Year: ۱۴۰۱ Month: ۱۱ Day: ۲۵ Subject: جلسه ۲

حالتهای کوانتومی $|\psi\rangle$:

ضرب داخلی $\langle\varphi|\psi\rangle = (\quad)^* (\quad) =$ عدد

$|\,\rangle = (\quad) \quad \langle\,| = (\quad)^* = (|\,\rangle)^{*T} = |\,\rangle^\dagger$

dagger

* از کت ها دگر بگیریم به برا تبدیل می شوند * توابع ← بردارها

$\langle\psi|\psi\rangle \geqslant 0 \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \langle\psi| = (a^* \;\; b^*)$

$\langle\psi|\psi\rangle = (a^* \;\; b^*)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2 \geqslant 0$

مشاهده گر = عملگرها $\qquad A: H \to H \qquad H = \{|\psi\rangle\}$

$|\psi\rangle \to \hat{A}|\psi\rangle$

* همانطور که ماتریس ها با هم جابه جا نمی شوند عملگرها هم باهم جابه جا نمی شوند

A ← اپراتور (هرچی جلوی آن باشد اپراتور روی آن اثر می کند)

$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ ← جابه جاپذیر نیست

$\langle\varphi|\underbrace{A|\psi\rangle}_{\langle\varphi|\psi'\rangle} =$ عدد

عمل ساندویچ کردن

برای اینکه بتوان از یک مشاهده گر یک عدد بگیریم باید به آن حالت کوانتومی دهیم

بخاطر همین دو طرف آن را در حالت کوانتومی ضرب می کنیم

سیده زهرا جلال زاده

Year: ۱۴۰۱ Month: ۱۱ Day: ۲۵ Subject: جلسه ۲

اینکه براها را کت می کنیم به این درد می خورد که می توان از آنها عدد دلالت آورد

حالت کوانتومی

$$\text{مقدار چشم داشتی} = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \langle A\rangle = \text{میانگین}$$

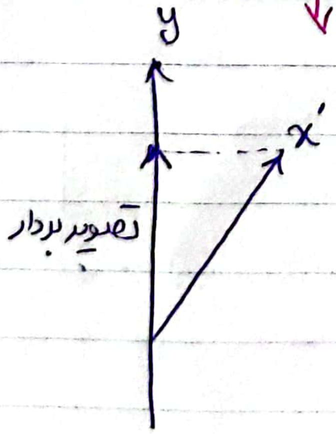
عملگر روی حالت ψ

$$\text{مقدار عملی که انجام دادیم} = \frac{\text{عملگر را روی حالت اعمال می کنیم}}{\text{اندازه ی حالت}}$$

عملگر تصویر : $|\varphi\rangle\langle\varphi|$

اگر یک کت به سمت راست اضافه کنیم در آن ضرب کنیم همان براکت می شود
عملگر تصویر موجودی است که یک کت می گیرد و یک کت دیگر تحویل می دهد که ضریبی از اولی که در آن است را تحویل می دهد کت ما را می گیرد تصویرش می کند روی کت خودش

عملگر تصویر برداری را می گیرد آن را روی بردار دیگر تصویر می کند



$$|\psi\rangle\underbrace{\boxed{\langle\varphi|\psi'\rangle}}_{a} = a|\psi\rangle$$

(اسکالر ~~ضرب داخلی~~ فقط جای براوکت را عوض می کند)

Year: ۱۴۰۱ Month: ۱۱ Day: ۲۵ Subject: جلسه ۲

استار ضرب ~~داخلی~~ فقط جای براو کت را عوض می کند

$$(\langle\varphi|\underbrace{A|\psi\rangle}_{\text{عدد مختلط} \;\; |\psi'\rangle})^* = (\langle\varphi|\psi'\rangle)^* = \langle\psi'|\varphi\rangle = \langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle$$

ستونی

سطری سطری ستونی

$$A|\psi\rangle = |\psi'\rangle \rightarrow (\quad)^*_{1\times N} \quad (\quad)_{N\times N} (\quad)_{N\times 1} = (\quad)_{N\times 1}$$

$$\Rightarrow (\quad)^*_{1\times N} \quad (\quad)^{T*\;\dagger}_{N\times N} = (\quad)^*_{1\times N}$$

اپراتورها اگر بخواهند روی براها (که در پشت آنها هستند) اثر کنند خودشان روی براها اثر نمی کنند
دگرشان روی آنها اثر می کند

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

دگر ← مزدوج مختلط و ترانهاده

$$\langle\psi|AB|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|(AB)^\dagger|\psi\rangle = \langle\varphi|B^\dagger A^\dagger|\psi\rangle$$

$$A = |\psi\rangle\langle\varphi| \rightarrow A^\dagger = |\varphi\rangle\langle\psi|$$

سیده زهرا جلال زاده

عملگر هرمیتی:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

$A^\dagger = A$

برای اینکه برابر باشند باید $b = c$ باشد به این ماتریس ها ماتریس متقارن می گویند

عملگر پادهرمیتی: $A^\dagger = -A$

ماتریس پادمتقارن ← عناصر روی بالای قطر اصلی آنها منفی عناصر روی پایین قطر اصلی آنهاست.

