

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



دانشگاه دامغان
دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد
نجوم و اختر فیزیک (گرایش گرانش و کیهان شناسی)

پیامدهای اختر فیزیکی سیاه چاله های شبه شوارتزشیلد

توسط:

محسن پهلوانی

استادان راهنما:

شهاب شهیدی

کاظم فاقعی

استاد مشاور:

شهریور ۱۴۰۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

به نام خدا

پیامدهای اختر فیزیکی سیاه چاله های شبه

شوارتزشیلد

توسط:

محسن پهلوانی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

نجوم و اختر فیزیک (گرایش گرانش و کیهان شناسی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: درجه اعطاشده از سوی کمیته داوری

دکتر شهاب شهیدی استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر کاظم فاقعی استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر زهرا حقانی دانشیار دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر مطهره محمدپور استادیار دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر زهرا حقانی دانشیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۴۰۱

تقدیم به

تقدیم به همه‌ی دوستان علم و فیزیک.

سپاسگزاری

سپاسگزاری می‌کنم از تمامی اساتید، دوستان و آشنایان به خصوص از خانواده عزیز و اساتید راهنمای بنده که نقشی مهم در این موفقیت ایفا کردند...

چکیده

پیامدهای اخترفیزیکی سیاهچاله‌های شبه شوارتزشیلد

به وسیله‌ی:

محسن پهلوانی

اینشتین معتقد بود گرانش توسط انحنای فضا-زمان که به وسیله‌ی حضور ماده ایجاد شده است، توصیف می‌شود. او مجموعه معادلاتی بدست آورد که به طور کمی چگونگی ارتباط انحنای فضا-زمان در هر نقطه را با توزیع ماده در آن نقطه مشخص می‌کنند. این معادلات به معادلات اینشتین معروف هستند [۱]. حل‌های سیاهچاله‌ای یکی از حل‌های مهم معادلات اینشتین هستند. در حالت کلی اکثر اجرام اخترفیزیکی در حال چرخش می‌باشند. وجود احتمالی تکینگی‌های لخت که فاقد افق رویداد هستند، یک مسئله مورد توجه در اخترفیزیک است. از نظر رصدی، تمایز بین سیاهچاله‌های اخترفیزیکی و تکینگی‌های لخت بسیار مورد توجه قرار گرفته است. یکی از راه‌های ممکن برای تمایز تکینگی‌های لخت از سیاهچاله‌ها از طریق مطالعه تطبیقی ویژگی‌های قرص برافزایشی نازک در اطراف این اجرام فشرده است [۲]. در این پایان‌نامه ما سه مدل سیاهچاله شوارتزشیلد، کر و کیسلیف را به طور مختصر بررسی کرده و بعد از آن به بررسی پیامدهای اخترفیزیکی سیاهچاله‌های کیسلیف^۱ می‌پردازیم [۳] و پارامترهای شار، دما و درخشندگی را برای هر سه مدل شوارتزشیلد، کر و کیسلیف بدست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم. سپس نمودارهای مربوطه را رسم کرده و رفتار آن‌ها را مقایسه می‌کنیم.

¹Kiselev

فهرست مطالب

۵	فهرست مطالب
ح	فهرست شکل‌ها
ی	فهرست نشانه‌های اختصاری
۱	۱ مقدمه
۱	۱-۱ اصل هم‌ارزی
۲	۱-۲ گرانش به عنوان انحنای فضا زمان
۳	۱-۳ معادلات اینشتین
۴	۱-۴ قرص‌های برافزایشی در اطراف اجسام فشرده
۹	۲ پارامترهای فیزیکی سیاه‌چاله‌ها
۹	۲-۱ مقدمه
۱۰	۲-۲ سرعت زاویه‌ای، انرژی ویژه و تکانه زاویه‌ای
۱۲	۲-۳ اثرات الکترومغناطیسی در قرص‌های برافزایش گرانشی اطراف اجسام فشرده
۱۴	۳ حل شوارتزشیلد
۱۴	۳-۱ توصیف مختصات
۱۴	۳-۲ متریک شوارتزشیلد
۱۶	۳-۳ تکنیکی‌ها در مختصات شوارتزشیلد

۱۸	انتقال به سرخ گرانشی برای یک فرستنده و گیرنده ثابت
۲۰	ژئودزیک در هندسه شوارتزشیلد
۲۱	مسیرهای ذرات جرم‌دار
۲۳	حرکت شعاعی ذرات جرم‌دار
۲۵	حرکت دایره‌ای ذرات جرم‌دار
۲۷	ثبات مدار ذرات جرم‌دار
۲۹	مسیر فوتون‌ها
۳۰	حرکت شعاعی فوتون
۳۱	حرکت دایره‌ای فوتون
۳۱	پایداری مدارهای فوتونی
۳۲	ارویکرد کلی به تغییرات سرخی گرانشی
۳۴	متریك شوارتزشیلد
۳۵	پتانسیل موثر
۳۷	اشار
۳۷	دما
۳۸	درخشندگی

۴ حل کر

۴۰	مقدمه
۴۰	متریك
۴۴	پتانسیل موثر
۴۶	شار
۴۸	دما
۴۸	درخشندگی
۴۹	نتیجه گیری

۵ حل کیسلیف

۵۰	مقدمه
۵۱	متریك کیسلیف
۵۲	پارامترهای مورد نیاز
۵۵	پتانسیل موثر

۵۸	۵-۵	شار
۶۰	۵-۶	دما
۶۲	۵-۷	درخشندگی
۶۵	۵-۸	نتیجه گیری

۶۶ ۶ بخش پایانی

۶۹ مراجع

۷۵ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۷۶ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست شکل‌ها

- ۱-۱ گسیل یک فوتون در قرص برافزایشی [۱] ۸
- ۳-۱ ساختار مخروط نوری سیاه‌چاله شوارتزشیلد [۱] ۱۷
- ۳-۲ تغییرات پتانسیل موثر بر حسب شعاع در سیاه‌چاله شوارتزشیلد ۳۶
- ۳-۳ تغییرات شار انرژی تابشی بر حسب شعاع در سیاه‌چاله شوارتزشیلد ۳۸
- ۳-۴ تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاه‌چاله شوارتزشیلد ۳۸
- ۳-۵ تغییرات درخشندگی بر حسب ν در سیاه‌چاله شوارتزشیلد ۳۹
- ۴-۱ تغییرات پتانسیل موثر بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کر ۴۵
- ۴-۲ تغییرات شعاع‌های مختلف بر a_* در سیاه‌چاله کر ۴۷
- ۴-۳ تغییرات شار انرژی تابشی بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کر ۴۷
- ۴-۴ تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کر ۴۸
- ۴-۵ تغییرات درخشندگی بر حسب ν در سیاه‌چاله کر ۴۹
- ۵-۱ تغییرات شعاع R_{mb} بر حسب a_* در سیاه‌چاله کیسلیف ۵۷
- ۵-۲ تغییرات شعاع R_{ph} بر حسب a_* در سیاه‌چاله کیسلیف ۵۷
- ۵-۳ تغییرات شعاع R_{mb} بر حسب a_* در سیاه‌چاله کیسلیف ۵۸
- ۵-۴ تغییرات شار بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0$ ۵۹
- ۵-۵ تغییرات شار بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0.4$ ۵۹
- ۵-۶ تغییرات شار بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0.99$ ۶۰
- ۵-۷ تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0$ ۶۱

- ۶۱ $a_* = ۰/۴$ ۵-۸ تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاهچاله کیسلیف به ازای
- ۶۲ $a_* = ۰/۹۹$ ۵-۹ تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاهچاله کیسلیف به ازای
- ۶۳ $a_* = ۰$ ۵-۱۰ تغییرات درخشندگی بر حسب ν در سیاهچاله کیسلیف به ازای
- ۶۴ $a_* = ۰/۴$ ۵-۱۱ تغییرات شار بر حسب ν در سیاهچاله کیسلیف به ازای
- ۶۵ $a_* = ۰/۹۹$ ۵-۱۲ تغییرات شار بر حسب ν در سیاهچاله کیسلیف به ازای

فهرست نشانه‌های اختصاری

→ : نسبت دادن

$A_{,r}$: مشتق اول مکانی

$A_{,rr}$: مشتق دوم مکانی

\dot{A} : مشتق اول زمانی

\ddot{A} : مشتق دوم زمانی

تانسور ریمان :

$$R_{\beta\gamma\sigma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\sigma,\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}$$

مشتق هموردا:

$$\nabla_{\beta} A_{\alpha} = A_{\alpha;\beta} = \partial_{\beta} A_{\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} A_{\gamma}$$

نشانگان متریک:

$$(+1, -1, -1, -1)$$

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ اصل هم‌ارزی

برابری جرم گرانشی و اینرسی یک ذره اینشتین را به آزمایش کلاسیک خود "آسانسور" سوق داد. یک ناظر را آزادانه در نظر بگیرید. در سقوط آسانسور (یعنی پس از قطع شدن کابل آسانسور) اشیایی که از حالت استراحت نسبت به کابین آسانسور آزاد می‌شوند در کابین شناور می‌مانند. یک پرتابه از یک طرف آسانسور به طرف دیگر به نظر می‌رسد که در یک خط مستقیم نسبت به آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند، نه در مسیر منحنی معمول که انتظار داشتیم. همه این‌ها از این واقعیت ناشی می‌شود که شتاب هر ذره نسبت به آسانسور صفر است: ذره و کابین آسانسور در نتیجه هم‌ارزی جرم گرانشی و اینرسی شتاب یکسانی نسبت به زمین دارند.

