«مکانیک کوانتوم ۲»

* عملگر هرمیتی
$$A^{\dagger} = A \qquad (\dagger \leftarrow T^{*})$$

* عملگر پادهرمیتی
$$A^{\dagger} = -A$$

* عملگر یکانی
unitary
$$U^{-1} = U^{\dagger}$$

$$AA^{-1} = I$$

$$AA^{\dagger} = I$$

مقدار ویژه

$$\underline{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

قطری شدنی

اگر یک عملگر را بتوانیم اینطوری بنویسیم:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \; a_n \end{pmatrix}$$

این معادله که قبلاً بوده

★ اگر $A$ هرمیتی باشد: فرض کنیم که این ماتریس هرمیتی هم باشه

$$A|\psi_{\underline{n}}\rangle = a_{\underline{n}}|\psi_{\underline{n}}\rangle$$

$n = 1, \dots, N$

- فرض کنیم $\langle\psi_m|$ ، $m \in (1, \dots, N)$

I

$$\langle\psi_m|A|\psi_n\rangle = \langle\psi_m|a_n|\psi_n\rangle = a_n\langle\psi_m|\psi_n\rangle$$

معادله ویژه مقداری

$$A|\psi_m\rangle = a_m|\psi_m\rangle$$

II

$$\underbrace{\langle\psi_m|A|\psi_m\rangle^{*}} = a_m^{*}\,\underbrace{\langle\psi_n|\psi_m\rangle^{*}} \longrightarrow$$ اینو کلاً ازش استار بگیریم.

$$\langle\psi_m|A^{\dagger}|\psi_n\rangle = a_m^{*}\langle\psi_m|\psi_n\rangle$$

III

$$\langle\psi_m|A|\psi_n\rangle = a_m^{*}\langle\psi_m|\psi_n\rangle$$

$\Rightarrow$ I $=$ III $\Rightarrow (a_n - a_m)\langle\psi_m|\psi_n\rangle = 0$

* فرض کنیم $\Leftarrow$ $\boxed{n=m}$

$(a_n - a_n^*)\underbrace{\langle\psi_m|\psi_n\rangle}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_n = a_n^* \Rightarrow$ $a_n$ حقیقی است

عددهایی که روی قطری بودند

ازش استار بگیری خودشه $\Longleftarrow$ $a_n$ حقیقی است.

($a_n$ حقیقی است)

-اگر ماتریسی هرمیتی بود و ما آن را قطری کردیم عناصر روی قطر اصلی آن حقیقی است و به عناصر قطر اصلی ویژه مقدار نیز می گفتیم.

-مشاهده گرها حتما باید با عملگرهای هرمیتی توصیف شوند تا عددی که در آزمایشگاه بدست می آید حقیقی باشد و به درد ما بخورد.

* فرض کنیم $\Leftarrow$ $\boxed{n\neq m}$

$\underbrace{(a_n - a_m^*)}_{\neq 0}\langle\psi_m|\psi_n\rangle = 0 \Rightarrow \langle\psi_m|\psi_n\rangle = 0$

$(m\neq n)$

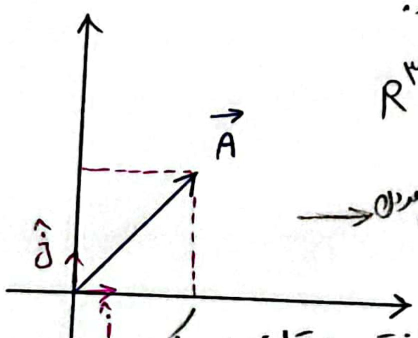
- ویژه مقدارها علاوه بر حقیقی بودن با هم مساوی نیستند.

$L = 0, \dots, n-1$ $\qquad n = -L, \dots, +L$

($|\psi_n\rangle$ ها بر هم عمود هستند)

این بردار می توانند برای فضای هیلبرت پایه تشکیل دهند.

$A$ $\longleftarrow$ غیر تبهگن




** ویژه بردارهای عملگر هرمیتی به عنوان پایه‌ای برای فضای هیلبرت $R^3$ استفاده می شوند.

این دو بردار رو کشیدم بر هم عمودان

*** ویژه مقدارهای عملگر هرمیتی نیز باید حتما حقیقی باشند.

چرا عمودان «مهمه»؟! $\Leftarrow$ این جور دارهای دوبه دو عمود بر هم برا فضای کوانتومی می توانن پایه تشکیل بدن.

