این تکانه زاویه ای ذاتی است ولی کیا شباهت رابطه ای است و خاصیت کوانتومی ذاتی است ولی نمی توانیم بگوییم اسپین یعنی e دور خودش می چرخد.

- چرخش ماتریس است.

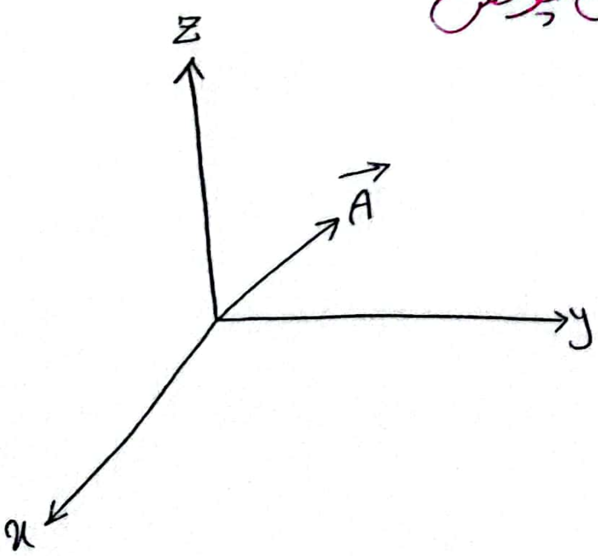
- $s, m_s \longrightarrow$ جمع این دوتا تکانه زاویه ای اثر عجیبی دارد که وقتی با هم جمع می شوند چیز جدیدی تولید می شود $\longrightarrow L+S=?$

R ماتریس چرخش

$R_{\phi}(\theta)$

ϕ: محور چرخش

$\theta \longrightarrow$ زاویه چرخش



$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad R_x(\phi) R_y(\theta) \neq R_y(\theta) R_x(\phi)$$

* فرض، زاویه چرخش خیلی کوچک باشد δ :

$$[R_x(\delta), R_y(\delta)] = ?$$

$$= R_x(\delta) R_y(\delta) - R_y(\delta) R_x(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & \sin\delta \\ 0 & -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta & 0 & \sin\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\delta & 0 & \cos\delta \end{pmatrix} -$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \delta^2 & 0 \\ -\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\delta^2) - 1$$

$$R_z(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & \delta^2 & 0 \\ -\delta^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [R_x(\delta), R_y(\delta)] = R_z(\delta^2) - 1$$

* چرخش مشاهدات و معادلات ما را تغییر نمی‌دهد و تبدیل یکتایی است و فیزیک را تغییر نمی‌دهد.

ماتریس چرخش $\rightarrow R^T R = 1 \qquad \det(R^T R) = \det I = 1 = \det R^T \times \det R$

$R^T = R^{-1} \qquad = \det R \times \det R = (\det R)^2 = 1 \rightarrow \det = \pm 1$

← فقط به حالت + چرخش اهمیت می‌دهیم.