اگر میدان گرانشی زمین واقعاً یکنواخت باشد، همه این مشاهدات درست عمل می‌کنند. البته میدان گرانشی زمین یکنواخت نیست بلکه به صورت شعاعی به سمت داخل و به سمت مرکز جرم آن با قدرتی متناسب با $\frac{1}{r^2}$ عمل می‌کند. بنابراین، اگر آسانسور برای مدت طولانی رها شود تا سقوط آزاد کند یا اگر بسیار بزرگ باشد (یعنی کسر قابل توجهی از شعاع زمین)، دو ذره آزاد شده از سکون در نزدیکی دیواره‌های آسانسور به تدریج به سمت داخل می‌روند، زیرا آن‌ها هر دو در امتداد خطوط شعاعی به سمت مرکز زمین سقوط می‌کنند. علاوه بر این، در نتیجه تغییر قدرت میدان گرانشی، ذرات آزاد شده از سکون در نزدیکی کف آسانسور به تدریج به سمت پایین حرکت می‌کنند در حالی که ذرات نزدیک سقف به سمت بالا رانش می‌شوند. آنچه ناظر در آسانسور تجربه می‌کند نیروهای جزر و مدی است که از ناهمگنی باقیمانده در قدرت و جهت میدان گرانشی پس از کسر شتاب نسبت به زمین حاصل می‌شود. همیشه باید به خاطر داشت که این نیروهای جزر و مدی هرگز نمی‌توانند به طور کامل در

آسانسور (آزمایشگاه) با اندازه محدود، یعنی غیر صفر، حذف شوند. با این وجود، به شرطی که کابین آسانسور را در یک بازه زمانی کوتاه در نظر بگیریم و از نظر مکانی کوچک باشد، آنگاه یک آسانسور در حال سقوط آزاد (که ممکن است مختصات (x, y, z) روی دیوارهای آن مشخص شده باشد و یک ساعت آسانسور که زمان t را اندازه‌گیری می‌کند) شبیه یک چارچوب مرجع اینرسی دکارتی است و بنابراین قوانین نسبیت خاص در داخل آسانسور وجود دارد. این مشاهدات منجر به اصل هم ارزی می‌شود: در آزمایشگاهی که به طور آزاد در حال سقوط (غیر چرخشی) است که منطقه کوچکی از فضا زمان را اشغال می‌کند، قوانین فیزیک از نسبیت خاص پیروی می‌کند.

۱-۲ گرانش به عنوان انحنای فضا زمان

این مشاهدات اینشتین را به ارائه پیشنهاد عمیقی سوق داد که به طور همزمان توصیفی نسبیتی از گرانش ارائه می‌دهد و به روشی طبیعی اصل هم ارزی (و در نتیجه هم ارزی جرم گرانشی و اینرسی) را در بر می‌گیرد. پیشنهاد اینشتین این بود که گرانش دیگر نباید به عنوان یک نیرو به معنای متعارف در نظر گرفته شود، بلکه باید به عنوان جلوه‌ای از انحنای فضا زمان در نظر گرفته شود، این انحنای ناشی از حضور ماده است. این ایده اصلی پایه‌ریزی نظریه نسبیت عام است. اگر گرانش را مظهر انحنای خود فضا زمان در نظر بگیریم، و نه به عنوان عمل نیرو که روی خمینه تعریف شده است، معادله حرکت ذره ای که فقط تحت تأثیر گرانش حرکت می‌کند باید معادله «آزاد» باشد. ذره در فضا زمان منحنی، یعنی

$$\frac{dp}{d\tau} = 0, \quad (1.1)$$

که در آن p تکانه ذره و τ زمان ویژه اندازه‌گیری شده در امتداد خط جهانی ذره است. بنابراین، جهان خط ذره‌ای که آزادانه تحت گرانش قرار می‌گیرد، یک ژئودزیک در فضا زمان منحنی است. اصل هم‌ارزی هندسه احتمالی فضای زمان منحنی را به شبه ریمانی محدود می‌کند. معنای ریاضی اصل هم‌ارزی این است که در هر رویداد P در خمینه فضا زمان باید بتوانیم یک سیستم مختصات X_μ را تعریف کنیم به طوری که در همسایگی محلی P ، عنصر خط آن به صورت زیر تعریف شود

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad (2.1)$$

در جایی که برابری دقیق در رویداد P از معادله ژئودزیک سیستم مختصات مسیر یک ذره «آزاد»، یعنی ذره‌ای که فقط تحت تاثیر گرانش حرکت می‌کند، در مجاورت رویداد P به صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{d^2 X^i}{dT^2} = 0, \quad (3.1)$$

که در آن $i = 1, 2, 3$ و X^0 را با cT نشان می‌دهیم (یک بار دیگر تساوی در معادلات بالا دقیقاً در P است). بنابراین، در مجاورت P مختصات X^μ یک مرجع اینرسی دکارتی محلی را تعریف می‌کنند (مانند آسانسور کوچک ما که در یک بازه زمانی کوتاه در نظر گرفته می‌شود که در آن قوانین نسبیت خاص به صورت محلی برقرار است). برای اینکه بتوانیم چنین سیستمی بسازیم هندسه فضازمان باید یک خمینه شبه ریمانی (که انحنا دار و چهار بعدی است) باشد. عنصر خط آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.1)$$

۳-۱ معادلات اینشتین

معادلات اینشتین، انحنای فضا-زمان را به منبع آن، انرژی-تکانه ماده مرتبط می‌کند. معادلات میدان گرانشی اینشتین به شکل زیر است

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

که مبنای ریاضی نظریه نسبیت عام را تشکیل می‌دهد و در آن $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی، $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه، $g_{\mu\nu}$ توابع متریک و ضریب ثابت k به صورت زیر تعریف می‌شود

$$k = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right). \quad (6.1)$$

با اندکی تغییر در فرضیات اول، اینشتین به معادله ثابت کیهان شناسی معروف خود رسید که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

که Λ را به عنوان ثابت کیهان شناسی در نظر می‌گیریم.

همانطور که می‌بینیم معادلات اینشتین دارای معادلات دیفرانسیل غیر خطی متعددی است که نشان از پیچیدگی بالای آن دارد. برای سادگی در حل این معادله می‌توان با ساده سازی توسط چند فرض به جواب رسید. نخستین بار شوارتزشیلد این کار را انجام داد. او فضای خارج از جرم مرکزی را استاتیک و همگن و کروی در نظر گرفت. با این فرضیات او متریک مربوط به فضای اطراف جرم مرکزی را به صورت زیر بدست آورد

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (8.1)$$

۴-۱ قرص‌های برافزایشی در اطراف اجسام فشرده

از نظر مشاهداتی، قرص‌های برافزایشی اجرام رایجی هستند و به شکل ساختارهای نجومی سطحی مشاهده می‌شوند که معمولاً به صورت گازی داغ در یک حرکت مارپیچی به سمت یک جسم متراکم مرکزی حرکت می‌کنند.

مدار ذرات و فوتون‌ها کاوشگرهای هندسه فضا زمان هستند. اطلاعات مربوط به هندسه تولید شده توسط اجرام فشرده یا سیاه‌چاله‌ها را می‌توان از مشاهدات مدار ذرات در قرص برافزایشی که اغلب آن‌ها را احاطه کرده است به دست آورد. راندمان تشعشع قرص برافزایشی در اطراف سیاه‌چاله شوارتزشیلد ۱۰ برابر بیشتر از راندمان سوزاندن هسته‌ای هیدروژن است، و چنین قرص‌هایی ساطع کننده‌های بسیار قوی در اشعه ایکس هستند.

در دمای 10^7 کلوین که یک قرص برافزایشی دارد، برخی از هسته‌های سنگین مانند هسته آهن الکترون‌های مقید را حفظ می‌کنند. تشعشعات ناشی از اشعه‌های اشعه ایکس در بالا و پایین دیسک می‌تواند منجر به فلورسانس از اتم‌های بسیار یونیزه شده در قرص شود. در این فرآیند یک الکترون در اتم از سطح انرژی بالاتر به سطح پایین‌تر می‌رود و یک فوتون ساطع می‌کند. برای اتم‌های آهن، این منجر به فوتون‌هایی با انرژی می‌شود که یک خط طیفی تقریباً در وسط باند پرتو ایکس ایجاد می‌کند، اما همانطور که می‌توان انتظار داشت، فرکانس فوتون‌های ساطع شده توسط برخی ناظران در بی‌نهایت اندازه گیری می‌شود (یعنی یک ستاره شناس روی زمین) با فرکانس گسیل فوتون‌ها متفاوت خواهد بود. از نظر کیفی دو اثر وجود دارد که باعث این تغییر فرکانس می‌شود. اول اینکه فوتون‌ها به صورت گرانشی با انتقال به سرخی متفاوتی جابه‌جا می‌شوند که بستگی به شعاع هسته ساطع کننده آن‌ها دارد. دوم اینکه آن‌ها با مقداری جابجایی جابجا می‌شوند که به سرعت و جهت (نسبت به ناظر دور) ماده‌ای که از آن گسیل شده اند بستگی دارد، به ویژه اینکه آیا این ماده به سمت ناظر حرکت می‌کند یا از آن دور می‌شود.

متأسفانه، با توجه به اندازه معمولی قرص‌های برافزایشی در اطراف اجرام فشرده و فاصله زیاد آن‌ها از ما، اندازه زاویه‌ای چنین سیستم‌هایی که از زمین مشاهده می‌شود، معمولاً بسیار کوچکتر از عرض پرتو رصدی هر تلسکوپ است. بنابراین وقتی یک ستاره شناس طیف (یعنی شار فوتون تابعی از فرکانس) چنین جسمی را اندازه می‌گیرد، تابش دریافتی در هر فرکانس از قسمت‌های مختلف قرص می‌آید. با وجود ادغام مشارکت‌های سراسر قرص، فوتون‌هایی که از قسمت‌های داخلی قرص برافزایشی نزدیک به جسم فشرده می‌آیند، به فرد اجازه می‌دهند تا از عنصر خط برای بررسی رژیم گرانش میدان قوی استفاده کند.

یک فضازمان کلی با متریک $g_{\mu\nu}$ در برخی از سیستم مختصات مختصر x^μ در نظر بگیرید، جایی که x^0 یک مختصات زمانی است و x^i مختصات فضایی هستند. اگر فرستنده E و گیرنده R به ترتیب دارای خطوط جهانی $x_E^\mu(\tau_E)$ و $x_R^\mu(\tau_R)$ که در آن τ زمان ویژه هر ناظر است. انرژی فوتونی که توسط فرستنده در A و توسط گیرنده در B اندازه‌گیری می‌شود به صورت زیر است

$$E(A) = p(A) \cdot u_E(A) = p_\mu(A) u_E^\mu(A), \quad (9.1)$$

$$E(B) = p(B) \cdot u_R(B) = p_\mu(B) u_R^\mu(B), \quad (10.1)$$

جایی که p_μ سرعت فوتون در A و B است و u_E و u_R سرعت فرستنده و گیرنده در رویداد های A و B است.