$(\hat{i}, \hat{j})$

$(\hat{r}, \hat{\theta})$

$(\hat{i}+\hat{j}, \hat{i}-\hat{j})$

$\vdots$

$\vec{A}$ $\quad A_x = \vec{A}\cdot\hat{i} \quad A_y = \vec{A}\cdot\hat{j}$

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$
$$= (A\cdot\hat{i})\hat{i} + (A\cdot\hat{j})\hat{j}$$
$$= (\vec{A}\cdot\hat{i})\hat{i} + (A\cdot\hat{j})\hat{j} = \vec{A}(\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j})$$
$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \dots |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = I$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = I} \rightarrow$$ رابطه مکملی

$$\left(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|\phi\rangle = \sum_n \boxed{|\psi_n\rangle}\boxed{\langle\psi_n|\phi\rangle}$$

$|\psi_n\rangle \rightarrow$ شبیه $\hat{i}$ و $\hat{j}$

$\langle\psi_n|\phi\rangle \rightarrow$ مؤلفه های $|\phi\rangle$ در پایه $\{|\psi_n\rangle\}$

با این پایه $\{|\psi_n\rangle\}$ با حالت کوانتومی کار می کنیم.

$|\phi\rangle$
حالت دلخواه

وقتی از یک عملگر هرمیتی می خواهیم استفاده کنیم ویژه بردارها، آن پایه ای برای فضا است.

تمرین: عملگر $A$ پادهرمیتی است و $a_n$ ها موهومی خالص اند.

یعنی $\quad a_n^* = -a_n$

پایه ← $\{|\psi_n\rangle\}$

← عملگر پادهرمیتی پایه‌ای برای فضا نیستند.

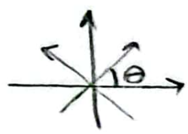
* تمرین: ثابت کنید در عملگر یکانی $\quad |a_n|^2 = 1 \quad , \quad |e^{ia}| = 1$

$a_n = e^{i\theta_n}$ $\quad$ پایه $\{|\psi_n\rangle\}$

*** تبدیل یکانی:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{N\times N}}_{\text{عملگر}} \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_{N\times 1}}_{\text{کت}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_{N\times 1}}_{\text{کت جدید}}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



- می‌خواهیم یک عملگر را در یک کت کنیم و یک کت جدید بدست آوریم.

$$\underbrace{|\psi\rangle}_{\text{کت}} \;,\; \underbrace{U}_{\text{عملگر}} \longrightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \Rightarrow \langle\psi'| = \langle\psi|U^\dagger$$

• عملگر دلخواه ← $A$

$$A|\psi\rangle = |\phi\rangle$$

$$\boxed{U^\dagger = U^{-1}}$$

(اگر یک حالتی با $U$ تبدیل می‌شود برا با $U^\dagger$ تبدیل می‌شود.)

$$A|\psi\rangle = |\phi\rangle \xrightarrow[\text{که تبدیل زده ایم}]{\text{فرض کنیم}} A'|\psi\rangle = |\phi'\rangle \qquad \boxed{U^\dagger U = 1}$$

$$U^\dagger(A'U|\psi\rangle = U|\phi\rangle) \Rightarrow U^\dagger A' U|\psi\rangle = \underbrace{U^\dagger U}_{1}|\phi\rangle$$

$$U^\dagger A' U|\psi\rangle = |\phi\rangle$$

$$A = \underbrace{U^\dagger}_{\times U} A' \underbrace{U}_{\times U^\dagger} \longrightarrow A' = UAU^\dagger$$

تحت یک عمل یکانی کت‌ها از سمت چپ در $U$ و براها را از سمت راست $U^\dagger$ ضرب کردیم و عملگر آن را نیز مثل بالا تبدیل داریم.

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \qquad \langle\psi'| = \langle\psi|U^\dagger \qquad A' = UAU^\dagger$$

عملگر هرمیتی $\longrightarrow$ $A^\dagger = A$ تعریف عملگر هرمیتی است.

(عملگر یکانی عملگر هرمیتی را هرمیتی نگه می‌دارد.)

