در مطالعه‌ی کوانتوم اگر سعی شود آن را مانند یک داستان تاریخی و به صورت تحلیلی بخوانیم درک آن تأثیر به سزایی دارد.
خواندن کوانتوم بدون مرور بر ریاضیات (bra, ket) فهم آن را دچار مشکل می‌کند.
فرمالیسم (bra, ket) در ریاضیات را آقای دیراک بنیانگذاری کرده است که یک فرم نوشتار است
(صرفاً نوع نوشتار متفاوت است).

کوانتوم به طور کلی دو جزء دارد

a. تابع موج (حالت سیستم)
b. عملگر (مشاهده‌گر)

در تمام علوم این دو جزء مشاهده می‌شود مثلاً در مکانیک کلاسیک شخصی که ضربه‌ای به توپ در حال سکون می‌زند و مثلاً شخص سومی که در حال مشاهده‌ی این اتفاق است نقش عملگر (مشاهده‌گر) و تابع موج (حالت سیستم) را بازی می‌کند.
اما فرق مکانیک کوانتومی با بقیه‌ی علوم این است که عملگر (مشاهده‌گر) بر روی تابع (حالت سیستم) و بر روی نتیجه‌ی آن آزمایش تأثیر خواهد گذاشت.

در مکانیک کلاسیک ذرات ماکروسکوپیک هستند و آزمایش بر روی ذرات در نتیجه‌ی آن تأثیری نخواهد گذاشت، اما در مکانیک کوانتومی چون ذرات میکروسکوپیک هستند مانند الکترون) برای آزمایش بر روی ذرات باید به آنها ذرات فوتون تابیده تا از مکان ذرات اطلاعات کسب کنیم. و همین امر باعث انحراف و تغییر در نتیجه‌ی آزمایش حاصل می‌شود.

مکانیک کوانتومی به آن اتفاقی می‌پردازد که مشاهده‌گرها نیز در آن تأثیر دارند.

در مکانیک کوانتومی 1 با علم احتمالات به فرمول بندی حالات صفحه‌ی قبل پرداختیم.

[به علمی احتیاج داریم که بتوانیم در آن حالت‌ها را نمایش دهیم و موجوداتی که بر این حالت‌ها اثر می‌گذارند.]

← جبر خطی: علم بردارها است.

بردارها $\rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$ حالت

ماتریس‌ها $\rightarrow A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{N\times N}$ عملگر

$\hookrightarrow A\vec{a} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{N\times N} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{N\times 1} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{N\times 1}$

* تعداد عناصر بردارها متناهی است اما
در مکانیک کوانتومی بردارها را با بی نهایت مؤلفه خواهیم داشت (بردارها نامتناهی خواهند بود.)
* بردارها N بعدی نیستند، بی نهایت بعدی خواهند بود
* فضا هم می‌تواند پیوسته و هم می‌تواند گسسته و نامتناهی باشد.

[در اینجا توابع را بردار در نظر می‌گیریم یعنی عملگرها تابعی را به تابع دیگری تبدیل می‌کند.]

$f_{(x)} \longrightarrow$ بردار

$A, \vec{a}, \vec{b}$

عملگر خطی

$T(x+y) = T(x) + T(y)$

$T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$A(\vec{a} + \vec{b}) = A\vec{a} + A\vec{b}$

$A(\alpha \vec{a}) = \alpha A\vec{a}$

انتگرال

$\int f(x) + g(y) = \int f + \int g$

$\int \alpha f = \alpha \int f$

← ماتریس‌ها عملگرهای خطی هستند.

← انتگرال یک عملگر خطی روی فضای توابع است.

میدان (هیئت)

تعریف میدان را از روی مجموعه اعداد حقیقی ساخته اند.

میدان یک مجموعه ای است از اعداد و دو تا عمل ضرب و جمع $(+,\cdot)$

میدان $(F,+,\cdot)$

Field

فرض کنید a و b عضو میدان باشند

$$a,b\in F$$
$$\forall a\in F,\ \exists a^{-1}\in F,\ a+a^{-1}=0$$
$$\exists 0\in F,\ 0+a=a$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$F\setminus 0=F'$ ⟵ مجموعه جدید که صفر ندارد.

$$\forall a,b\in F \qquad a.b\in F$$
$$\exists 1\in F \qquad 1.a=a$$
$$\forall a\in F' \qquad \exists a^{-1}\in F',\ a.a^{-1}=1$$
$$a.(b.c)=(a.b).c$$
$$a.(b+c)=a.b+a.c$$