از آنجایی که در هر دو $E = h\nu$ است، نسبت فرکانس فوتون دریافتی به فرکانس در هنگام گسیل شده به صورت زیر است

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p(R) \cdot u_R}{p(E) \cdot u_E} = \frac{p_\mu(R) u_R^\mu}{p_\mu(E) u_E^\mu}, \quad (11.1)$$

که در آن $p(E)$ و $p(R)$ تکانه فوتون در لحظه گسیل و دریافت هستند، u_E سرعت ماده در گسیل و u_R سرعت مشاهده‌گر در دریافت است. با فرض ثابت بودن ناظر در بی‌نهایت، مولفه‌های سرعت او در سیستم مختصات (t, r, θ, ϕ) هستند

$$[u_R^\mu] = (1, 0, 0, 0). \quad (12.1)$$

می‌توانیم سرعت فرستنده را به صورت بنویسیم

$$[u_E^\mu] = (\dot{u}_E, 0, 0, u_E^r). \quad (13.1)$$

با استفاده از رابطه

$$u_E^r = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} \dot{u}_E, \quad (14.1)$$

حال می‌توانیم سرعت فرستنده را باز نویسی کنیم

$$[u_E^\mu] = \dot{u}_E(1, 0, 0, \Omega), \quad (15.1)$$

جایی که برای حرکت دایره‌ای، $\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{GM}{r^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ، که [۱] استخراج شده است. اکنون می‌توانیم \dot{u}_E را با استفاده از این واقعیت که $c^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ محاسبه کنیم. اگر ماده ساطع کننده در مختصات شعاعی باشد، داریم

$$\dot{u}_E = c \left[c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) - r^2 \Omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (16.1)$$

با جایگذاری در (۱۱.۱) بدست می‌آید

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{p_r(R)}{p_r(E)} \left(1 \pm \frac{p_r(E)}{p_r(E)} \Omega \right)^{-1}, \quad (17.1)$$

که در آن علامت مثبت مربوط به ماده منتشر کننده در سمت قرص است که به سمت ناظر حرکت می‌کند و علامت منفی مربوط به ماده در طرف دیگر است. با این حال، متریک شوارتزشیلد ثابت است، یعنی مولفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ به صراحت به t وابسته نیستند. بنابراین p_r در امتداد ژئودزیک ثابت است و به همین ترتیب

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{p_r(E)}{p_r(E)} \Omega \right)^{-1}, \quad (18.1)$$

بنابراین تنها ثابت کردن نسبت $p_3(E)/P_0(E)$ به منظور تعیین انتقال به سرخ مشاهده شده باقی می‌ماند. به طور کلی، ما باید از این واقعیت استفاده کنیم که جهان خط فوتون تهی است، و بنابراین $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0$. همانطور که در صفحه استوایی $\theta = \frac{\pi}{4}$ کار می‌کنیم، این بازده حاصل می‌شود

$$\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \left((p_0)^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\right) (p_1)^2 - \frac{1}{r^2} (p_3)^2 = 0. \quad (19.1)$$

برای فوتون‌های ساطع شده از مواد در یک موقعیت کلی زاویه ϕ ، اکنون باید از معادلات ژئودزیک برای جهان خط فوتون استفاده کرد تا p_1 حذف شود. با این حال، دو مورد خاص وجود دارد که برای آن‌ها لازم نیست. ساده‌ترین حالت زمانی اتفاق می‌افتد که فوتون از ماده در حال حرکت عرضی به سمت ناظر گسیل می‌شود، یعنی زمانی که $\phi = 0$ یا $\phi = \pi$. سپس $p_3(E) = 0$ داریم و بنابراین نسبت فرکانس

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (20.1)$$

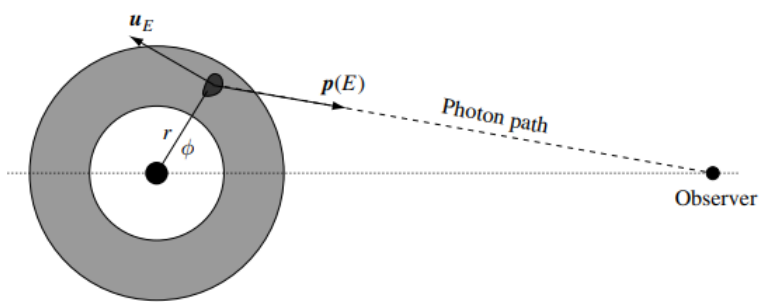
موارد ساده دیگر زمانی اتفاق می‌افتند که ماده مستقیماً به سمت ناظر نزدیک یا از آن دور می‌شود، یعنی زمانی که $\phi = -\frac{\pi}{4}$ یا $\phi = \frac{\pi}{4}$ باشد. سپس مولفه‌های شعاعی تکانه فوتون $p_1(E)$ صفر خواهد شد. از (19.1) بدست می‌آوریم

$$\frac{p_3(E)}{p_0(E)} = \frac{r}{c \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (21.1)$$

به طوری که تغییر فرکانس فوتون برای $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$ توسط

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 \pm \left(\frac{r}{\mu - 2}\right)^{-\frac{1}{2}}}, \quad (22.1)$$

داده می‌شود. بحث بالا برای یک قرص روی لبه بود. مورد محدود کننده دیگر، زمانی که قرص به صورت رو به رو مشاهده می‌شود، تجزیه و تحلیل آسان تر است. از آنجایی که حرکت ماده ساطع کننده همیشه عرضی نسبت به ناظر است، تغییر فرکانس با (20.1) داده می‌شود.



شکل ۱-۱: گسیل یک فوتون در قرص برافزایشی [۱]

فصل ۲

پارامترهای فیزیکی سیاهچاله‌ها

۲-۱ مقدمه

وجود احتمالی تکینگی‌های لخت که فاقد افق رویداد هستند، یک مسئله مورد توجه در اخترفیزیک است. برای مثال سیاهچاله کر با تکانه زاویه‌ای به اندازه کافی بزرگ تبدیل به یک تکینگی لخت می‌شود. از نظر رصدی، تمایز بین سیاهچاله‌های اخترفیزیکی و تکینگی‌های لخت بسیار مورد توجه قرار گرفته است. یکی از راه‌های ممکن برای تمایز تکینگی‌های لخت از سیاهچاله‌ها از طریق مطالعه تطبیقی ویژگی‌های قرص برافزایشی نازک در اطراف این اجرام فشرده است [۴].

بطور نظری، بررسی سرنوشت نهایی ماده پس از فروپاشی گرانشی جزو مسائل مورد توجه در نسبیت عام است. از نظر مشاهداتی، قرص‌های برافزایشی اجرام رایجی هستند و به شکل ساختارهای نجومی مسطحی مشاهده می‌شوند که معمولاً به صورت گازی داغ در یک حرکت مارپیچی به سمت یک جسم متراکم مرکزی حرکت می‌کنند. تنش‌های داخلی و اصطکاک دینامیکی گاز درون قرص باعث تولید گرما می‌شود. بخش کوچکی از انرژی تولید شده به تابش تبدیل می‌شود که می‌تواند از سطح قرص فرار کند [۲]. اطلاعات مهمی در مورد قرص‌های برافزایشی را می‌توان از این طریق استخراج نمود. خواص تابش قرص‌ها برای سیاهچاله‌ها با تکینگی‌های لخت متفاوت است. به طور کلی، حتی اگر در سطح کیفی شباهت‌های زیادی بین قرص‌های سیاهچاله‌ها و قرص‌های تکینگی لخت وجود داشته باشد، ویژگی‌های ترمودینامیکی و الکترومغناطیسی آنها می‌تواند از نظر کمی بسیار متفاوت باشد. عموماً اعتقاد بر این است که اجرام اخترفیزیکی از طریق برافزایش رشد می‌کنند. در بیشتر سیاهچاله‌ها و هسته‌های فعال کهکشانی^۱ (*AGN*) ابرهای گازی اطراف جسم مرکزی وجود دارند.

¹Active Galactic Nuclei

مطالعات دقیق قرص برافزایشی می‌تواند اطلاعات مهمی در مورد هندسه فضا زمان ارائه کند. توزیع دما در قرص‌های برافزایشی به ترتیب به نرخ برافزایش جرم و جرم سیاهچاله مرکزی بستگی دارد [۴].

۲-۲ سرعت زاویه‌ای، انرژی ویژه و تکانه زاویه‌ای

برای بررسی پارامترهای فیزیکی مورد نظر به پارامترهای سرعت زاویه‌ای، انرژی ویژه و تکانه زاویه‌ای نیاز خواهیم داشت. برای این منظور عنصر خط کلی زیر را تعریف می‌کنیم

$$ds^2 = g_{tt}c^2 dt^2 + 2g_{t\phi}c dt d\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (1.2)$$

به دلیل تقارن هندسه فضا زمان، تمام مولفه‌های متریک تنها به r و θ وابسته‌اند. می‌خواهیم معادلات حرکت عنصر خط بالا را با استفاده از کنش

$$S = \int ds, \quad (2.2)$$

بدست آوریم. لاگرانژی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (3.2)$$

با فرض $\theta = \frac{\pi}{4}$ به علت حضور در صفحه استوایی و وابسته نبودن متریک به t, ϕ و با استفاده از معادلات اوایلر لاگرانژ دو ثابت حرکت زیر بدست می‌آید

$$g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi} = -E, \quad (4.2)$$

$$g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} = L, \quad (5.2)$$

که در آن $t = \frac{dt}{d\tau}$ و $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau}$. نتیجه می‌شود که

$$\dot{t} = \frac{Eg_{\phi\phi} + Lg_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \quad (6.2)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{Eg_{t\phi} + Lg_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}. \quad (7.2)$$

و در آخر معادله حرکت شعاعی بدست آمده را به عنوان پتانسیل موثر تعریف می‌کنیم

$$g_{rr}\dot{r}^2 = V_{eff}(r, E, L), \quad (8.2)$$

جایی که تعریف کردیم

$$V_{eff} = -1 + \frac{E^2g_{\phi\phi} + 2ELg_{t\phi} + L^2g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}. \quad (9.2)$$