* دگرِ دگر چی می‌شه جا! ← خودش

$$A' = UAU^\dagger$$

* عملگر یکانی این خاصیت رو داره که عملگرهای هرمیتی رو هرمیتی نگه می‌داره

$$A'^\dagger = (UAU^\dagger)^\dagger = U^{\dagger\dagger} A^\dagger U^\dagger = UAU^\dagger = A'$$

عددی رو در آزمایشگاه بدست آوردیم عدد عوض نشه همون می‌مونه.

$$A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

$$A'|\psi'_n\rangle = a'_n|\psi'_n\rangle \Longrightarrow U A \overbrace{U^\dagger U}^{1} |\psi_n\rangle = a'_n U|\psi_n\rangle$$

$$U^\dagger \times (UA|\psi_n\rangle = a'_n U|\psi_n\rangle)$$

$$\underbrace{U^\dagger U}_{1} A|\psi_n\rangle = a'_n \underbrace{U^\dagger U}_{1}|\psi_n\rangle \Longrightarrow A|\psi_n\rangle = a'_n|\psi_n\rangle$$

$$a'_n = a_n$$

$$[A,B] = 0$$

$$[A',B'] = A'B' - B'A' = UA\cancel{U^\dagger U}BU^\dagger - UB\cancel{U^\dagger U}AU^\dagger$$

$$UABU^\dagger - UBAU^\dagger = U(AB-BA)U^\dagger = U[A,B]U^\dagger =$$

$$= UaU^\dagger = aUU^\dagger = a$$

$$A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

$\{|\psi_n\rangle\}$ پایه $\qquad \sum_n \underbrace{|\psi_n\rangle}_{\text{بردارهای پایه}} \underbrace{\langle\psi_n|\phi\rangle}_{\text{مؤلفه } \phi \text{ در پایه } |\psi_n\rangle}$

* فضای پیوسته :

$|x, y, z\rangle$

- پایه مختصات ← $|\vec{r}\rangle$

- پایه تکانه ← $|\vec{p}\rangle$

$|P_x, P_y, P_z\rangle \qquad \underbrace{\vec{R}}_{\text{عملگر}} |\vec{r}\rangle = \underbrace{\vec{r}}_{\text{عدد}} |\vec{r}\rangle$

$\vec{P}|\vec{P}\rangle = \vec{P}|\vec{P}\rangle$

*** $\vec{R}$ هرمیتی هست و غیر تبهگن هم هست و عملگر است.

*** $\vec{r}$ها پایه‌های فضای هیلبرت هستند که به آنها پایه‌های مختصاتی می‌گویند.

*** $|\psi\rangle$ حالت کوانتومی دلخواه را می‌خواهیم در فضای مختصات بسط دهیم و مؤلفه‌ها $|\psi\rangle$ را می‌خواهیم در پایه‌ی مختصاتی بدست آوریم.

$$\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = 1 \qquad A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$$

$\{|\psi_n\rangle\}$ پایه

ادامه :

$$\int d^3r\, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = 1 \qquad \langle\vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r})$$

$$\int d^3p\, |\vec{P}\rangle\langle\vec{P}| = 1$$

$$\int d^3r\, |\vec{r}\rangle \boxed{\langle\vec{r}|\psi\rangle} \qquad \langle p^\dagger|\psi\rangle = \psi(p^\dagger)$$

مؤلفه های $|\psi\rangle$ در پایه‌ی مختصاتی

* نکته جالب : ⟶

$$\psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle = \langle\vec{r}|1|\psi\rangle$$

$$= \langle \vec{r} | \int d^3p \, |\vec{p}\rangle\langle \vec{p}|\psi\rangle$$

$$= \int d^3p \, \underbrace{\langle \vec{r} | \vec{p}\rangle} \, \underbrace{\boxed{\langle \vec{p}|\psi\rangle}}_{\psi(\vec{p})}$$

مؤلفه های کت تکانه در پایه های
مختصات r

$$\psi(\vec{r}) = \int d^3p \, \langle \vec{r} | \vec{p}\rangle \, \psi(\vec{p})$$

تبدیل فوریه $\Rightarrow \psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \, e^{+i\vec{p}\cdot\vec{r}} \, \psi(\vec{F})$

$$\langle \vec{r} | \vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{r}}$$