فضای برداری

فضای برداری یک مجموعه V و یک میدان است (معمولاً با اعداد مختلط) ⟵ $(V,\mathbb{C},\cdot,+)$

$\mathbb{C}$ ⟵ اعداد مختلط

V ⟵ بردار

$$\forall_{v,w}\in V \qquad v+w\in V \qquad u+(v+w)=(u+v)+w$$

$v+w=w+v$ ⟵ آبلی جابجاپذیری

$$\exists 0\in V\ ;\ \forall v\in V\ ;\ 0+v=v$$
$$\forall a,b\in\mathbb{C} \qquad a(bv)=(ab)v$$
$$1v=v$$
$$a(v+w)=av+aw$$
$$(a+b)v=av$$

← مجموعه ای که خاصیت های بالا را داشته باشد را فضای برداری می گویند. (مثلاً توابع، فضای برداری هستند.)

$(C^{\infty}(\mathbb{C}),\mathbb{C},+,\cdot)$ فضای برداری

← توابعی که بی نهایت بار مشتق پذیرند.

بردارهای فضای برداری، حالت های کوانتومی سیستم هستند.

• فضای هیلبرت •

حالت ها را با بردارها نشان می دهیم و بردار ها را با توابع؛

حال اگر یک فضای برداری داشته باشیم که مؤلفه های آن اعداد مختلط باشند و آن فضای برداری شامل حالت های یک سیستم کوانتومی باشد به آن، فضای هیلبرت خواهیم گفت.

تمام حالت های یک سیستم کوانتومی ← زمانی که می گوییم فضای هیلبرت داریم راجب حالت های یک سیستم صحبت می کنیم.

• فضای باناخ •

فضای هیلبرت + متر (به عمل دادن فاصله بین نقطه های مختلف در یک فضا گفته می شود.)

$a,b \in V$

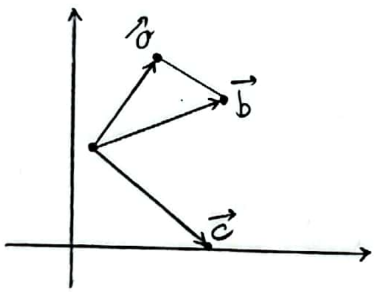
$d(a,b) \geqslant 0$

$d(a,a) = 0$

$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(x,z)$ نامساوی مثلث

هندسه تحلیلی

$\{\vec{a}\}$



$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y+b_y)^2}$

← یک روشی که برای نقاط مختلف فضامان فاصله تعیین کنیم

به بیان دیگر

اعضای فضای هیلبرت حالت های سیستم هستند، حال می خواهیم بین حالت های سیستم کوانتومی فاصله تعیین کنیم.

$\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

$|\langle\vec{A},\vec{B}\rangle| = |\vec{A}\cdot\vec{B}| = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\,|\cos\theta| \leqslant \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|$

$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x,y\rangle}$

$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

نامساوی کوشی - شوارتز $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ ← نرم یا اندازه بردار

می‌توانیم با استفاده از ضرب نقطه‌ای زاویه‌ی بین حالت‌های مختلف یک سیستم کوانتومی را تعیین کنیم.

یک حالت خیلی مهم زمانی است که حاصل ضرب داخلی صفر شود (چون بردارها برهم عمود هستند.)

حالت‌های متعامد اتفاق افتادنشان ربطی به همدیگر ندارد.

$\langle x, y \rangle = 0$ حالت متعامد

$$\varphi, \psi \qquad \langle \psi, \varphi \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, \varphi(x)$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int dx\, \underbrace{\psi^*(x)\, \psi(x)}_{|\psi|^2}$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int dx\, \varphi^*(x)\, \psi(x) = \left(\int dx\, \psi^*(x)\, \varphi(x) \right)^*$$

ضرب نقطه‌ای:

$\vec{a} \cdot \vec{b} \qquad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ عدد

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a^* \langle x, y \rangle + b^* \langle x, z \rangle$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\psi$$

$$\underbrace{\overset{\text{bra}}{\langle \varphi} \,|\, \overset{\text{ket}}{\psi \rangle}} = \int dx\, \varphi^* \psi$$

$$\underset{\text{bra}}{\langle \varphi |}\, \underset{\text{ket}}{| \psi \rangle} \longrightarrow$$ حالت سیستم

$$H = \{ |\psi\rangle \}$$

$$(\langle \psi |)^\dagger = |\psi\rangle$$