برای مدارهای دایره‌ای $V_{eff}(r) = V_{eff,r}(r) = 0$ ، پس انرژی ویژه و تکانه زاویه‌ای بر حسب سرعت زاویه‌ای Ω به صورت زیر بدست می‌آید

$$E = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad (10.2)$$

$$L = -\frac{g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad (11.2)$$

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi,r} \pm \sqrt{(g_{t\phi,r})^2 - g_{tt,r}g_{\phi\phi,r}}}{g_{\phi\phi,r}}, \quad (12.2)$$

که در تعریف علامت مثبت و منفی به ترتیب با مدارهای مستقیم که به صورت ساعتگرد می‌چرخند و غیر مستقیم که به صورت پاد ساعتگرد می‌چرخند مطابقت دارد. برای هر ناظر ثابتی شرط زیر برقرار خواهد بود

$$+g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2 \leq 0. \quad (13.2)$$

رابطه فوق محدودیتی را بر روی مقدار سرعت زاویه‌ای به صورت $\Omega_{max} > \Omega > \Omega_{min}$ قرار می‌دهد، جایی که ما تعریف کرده‌ایم

$$\Omega_{min} = \omega - \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}, \quad (14.2)$$

$$\Omega_{max} = \omega + \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}, \quad (15.2)$$

جایی که $\omega = \frac{-g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$ است. محدودیت حالت محدود معادله

$$g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2 = 0. \quad (16.2)$$

درونی ترین مرز مدارهای ذرات، یعنی r_{ph} که به آن مدار فوتون نیز می‌گویند را می‌دهد، مورد محدود کننده $E = 1$ که از آنجایی که مقدار انرژی بر بیشینه آن را می‌دهد و مقدار یک بیشینه انرژی است شعاع r_{mb} را می‌دهد و شعاع r_{ms} با شرط زیر تعیین می‌شود.

$$V_{,rr} = \frac{1}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} \times \left[E^2 g_{\phi\phi,rr} + 2ELg_{t\phi,rr} + L^2 g_{tt,rr} - (g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})_{,rr} \right] = 0. \quad (17.2)$$

۲-۳ اثرات الکترومغناطیسی در قرص‌های برافزایش گرانشی اطراف اجسام فشرده

اکنون به بررسی اصول قرص‌های برافزایشی نازک در نسبت عام می‌پردازیم. با استفاده از قوانین چهار بعدی حفاظت از بقیه توده، از انرژی و تکانه زاویه‌ای قرص، ما میتوانیم ساختار معادلات قرص نازک را بدست آوریم. شار انرژی تابشی آزاد شده توسط سطح قرص را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۲]

[۴۶] [۴۷]

$$F(r) = -\frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,r}}{(E - L\Omega)^2} \int_{r_{ms}}^r (E - \Omega L)L_{,r} dr. \quad (18.2)$$

با فرض اینکه در دیسک نازک حالت پایدار، ماده برافزایشی در تعادل ترمودینامیکی است، تابش ساطع شده از سطح دیسک را می توان با تشعشع کامل جسم سیاه تقریب زد، که توسط تابع توزیع پلانک $I(\nu)$ توصیف شده است. از این رو می توان شار انرژی را به صورت $F(r) = \sigma_{SB} T^4(r)$ بدست آورد، که در آن σ_{SB} ثابت استفان - بولتزمن است. با درخشندگی مشاهده شده $L(\nu)$ که دارای یک طیف جسم سیاه انتقال به سرخ یافته که توسط

$$L(\nu) = 4\pi d^2 I(\nu) = -\frac{4\pi h \cos i}{c^2} \int_{r_i}^{r_f} \int_0^{2\pi} \frac{\nu_e^3 r d\phi dr}{\exp\left(\frac{\nu_e}{T}\right) - 1} \quad (19.2)$$

بیان می شود، جایی که d فاصله تا منبع است، i زاویه شیب قرص است، در حالی که r_i و r_f به ترتیب موقعیت لبه های قرص های داخلی و خارجی را نشان می دهند. فرکانس ν_e به صورت $\nu_e = \nu(1+z)$ تعریف می شود، جایی که انتقال به سرخی گرانشی $1+z$ به صورت زیر است

$$1+z = \frac{1 + \Omega r \sin i \sin \phi}{\sqrt{-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi}}}. \quad (20.2)$$

حال به سراغ بررسی پارامترهای بدست آمده در حل های سیاه چاله ای شوارتزشیلد، کر و کسلیف می رویم [۲].

فصل ۳

حل شوارتزشیلد

۳-۱ توصیف مختصات

می‌خواهیم مشخص کنیم که اگر یک رویداد P داشته باشیم، مختصاتی که با آن رویداد را توصیف می‌کنیم زمان‌گونه، فضاگونه و یا خنثی می‌باشد. این قضیه به طور مستقیم با ماهیت بردار مماس به منحنی مختصات در رویداد مطابقت دارد. ساده ترین راه برای تعیین این ویژگی مختصات ثابت قرار دادن سایر مختصات در رویداد و یک تغییر بی‌نهایت کوچک در مختصه مورد نظر است. اگر این تغییر در ds^2 مثبت، صفر و یا منفی باشد مختصه به ترتیب زمان گونه، خنثی و یا فضا گونه است. این به راحتی از ضریب مولفه متریک قطری شده مشخص می‌شود.

۳-۲ متریک شوارتزشیلد

اولین حل دقیق معادلات انیشتین توسط شوارتزشیلد^۱ پیدا شد که نمایانگر هندسه فضا زمان در خارج از یک توزیع کروی استاتیکی است. او یک فضا زمان ایستا در نظر گرفت بطوری که همه اجزای متریک مستقل از مشتق مولفه زمانی بوده و همچنین عنصر خط نیز تحت تبدیل مولفه زمانی به منفی آن، تغییری نکند. بنابراین از عبارت عمومی زیر شروع کرد

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.3)$$

تنها متغیرهای چرخشی مختصات فضایی به صورت زیر اند

¹Schwarzschild

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2,$$

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x},$$

$$\vec{x} \cdot d\vec{x},$$

که در آن $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ را مختصات مکانی و $x^0 = t$ را مختصات زمانی تعریف کردیم. پس شکل متریک باز نویسی می‌شود

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)d\vec{x} \cdot d\vec{x} - C(t, r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - D(t, r)d\vec{x}^2, \quad (2.3)$$

که در آن A, B, C, D توابع دلخواه هستند. مختصات x^i ها را به مختصات کروی تبدیل می‌کنیم

$$(3.3)$$

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)dtdr - C(t, r)r^2 dr - D(t, r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

با تغییر توابع دلخواه و بردن r در توابع دلخواه و حذف آن‌ها از جملات و تعریف مجدد آن توابع، می‌توان متریک را به صورت زیر نوشت

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)dtdr - C(t, r)dr^2 - D(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.3)$$

حال با تعریف $\bar{r}^2 = D(t, r)$ متریک به صورت زیر می‌شود

$$ds^2 = A(t, \bar{r})dt^2 - B(t, \bar{r})dtd\bar{r} - C(t, \bar{r})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.3)$$

حال توابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$\bar{A} = \frac{1}{A\phi^2},$$

و

$$\bar{B} = C + \frac{B}{4A}.$$

پس متریک به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$ds^{\nu} = \bar{A}(t, \bar{r}) dt^{\nu} - \bar{B}(t, \bar{r}) d\bar{r}^{\nu} - \bar{r}^{\nu} (d\theta^{\nu} + \sin^{\nu} \theta d\phi^{\nu}). \quad (6.3)$$

چون توابع دلخواه تعریف شده اند می‌توانیم با استفاده از تعریف جدیدی از مولفه زمانی به صورت

$$d\bar{t} = \Phi(t, \bar{r}) \left(A(t, \bar{r}) dt - \frac{1}{c^{\nu}} B(t, \bar{r}) d\bar{r} \right) \quad (7.3)$$

و تعریف مجدد توابع دلخواه و مستقل از زمان کردن توابع دلخواه می‌توانیم متریک را به صورت

زیر بنویسیم

$$ds^{\nu} = A(r) dt^{\nu} - B(r) dr^{\nu} - r^{\nu} (d\theta^{\nu} + \sin^{\nu} \theta d\phi^{\nu}), \quad (8.3)$$

که این متریک یک فضا-زمان ایزوتروپیک استاتیک کلی فضایی است.

با حل معادلات خلا و بدست آوردن ضرایب هموستار، توابع A و B به صورت زیر تعریف

می‌شوند

$$A = c^{\nu} \left(1 - \frac{\nu GM}{c^{\nu} r} \right), \quad (9.3)$$

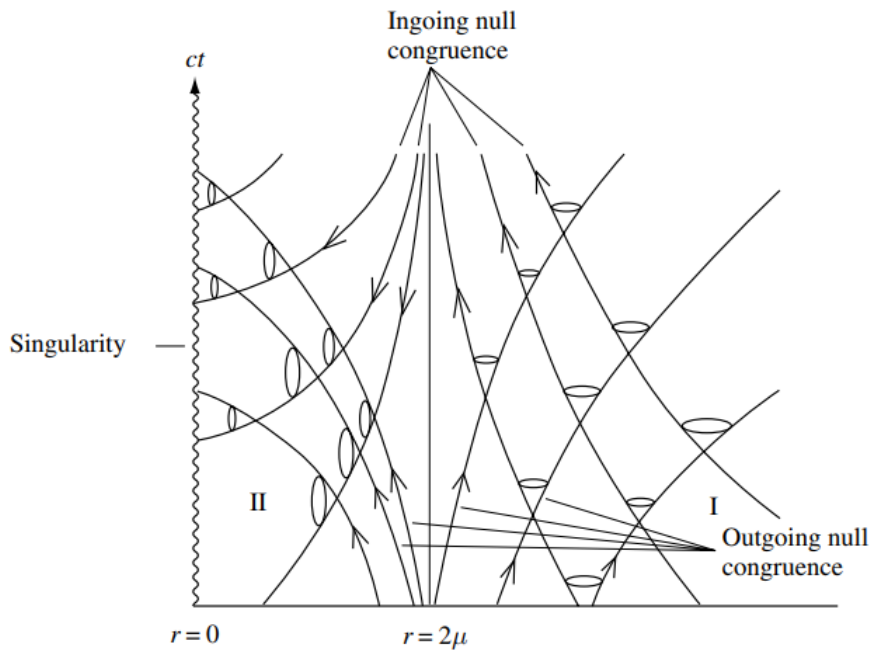
$$B = \left(1 - \frac{\nu GM}{c^{\nu} r} \right)^{-1}, \quad (10.3)$$

که در آن c سرعت نور، M جرم جسم مرکزی و G ثابت گرانش است.