عناصر قطر اصلی صفر ← پادمتقارن

جابه جاگر $[A,B] = AB - BA$

A و B عملگرانند ←

پادجابه جاگر $\{A,B\} = AB + BA$

مثال:

$A = x$

$B = P_x = i\hbar \frac{d}{dx}$

$$[A,B]f(x) = [x,P_x]f(x) = (xP_x - P_x x)f(x) =$$

$$= xP_x f(x) - P_x(xf(x)) = x i\hbar \frac{d}{dx} f(x) - i\hbar \frac{d}{dx}(xf(x)) =$$

$$= x i\hbar \frac{df}{dx} - i\hbar f(x) - i\hbar x \frac{df}{dx} = -i\hbar f(x)$$

$$[x,P_x]f(x) = -i\hbar f(x) \rightarrow [x,P_x] = -i\hbar$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

مقدار ویژه :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow$ قطری

$U^T A U = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow$ λ ها را بدست می آوریم ← ویژه مقدار

$\Downarrow$

معادله ویژه مقداری

λ ها مقادیری هستند که به جای a' و b' ظاهر می شوند روی قطر اصلی ماتریسی که قطری شده ظاهر می شود .

$A \xrightarrow{\text{معادله ویژه مقداری}} \det(A - \lambda I) = 0$

$\xrightarrow{\text{مقادیر ویژه}} \lambda \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

کت — عدد — کت — عملگر ← در کوانتوم

$V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} \qquad A V_1 = \lambda_1 V_1$

$V_2 = \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} \qquad A V_2 = \lambda_2 V_2$

$\Rightarrow$ معادلات ویژه مقداری

$\rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} aV_{11} + bV_{12} \\ cV_{11} + dV_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 V_{11} \\ \lambda_1 V_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} aV_{11} + bV_{12} = \lambda_1 V_{11} \\ cV_{11} + dV_{12} = \lambda_1 V_{12} \end{cases}$

$U = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \qquad U^+ A U = A'$

سیده زهرا جلال زاده

Year: ۱۴۰۱ Month: ۱۱ Day: ۲۵ Subject: جلسه ۲

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = ad - (a+d)\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\lambda = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

اگر ماتریس از اول قطری بود

$a > d$

$b = 0 = c$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4ad}}{2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2}}{2}$$

$$= \frac{a+d \pm (a-d)}{2} = \begin{Bmatrix} a \\ d \end{Bmatrix}$$

در کوانتوم ۲ ←

$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \rightarrow$ معادله ویژه مقداری

حالتهایی که A در آنها قطری است

اگر عملگری داشته باشیم و بتوانیم کتی را پیدا کنیم که عبارت بالا در آن صدق کند
می گوییم عملگر قطرشدنی است

Year: ۱۴۰۱ Month: ۱۱ Day: ۲۵ Subject: جلسه ۲

مقدار چشم داشتی A :

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi | \lambda | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$(a \;\; b) \times \cancel{\lambda}\, \alpha \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \alpha (a \;\; b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

ماتریس سطری × ماتریس ستونی × عدد

$$\frac{\lambda \langle \psi | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \lambda \Rightarrow$$ λ مقدار چشم داشتی است

میانگین

عددی که در آزمایشگاه از عملگر اندازه می گیریم

* اگر بتوانیم عملگری را قطری کنیم ویژه مقادیر آن همان هایی هستند که در آزمایشگاه می بینیم (مقدار چشم داشتی است)

عملگری که انرژی را اندازه می گیرد ← عملگر هامیلتونی H

$$H = k + V = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$\hat{H} | \psi \rangle = E | \psi \rangle \qquad \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V\right) | \psi \rangle = E | \psi \rangle$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \Rightarrow$$ معادله شرودینگر

سیده زهرا جلال زاده

Year: ۱۴۰۱ Month: ۱۱ Day: ۲۵ Subject: جلسه ۲

تمرین : اثبات کنید

$[A,B]=-[B,A]$

$[A,B]^{\dagger}=[B^{\dagger},A^{\dagger}]$

$[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$

اتحاد ژاکوبی $[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=0$