۳-۳ تکینگی‌ها در مختصات شوارتزشیلد

متریک شوارتزشیلد به صورت زیر است

$$ds^{\nu} = c^{\nu} \left(1 - \frac{\nu GM}{c^{\nu} r} \right) dt^{\nu} - \left(1 - \frac{\nu GM}{c^{\nu} r} \right)^{-1} dr^{\nu} - r^{\nu} d\theta^{\nu} - r^{\nu} \sin^{\nu} \theta d\phi^{\nu}. \quad (11.3)$$



شکل ۱-۳: ساختار مخروط نوری سیاهچاله شوارتزشیلد [۱]

از رابطه ۱۱.۳ مشخص می‌شود که در دو مقدار $r = 0$ و شعاع شوارتزشیلد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}, \quad (12.3)$$

عنصر خط دارای تکینگی است. باید توجه داشت که متریک بالا فقط تا سطح توزیع ماده کروی معتبر است.

ما در شکل ۱-۳ ناحیه $r > r_S$ را ناحیه I و $r < r_S$ را II می‌نامیم. از متریک می‌بینیم که در ناحیه I ضریب متریک g_{tt} مثبت و سه مولفه دیگر منفی است. بنابراین نتیجه می‌شود که برای این ناحیه مختصات t زمان‌گونه و r ، θ و ϕ فضاگونه هستند. اما در ناحیه دیگر مختصات t فضاگونه و r زمان‌گونه است. با توجه به تفاوت دو ناحیه، مرز جدا کننده این دو را افق رویداد سیاهچاله تعریف می‌کنیم.

باید در نظر داشت که مختصات، راهی برای برچسب گذاری رویدادها در فضا زمان اند. کمیت های هندسی معنادار فیزیکی تانسوری هستند که در هر نقطه از خمینه فضا زمان تعریف شده‌اند. انحنا فضا زمان به صورت کوورینانس توسط مولفه های تانسور انحنا $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ توصیف می‌شود، که ما می‌توانیم به راحتی برای متریک شوارتزشیلد محاسبه کنیم. به عنوان مثال اسکالر انحنا در هر نقطه

از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48\mu^2}{r^6}, \quad (13.3)$$

که از این رابطه مشاهده می‌شود $r = 2\mu$ یک تکینگی مختصاتی و $r = 0$ یک تکینگی ذاتی است و μ به صورت

$$\mu = \frac{GM}{c^2} \quad (14.3)$$

تعریف می‌شود.

۳-۴ انتقال به سرخ گرانشی برای یک فرستنده و گیرنده ثابت

ما بحث خود را درباره فیزیک در مجاورت یک توده کروی M با در نظر گرفتن انتقال به سرخی گرانشی آغاز می‌کنیم. به طور خاص ما مثال خاصی از یک ساطع کننده را در مختصات فضایی ثابت (r_E, θ_E, ϕ_E) در نظر می‌گیریم که فوتونی را منتشر می‌کند که توسط یک ناظر در مختصات فضایی ثابت (r_R, θ_R, ϕ_R) دریافت می‌شود.

اگر t_E زمان انتشار و t_R زمان دریافت باشد، فوتون از رویداد $(t_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$ به رویداد $(t_R, r_R, \theta_R, \phi_R)$ در امتداد یک ژئودزیک تهی در فضا زمان شوارتزشیلد حرکت می‌کند. در این مدل ساده بدست آوردن نتیجه به روش ابتدایی آموزنده است. ما فقط باید از این واقعیت که ژئودزیک فوتون یک منحنی پوچ است استفاده کنیم. بنابراین $ds^2 = 0$ در همهی نقاط در امتداد آن و از متریک شوارتزشیلد داریم

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (15.3)$$

اولین سیگنال را بررسی می‌کنیم. بنابراین اگر σ پارامتری وابسته در طول ژئودزیک تهی باشد داریم

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-g_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16.3)$$

با انتگرال گیری بدست می‌آوریم

$$t_R - t_E = c^{-1} \int_{\sigma_E}^{\sigma_R} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-g_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma. \quad (17.3)$$

در امتداد جهان خط انتشار دهنده و گیرنده $\cdot dr = d\theta = d\phi = 0$. بنابراین عنصر خط شوارتزشیلد در هر دو مورد به صورت زیر است

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 = 0. \quad (18.3)$$

علاوه بر این r در امتداد جهان خط ثابت است ، پس برای انتگرال داریم

$$\Delta\tau_E = \left(1 - \frac{2\mu}{r_E}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t_E, \quad (19.3)$$

$$\Delta\tau_R = \left(1 - \frac{2\mu}{r_R}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t_R. \quad (20.3)$$

از آنجایی که $\Delta t_R = \Delta t_E$ داریم

$$\frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \left(\frac{1 - \left(\frac{2\mu}{r_R}\right)}{1 - \left(\frac{2\mu}{r_E}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (21.3)$$

که این اساس فرمول انتقال به سرخ گرانشی را تشکیل می دهد. دو نوار موج یک موج الکترومغناطیس در نظر می گیریم. بنابراین فرکانس های فوتون که توسط هر ناظر اندازه گیری می شود با هم مرتبط است.

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(\frac{1 - \left(\frac{2GM}{r_{EC}^2}\right)}{1 - \left(\frac{2MG}{r_{RC}^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (22.3)$$

که نشان می دهد $\nu_R < \nu_E$ اگر $r_R > r_E$. انتقال به سرخی فوتون z به صورت زیر است

$$1 + z = \left(\frac{\nu_E}{\nu_R}\right). \quad (23.3)$$

این را می توان به هر فضا زمانی که مختصات آنرا طوری انتخاب کرد که فضا زمان ثابت باشد، داریم

$$ds^2 = g_{..}(x) dt^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j. \quad (24.3)$$

با تکرار مشتق فوق برای یک فرستنده و گیرنده در مختصات فضایی ثابت در این فضا زمان کلی متوجه می‌شویم که

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(\frac{g_{\dots x_E}}{g_{\dots x_R}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25.3)$$

مشتقات ارائه شده بستگی به ثابت بودن فرستنده و گیرنده از نظر مکانی دارند.

۳-۵ ژئودزیک در هندسه شوارتزشیلد

با استفاده از ضرایب کانکشن و عنصر خط معادله ژئودزیک هندسه شوارتزشیلد به صورت زیر خواهد شد

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0. \quad (26.3)$$

دستیابی به معادلات ژئودزیک از روش لاگرانژی بسیار آموزنده است. بنابراین معادله $L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ را در نظر می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

$$L = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right). \quad (27.3)$$

معادلات ژئودزیک با جایگذاری این رابطه در معادلات اوایلر-لاگرانژ بدست می‌آید.

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (28.3)$$

با انجام محاسبات به معادلات ژئودزیکی زیر به ازای $\mu = 0, 1, 2, 3$ می‌رسیم:

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) \dot{t} = k, \quad (29.3)$$

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} \ddot{r} + \frac{\mu c^2}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^2 \frac{\mu}{r^2} \dot{r}^2 - r \left(\ddot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right) = 0, \quad (30.3)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (31.3)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = h. \quad (32.3)$$

با در نظر گرفتن $\theta = \frac{\pi}{2}$ معادلات به شکل زیر می‌شود

$$\left(1 - \frac{\gamma\mu}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (33.3)$$

$$\left(1 - \frac{\gamma\mu}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{\mu c^2}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{\gamma\mu}{r}\right)^2 \frac{\mu}{r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\phi}^2 = 0. \quad (34.3)$$

$$r^2 \dot{\phi} = h, \quad (35.3)$$

این معادلات برای ژئودزیک با پارامترهای تهی و غیر صحیح است. حال در مورد تفسیر فیزیکی h, k صحبت می‌کنیم. با استفاده از $P^\mu = \dot{x}^\mu$ برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ می‌توانیم معادلات زیر را بنویسیم

$$P_t = g_{tt} \dot{t} = c^2 \left(1 - \frac{\gamma\mu}{r}\right) \dot{t} = kc^2, \quad (36.3)$$

$$P_\phi = g_{\phi\phi} \dot{\phi} = -r^2 \dot{\phi} = -h. \quad (37.3)$$

اگر در یک رویداد ناظری با سرعت u با تکانه p برخورد کند انرژی این ذره به شکل زیر است

$$E = p \cdot u = p_\mu p^\mu. \quad (38.3)$$

برای ناظری که در بی‌نهایت ساکن است $E = p_t = kc^2$ بنابراین $k = \frac{E}{c^2}$ و در حالت کلی:

$$k = \frac{E}{c^2}. \quad (39.3)$$

۳-۶ مسیرهای ذرات جرم‌دار

مسیر حرکت یک ذره جرم‌دار یک ژئودزیک زمان مند است. جهان خط $x^\mu(\tau)$ یک ذره جرم‌دار که در سطح استوایی هندسه شوارتزشید حرکت می‌کند باید معادلات زیر را برآورده کند

$$\left(1 - \frac{\gamma\mu}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (40.3)$$

$$c^2 \left(1 - \frac{\gamma\mu}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{\gamma\mu}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = c^2, \quad (41.3)$$

$$r^2 \dot{\phi} = h. \quad (42.3)$$

با جایگذاری معادلات در هم معادلات ترکیبی انرژی برای مختصات r بدست می‌آید

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{\gamma GM}{c^2 r}\right) - \frac{\gamma GM}{r} = c^2 (k^2 - 1), \quad (43.3)$$

جایی که ما $\mu = \frac{GM}{c^2}$ نوشته‌ایم. مانند قبل $k = \frac{E}{m \cdot c^2}$ و E کل انرژی ذره در آن مدار است.

دومین معادله مفید که ما را قادر می‌سازد تا شکل مدار ذره را تعیین کنیم ممکن است با استفاده از معادله (43.3) برای بیان \dot{r} در معادله انرژی بدست آید

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}. \quad (44.3)$$

با جایگذاری این معادله انرژی داشت :

$$\left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = c^2 (k^2 - 1) + \frac{\gamma GM}{r} + \frac{\gamma GM h^2}{c^2 r^3}. \quad (45.3)$$

اگر تقریب $u = \frac{1}{r}$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{h^2} (k^2 - 1) + \frac{\gamma GM u}{h^2} + \frac{\gamma GM u^3}{c^2}. \quad (46.3)$$

این معادله را با توجه به ϕ متمایز می‌کنیم، در نهایت خواهیم داشت

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2. \quad (47.3)$$

در گرانش نیوتونی معادلات حرکت یک ذره به جرم m در صفحه استوایی $\theta = \frac{\pi}{2}$ از لاگرانژی تعیین می‌شود

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{GMm}{r}. \quad (48.3)$$

از معادلات اوایلر-لاگرانژ داریم

$$r^2 \dot{\phi} = h, \quad (49.3)$$

و

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^3} - \frac{GM}{r^2}, \quad (50.3)$$

که در آن h ثابت انتگرال گیری حرکت خاص ذره است. اگر اکنون $u = \frac{1}{r}$ را جایگزین کرده و متغییر زمان را حذف کنیم معادله حرکت نیوتونی برای مدارهای سیاره‌ای بدست می‌آید

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}. \quad (51.3)$$

۳-۷ حرکت شعاعی ذرات جرم‌دار

برای حرکت شعاعی ϕ ثابت است، یعنی $h = 0$ است. پس

$$\dot{r}^2 = c^2 (k^2 - 1) + \frac{2GM}{r}. \quad (52.3)$$

نسبت به τ مشتق گرفته و بر \dot{r} تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}, \quad (53.3)$$

که دقیقا همان شکل معادله مربوط به حرکت در گرانش نیوتونی است. با این حال این بدان معنا نیست که نسبت عام و گرانش نیوتونی رفتار فیزیکی یکسانی را پیش بینی می‌کنند. به عنوان یک مثال خواص، ذره ای را که از حالت سکون در $r = R$ خارج شده است در نظر می‌گیریم. بلافاصله می‌بینیم که $k^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 R}$. بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right). \quad (54.3)$$

با در نظر گرفتن ذره ای که از حالت سکون در بی نهایت رها شده، نقاط اصلی فیزیکی را نشان می‌دهیم. در این مورد $k = 1$ و جبر بسیار پیچیده تر است. بنابراین داریم

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1}, \quad (55.3)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \left(\frac{2\mu c^2}{r} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (56.3)$$

این معادلات اساس بحث ما در مورد ذره‌ای است که به طور شعاعی از حالت سکون در بی نهایت رها شده است. اجزای سرعت ذره در سیستمن مختصات (t, r, θ, ϕ) به صورت زیر است

$$[w^\mu] = \left[\frac{dx^\mu}{d\tau} \right] = \left[\left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1}, - \left(\frac{2\mu c^2}{r} \right)^{\frac{1}{2}}, 0, 0 \right]. \quad (57.3)$$

با انتگرال گیری از رابطه dr به رابطه زیر می‌رسیم

$$\tau = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r^3}{2\mu c^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r^3}{2\mu c^2}}, \quad (58.3)$$

جایی که ما ثابت انتگرال گیری را برای $\tau = 0$ و $r = r_0$ نوشته‌ایم.

به جای پارامتر بندی جهان خط بر حسب زمان مناسب τ می‌توانیم مسیر را به صورت $r(t)$ توصیف کنیم. داریم

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = - \left(\frac{2\mu c^2}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right). \quad (59.3)$$

با انتگرال گیری خواهیم داشت

$$t = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{r_0^3}{2\mu c^2}} - \sqrt{\frac{r^3}{2\mu c^2}} \right) + \frac{4\mu}{c} \left(\sqrt{\frac{r_0}{2\mu}} - \sqrt{\frac{r}{2\mu}} \right) + \frac{2\mu}{c} \ln \left| \frac{\left[\sqrt{\frac{r}{2\mu}} + 1 \right]}{\left[\sqrt{\frac{r}{2\mu}} - 1 \right]} \right| \frac{\left[\sqrt{\frac{r_0}{2\mu}} - 1 \right]}{\left[\sqrt{\frac{r_0}{2\mu}} + 1 \right]} \right|, \quad (60.3)$$

جایی که ثابت انتگرال گیری $t = 0$ را در $r = r_0$ می‌دهد.

از آنجایی که زمان مختصات t با زمان مناسب تجربه شده توسط یک ناظر ثابت در شعاع بزرگ مطابقت دارد، بنابراین باید نتیجه بگیریم که برای چنین ناظری، زمان بی نهایت طول می‌کشد تا ذره به $r = 2\mu$ برسد. حال می‌بینیم یک ناظر ثابت در r چه سرعتی برای ذره در حال عبور اندازه گیری می‌کند. از متریک شوارتزشیلد داریم

$$dt' = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (61.3)$$

به طور مشابه

$$dr' = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{\frac{1}{2}} dr. \quad (62.3)$$

بنابراین سرعت ذره شعاعی که توسط یک ناظر ثابت در r اندازه گیری می‌شود به صورت زیر است

$$\frac{dr'}{dt'} = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} \frac{dr}{dt} = - \left(\frac{2\mu c^2}{r} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (63.3)$$

بنابراین ما نتیجه شگفت انگیزی را می‌بینیم که با نزدیک شدن ذره به $r = 2\mu$ ، یک ناظر ثابت در آن شعاع مشاهده می‌کند که سرعت ذره به c تمایل دارد.

۳-۸ حرکت دایره‌ای ذرات جرم‌دار

برای حرکت دایره در صفحه استوایی $r = const$ پس $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. با حایگذاری خواهیم داشت

$$u = \frac{GM}{h} + \frac{\mathfrak{z}GMu^{\mathfrak{z}}}{c^{\mathfrak{z}}}, \quad (64.3)$$

که از آن در میابیم

$$h^{\mathfrak{z}} = \frac{\mu c^{\mathfrak{z}} r^{\mathfrak{z}}}{r - \mathfrak{z}\mu}. \quad (65.3)$$

بدین ترتیب با انجام چند جایگذاری بدست می‌آید

$$k = \frac{1 - \frac{\mathfrak{z}\mu}{r}}{\left(1 - \frac{\mathfrak{z}\mu}{r}\right)^{\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}}}. \quad (66.3)$$

پس انرژی یک ذره با جرم ثابت m در یک دایره به شعاع r توسط $E = km \cdot c^{\mathfrak{z}}$ داده می‌شود. از این نتیجه برای تعیین مدارهای دایره‌ای شکل استفاده می‌کنیم. برای این کار ما به $E < m \cdot c^{\mathfrak{z}}$ نیاز داریم، پس برای محدود شدن k خواهیم داشت

$$\left(1 - \frac{\mathfrak{z}\mu}{r}\right)^{\mathfrak{z}} = 1 - \frac{\mathfrak{z}\mu}{r}. \quad (67.3)$$

می‌بینیم $r = \infty$ و $r = \mathfrak{z}\mu$ جواب معادله اند. می‌توانیم با جایگزینی $h^{\mathfrak{z}}$ در معادله ژئودزیک $r^{\mathfrak{z}}\dot{\phi} = h$ خواهیم داشت

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^{\mathfrak{z}} = \frac{\mu c^{\mathfrak{z}}}{r^{\mathfrak{z}}(r - \mathfrak{z}\mu)}. \quad (68.3)$$

اهمیت این معادله این است که نمی‌توان آن را برای مدارهای دایره‌ای با $r < \mathfrak{z}\mu$ در اطراف یک جرم کروی داشته باشد، مهم نیست اندازه حرکت زاویه‌ای چقدر بزرگ باشد. این با نظریه نیوتونی متفاوت است. همچنین داریم

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^{\mathfrak{z}} = \left(\frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}\right)^{\mathfrak{z}} = \frac{\left(1 - \frac{\mathfrak{z}\mu}{r}\right)^{\mathfrak{z}}}{k^{\mathfrak{z}}} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^{\mathfrak{z}} = \frac{\mu c^{\mathfrak{z}}}{r^{\mathfrak{z}}} = \frac{GM}{r^{\mathfrak{z}}}. \quad (69.3)$$

این دقیقاً همان عبارت نیوتونی برای دوره مدار دایره‌ای به شعاع r است. اگر چه نمی‌توان گفت که r در شعاع مدار حالت نسبی است، اما می‌بینیم که فاصله فضایی طی شده در یک دور کامل $2\pi r$ ، درست همانند نیوتونی است.

۳-۹ ثبات مدار ذرات جرم دار

می‌خواهیم پایداری نزدیک ترین مدار دایره‌ای محدود به دور یک جرم کروی عظیم را بررسی کنیم. در دینامیک نیوتونی معادله حرکت یک ذره در یک پتانسیل مرکزی به صورت زیر است

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{eff}(r) = E, \quad (70.3)$$

جایی که V_{eff} پتانسیل موثر و E انرژی کل ذرات در واحد جرم است. برای گردش به دور جرم کروی M پتانسیل موثر از رابطه زیر بدست می‌آید

$$V_{eff} = -\frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2}, \quad (71.3)$$

جایی که h تکانه زاویه‌ای خاص ذره است.

در دینامیک نیوتونی می‌بینیم که حرکت تک زاویه‌ای محدود مانع حرکت زاویه ای می‌باشد که ذره را به $r = 0$ می‌رساند که این در نسبیت عام صادق نیست.

در نسبیت عام معادله انرژی برای یک ذره در اطراف یک جرم کروی به صورت زیر است

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{h^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) - \frac{\mu c^2}{r} = \frac{c^2}{2} (k^2 - 1). \quad (72.3)$$

بنابراین در نسبیت عام پتانسیل در واحد جرم به صورت زیر است

$$V_{eff}(r) = -\frac{\mu c^2}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu h^2}{r^3}, \quad (73.3)$$

که دارای یک عبارت اضافی متناسب با $\frac{1}{r^3}$ در مقایسه با مورد نیوتونی است. در محدوده غیر نسبیتی $c \rightarrow \infty$ دو معادله برابر می‌شوند.

با مشتق گیری از معادله پتانسیل داریم

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{\mu c^2}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{3\mu h^2}{r^4}. \quad (74.3)$$

بنابراین محدوده پتانسیل موثر در حل معادله درجه دوم زیر است

$$\mu c^2 r^2 - h^2 r + 3\mu h^2 = 0, \quad (75.3)$$

که جواب آن به صورت زیر است

$$r = \frac{h}{2\mu c^2} \left(h + \sqrt{h^2 - 12\mu c^2} \right) \quad (76.3)$$

$$r = \frac{h}{2\mu c^2} \left(h - \sqrt{h^2 - 12\mu c^2} \right). \quad (77.3)$$

ما به طور خاص توجه می‌کنیم که اگر $h = \sqrt{12}\mu c = 2\sqrt{3}\mu c$ باشد، فقط یک انتها وجود دارد و هیچ نقطه عطفی در مدار برای مقادیر کمتر از h وجود ندارد. اهمیت این نتیجه این است که درونی ترین مدار مدور پایدار دارد

$$r_{min} = 6\mu = \frac{6GM}{c^2}. \quad (78.3)$$

وجود درونی ترین مدار پایدار پیامدهای نجومی جالبی دارد. گاز در یک قرص برافراشته در اطراف یک جسم مرکزی فشرده شده جرم‌دار در مدار دایره‌ای در اطراف جسم فشرده قرار می‌گیرد. با این حال گاز به دلیل گرانشی متلاطم به آرامی شتاب زاویه‌ای خود را از دست می‌دهد. با از دست دادن شتاب زاویه‌ای، گاز به آرامی به سمت داخل حرکت می‌کند و انرژی پتانسیل گرانشی خود را از دست می‌دهد و گرم می‌شود. سرانجام شتاب زاویه‌ای خود را به قدری از دست می‌دهد که دیگر نمی‌تواند یک مدار دایره‌ای پایدار را دنبال کند و بنابراین به سرعت به سمت داخل به سمت جسم مرکزی می‌پیچد. حداکثر بازده از نظم "انرژی اتصال گرانشی" در درونی ترین مدار دایره‌ای پایدار است. خواهیم داشت

$$\frac{E}{m \cdot c^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.943. \quad (79.3)$$

بنابراین حداکثر راندمان تابشی قرص برافزایی است

$$\epsilon_{acc} = 5/7 \quad (80.3)$$

بنابراین یک قرص جمع‌کننده در اطراف یک جسم نجومی بسیار فشرده می‌تواند شاید چند درصد از انرژی جرم بقیه گاز را به تابش تبدیل کند. این را می‌توان با کارایی سوختن هسته‌ای هیدروژن به هلیوم مقایسه کرد

$$\epsilon_{nuclear} = 0.7 \quad (81.3)$$

بنابراین قرص‌های تراکمی قادر به تبدیل انرژی جرم سکون به تابش با بازدهی هستند که حدوداً ۱۰ برابر بیشتر از بازده سوختن هسته‌ای هیدروژن است. "قدرت تراکم" اجسام بسیار فشرده باعث برخی از پر انرژی‌ترین پدیده‌های شناخته شده در جهان می‌شود.

تصویری بصری از یک مدار غیر دایره‌ای و گرفتن ذره‌ای با حرکت زاویه‌ای غیر صفر h ممکن است با تمایز معادله نقاط انرژی برای مدارهای ذرات جرم‌دار با توجه به زمان ویژه τ بدست آید. با استفاده از معادله اصلی برای حذف اولین مشتق $\frac{dr}{d\tau}$ می‌فهمیم که

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} - \frac{3h^2 GM}{c^2 r^4}. \quad (۸۲.۳)$$

همانطور که ممکن است انتظار داشته باشیم، دو جمله اول در سمت راست بسیار شبیه عبارت نیوتونی است که مربوط به نیروی گرانشی داخلی و نیروی "مرکز گریز" دافعه‌ای متناسب با h^2 است. جمله سوم جدید است اما باز هم متناسب با h^2 است، اما این بار به سمت داخل عمل می‌کند. این نشان می‌دهد که نزدیک به یک جسم فشرده به ویژه در شعاع $r = 3GM/c^2$ ، نیروی گریز از مرکز علامت را تغییر می‌دهد و به سمت داخل هدایت می‌شود، بنابراین مرگ هر ذره‌ای را که بیش از حد به جرم منحرف شود را تسریع می‌کند. این منجر به مدارهای مارپیچی که در شکل نشان داده شده است می‌شود.

۱۰-۳ مسیر فوتون‌ها

مسیر فوتون (و هر ذره‌ای که جرم سکون آن صفر است) یک ژئودزیک خالی است. ما نمی‌توانیم از زمان ویژه τ به عنوان پارامتر استفاده کنیم، بنابراین در عوض از پارامتر وابسته σ استفاده می‌کنیم. با جایگزینی $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$ داریم

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t} = k, \quad (۸۳.۳)$$

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0, \quad (۸۴.۳)$$

$$r^2\dot{\phi} = h, \quad (۸۵.۳)$$

برای مسیرهای فوتونی داریم

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) = c^2 k^2. \quad (86.3)$$

با جایگزینی $h = r^2 \dot{\phi}$ خواهیم داشت

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}. \quad (87.3)$$

و با $u = \frac{1}{r}$ داریم

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2. \quad (88.3)$$

یاز هم دو مورد خاص حرکت شعاعی و دایره ای را بررسی می‌کنیم.

۱۱-۳ حرکت شعاعی فوتون

برای حرکت شعاعی $\dot{\phi} = 0$ پس

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 = 0. \quad (89.3)$$

بدست می‌آوریم

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right). \quad (90.3)$$

با انتگرال گیری داریم:

فوتون خروجی

$$ct = r + 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + const. \quad (91.3)$$

فوتون ورودی

$$ct = -r - 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + const. \quad (92.3)$$

دانش ما در مورد نور سبک به ما این امکان را می‌دهد که "تصویر" را در پشت نتیجه جبری قبلی خود بسازیم که یک ذره برای رسیدن به افق رویداد بی نهایت زمان احتیاج دارد. یا این حال همانطور که قبلاً بحث شد، زمان ویژه τ که توسط یک ذره جرم‌دار در سقوط به $r = 2\mu$ تجربه می‌شود محدود است. علاوه بر این $\frac{dr}{d\tau}$ در این نقطه تمایلی به صفر ندارد. بنابراین ذره "بخار تمام نشده است" و احتمالاً از این آستانه عبور می‌کند.

۱۲-۳ حرکت دایره‌ای فوتون

برای حرکت در یک دایره $r = const$. بنابراین

$$r = \frac{3GM}{c^2}. \quad (93.3)$$

بنابراین یک جرم عظیم می‌تواند تاثیر بسزایی در مسیر فوتون داشته باشد.

۱۳-۳ پایداری مدارهای فوتونی

معادله انرژی را برای مدار فوتون به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم

$$\frac{\dot{r}^2}{h} + v_{eff}(r) = \frac{1}{b^2}, \quad (94.3)$$

جایی که ما مقدار $b = \frac{h}{ck}$ و پتانسیل موثر را به صورت زیر تعریف کردیم

$$v_{eff}(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right). \quad (95.3)$$

با مشاهده نمودار پتانسیل موثر می‌بینیم که در $r = 3\mu$ دارای حداکثریست که مقدار آن $\frac{1}{(27\mu^2)}$ است. بنابراین مدار دایره ای در $r = 3\mu$ ناپایدار است. نتیجه می‌گیریم که هیچ مدار دایره ای فوتونی ای ذر هندسه شوارتزشیلد وجود ندارد.

ویژگی مدار های کلی فوتون با مقدار ثابت b تعیین می شود. برای یافتن معنای فیزیکی آن داریم

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (96.3)$$

بنابراین برای یک مدار فوتونی، به عنوان $r \rightarrow \infty$ داریم

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = \pm b. \quad (97.3)$$

با فرض $\phi \rightarrow 0$ راه حل این معادله خواهد بود

$$r = \pm \frac{b}{\sin \phi}, \quad (98.3)$$

که معادلات دو خط مستقیم را با پارامتر b در هر دو طرف مبدا عبور می دهد. ماهیت مدار به مقدار پارامتر ضربه بستگی دارد. ابتدا فوتون های رو به داخل در نظر می گیریم، یعنی فوتونی که در ابتدا در حال کاهش است. اگر $b > 3\sqrt{3}\mu$ باشد در این صورت مدار یک نقطه عطف واحد از نزدیک ترین رویگرد را دارد و دوباره به بی نهایت فرار می کند. اگر $b < 3\sqrt{3}\mu$ باشد، پرتو توسط جرم عظیم گرفته شده و به سمت مبدا مارپیچ می شود. ملاحظات مشابهی در مورد مسیر هایی که از شعاع های کوچک شروع می شوند نیز وجود دارد. اگر $b > 3\sqrt{3}\mu$ باشد، فوتون فرار می کند و در بی نهایت مسیر مستقیم آن دارای پارامتر b است.

۱۴-۳ رویکرد کلی به تغییرات سرخی گرانشی

یک فضا زمان کلی با متریک $g_{\mu\nu}$ در برخی از سیستم مختصات مختصر x^μ در نظر بگیرید، جایی که x^i یک مختصات زمانی است و x^i مختصات فضایی هستند. اگر فرستنده E و گیرنده R به ترتیب دارای خطوط جهانی $x_E^\mu(\tau_E)$ و $x_R^\mu(\tau_R)$ که در آن τ زمان ویژه هر ناظر است. انرژی فوتونی که توسط فرستنده در A و توسط گیرنده در B اندازه گیری می شود به صورت زیر است

$$E(A) = p(A) \cdot u_E(A) = p_\mu(A) u_E^\mu(A), \quad (99.3)$$

$$E(B) = p(B) \cdot u_R(B) = p_\mu(B) u_R^\mu(B), \quad (10.0.3)$$

جایی که p_μ سرعت فوتون در A و B است و u_E و u_R سرعت فرستنده و گیرنده در رویداد های A و B است.

از آنجایی که در هر دو $E = h\nu$ است، خواهیم داشت

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p_\mu(B) u_R^\mu(B)}{p_\mu(A) u_E^\mu(A)}. \quad (10.1.3)$$

از آنجایی که فوتون تکانه در هر نقطه مماس بر ژئودزیک هست، بطور موازی در مسیر منتقل می شود. بنابراین، اگر ژئودزیک فوتون $x^\mu(\sigma)$ بر اساس برخی پارامتر های وابسته σ توصیف شود، داریم

$$\frac{dp_\mu}{d\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^\nu p_\nu \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0. \quad (10.2.3)$$

اگر پارامتر وابسته σ را طوری انتخاب کنیم که $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$ خواهیم داشت

$$\frac{dp_\mu}{d\sigma} = \Gamma_{\mu\rho}^\nu p_\nu p^\rho. \quad (10.3.3)$$

اولین انتگرال این معادله به صورت زیر است

$$p^\mu p_{\mu\nu} = 0. \quad (10.4.3)$$

برای دو گیرنده و فرستنده با مختصات فضایی ثابت اجزای مکانی سرعت به صورت زیر بدست می آید

$$u_E^i = \frac{dx_E^i}{d\tau_E}, \quad (10.5.3)$$

$$u_R^i = \frac{dx_R^i}{d\tau_R}, \quad (10.6.3)$$

در هر مورد $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$ است. در وضعیت ما این مقدار به $c^2 = g_{..}(u^\cdot)^2$ کاهش میابد. خواهیم داشت

$$u^\cdot = \frac{c}{(g_{..})^{\frac{1}{2}}}. \quad (107.3)$$

بنابراین

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p_\cdot(B)}{p_\cdot(A)} \left(\frac{g_{..}(A)}{g_{..}(B)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (108.3)$$

اکنون یک فرض اضافی انجام می دهیم که $\partial_\cdot g_{\mu\nu} = 0$ که این یعنی p_\cdot در امتداد ژئودزیک فوتون ثابت است. پس

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(\frac{g_{..}(A)}{g_{..}(B)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (109.3)$$

که این نتیجه ای است که قبلا بدست آورده بودیم [۱].

۱۵-۳ متریک شوارتزشیلد

با جایگذاری $\theta = \frac{\pi}{4}$ در معادله (۱۱.۳) مولفه های متریک به صورت زیر بدست می آید

$$g_{tt}(r) = -f(r) = -1 + \frac{2M}{r}, \quad (110.3)$$

$$g_{\phi\phi}(r) = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (111.3)$$

$$g_{rr}(r) = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right), \quad (112.3)$$

$$g_{\theta\theta}(r) = -r^2. \quad (113.3)$$

با جایگذاری در معادله (۱۲.۲)، سرعت زاویه ای به صورت زیر بدست می آید

$$\Omega = \frac{M}{r^{\frac{3}{2}}\sqrt{M}}. \quad (114.3)$$

به همین صورت انرژی ویژه از معادله (۱۰.۲) بدست می‌آید

$$E = \frac{\sqrt{r}(-2M+r)}{\sqrt{r^2(-3M+r)}}. \quad (115.3)$$

و تکانه زاویه‌ای از معادله (۱۹.۲) خواهد بود

$$L = \frac{\sqrt{M}r^2}{\sqrt{r^2(-3M+r)}}. \quad (116.3)$$

۱۶-۳ پتانسیل موثر

با جایگذاری متریک‌های شوارتزشیلد و پارامترهای سرعت زاویه‌ای، انرژی ویژه و تکانه زاویه‌ای در معادله (۱۷.۲) پتانسیل موثر به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$V = -\frac{2((6M-r)r)}{r^{3/2}(\sqrt{r}(-3+r))(r(-2+r))}. \quad (117.3)$$

در شکل ۲-۳ مشاهده می‌شود که در $Rs = 4$ پتانسیل از بی‌نهایت شروع و با شیب تندی در $Rs = 6$ به صفر می‌رسد. سپس در مقدارهای منفی پتانسیل با شیبی کم شده و سپس با شیبی کندتر به سمت صفر برمی‌گردد و در شعاع بی‌نهایت به پتانسیل صفر می‌رسد. اسکالر کرچمن به صورت زیر تعریف می‌شود

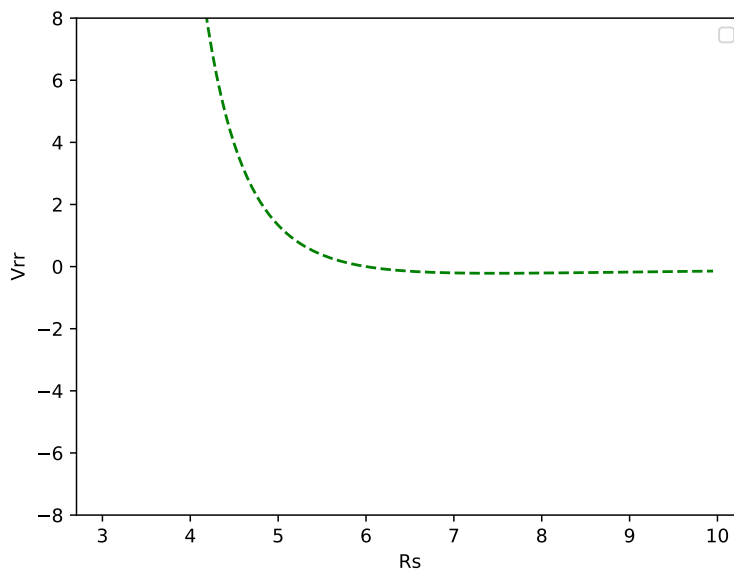
$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \Sigma^{-6} \left(\frac{\Delta}{M}\right)^{-2} g(r, \theta), \quad (118.3)$$

که در آن

$$\Sigma = r^2, \quad (119.3)$$

و

$$\Delta = r^2 - 2Mr. \quad (120.3)$$



شکل ۲-۳: تغییرات پتانسیل موثر بر حسب شعاع در سیاه‌چاله شوارتزشیلد

از رابطه فوق می‌توان دریافت که اسکالر کریچمن دارای واگرایی برای $\Sigma = 0$ است. تابع $g(r, \theta)$ تابعی است که با Δ^2 متناسب است. پس در مقدار خاص $\Delta = 0$ شعاع‌های زیر تعریف می‌شوند

$$r_{\pm} = 2M, \quad (121.3)$$

و برای حالت خاص انتقال به سرخ بی نهایت $f = 0$ شعاع‌های زیر بدست می‌آید

$$r_{s,n} = 2M. \quad (122.3)$$

و با استفاده از تعاریف شعاع‌های دیگر نیز برای حل شوارتزشیلد به صورت زیر تعریف می‌شود:
شعاع درونی‌ترین مرز مدارهای ذرات خواهد بود

$$\frac{-3}{R_{ph}} + 1 = 0, \quad (123.3)$$

$$R_{ph} = 3. \quad (124.3)$$

و شعاعی که $E = 1$ آن را تعیین می‌کند خواهد بود

$$R_{mb} = 4, \quad (125.3)$$

در آخر شعاعی که مشتق دوم مکانی پتانسیل را صفر می‌کند برابر است با

$$R_{ms} = 6, \quad (126.3)$$

جایی که

$$r \rightarrow RM \quad (127.3)$$

۱۷-۳ شار

با جایگذاری معادلات مربوط در معادله (۱۸.۲) رابطه مربوط به شار انرژی تابشی بدست می‌آید. توجه می‌شود که برای رسم نمودار شار انرژی تابشی نیز باید همانند پتانسیل، بی بعد سازی را انجام دهیم. برای بدست آوردن رابطه (۱۸.۲) ابتدا معادله زیر را بدست می‌آوریم

$$L_{,R}(E - \Omega L) = \frac{R(R - 6)}{2R^{3/2}(R - 3)}. \quad (128.3)$$

در شکل ۳-۳ مشاهده می‌شود که در ابتدا شار انرژی تابشی با شیبی تند، صعودی است و در زمانی که به مقدار بیشینه خود در شعاع ۱۰ می‌رسد و سپس با شیبی کند تر از صعود، نزول می‌کند تا به مقدار صفر برسد.

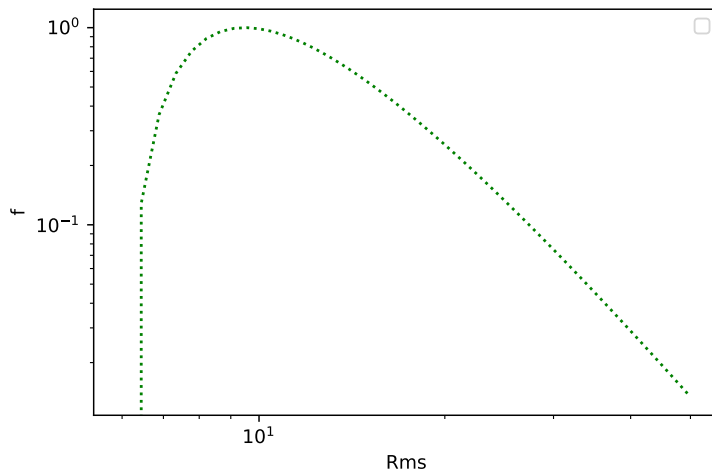
۱۸-۳ دما

همانگونه که در قیل بحث شد، دما بر حسب شار انرژی تابشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

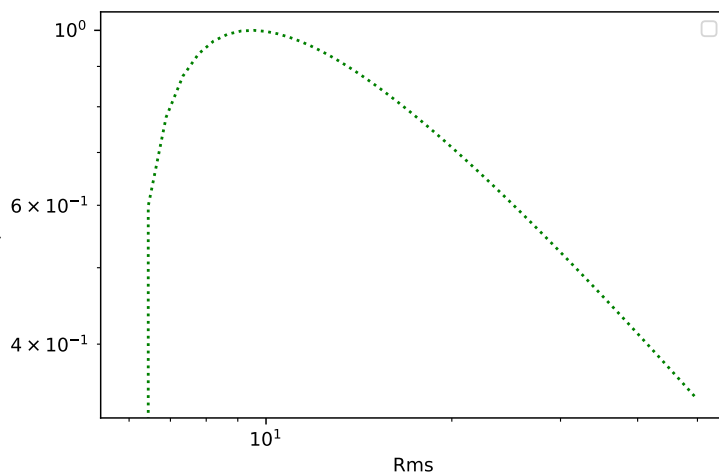
$$T^4 = \frac{F}{\sigma_{SB}} \quad (129.3)$$

حال می‌توان نمودار تغییرات دما را رسم کرد.

در شکل ۳-۴ مشاهده می‌شود که در ابتدا دما با شیبی تند، صعودی است و در زمانی که به مقدار بیشینه خود در شعاع ۱۰ می‌رسد و سپس با شیبی کند تر از صعود، نزول می‌کند تا به مقدار صفر برسد.



شکل ۳-۳: تغییرات شار انرژی تابشی بر حسب شعاع در سیاهچاله شوارتزشیلد

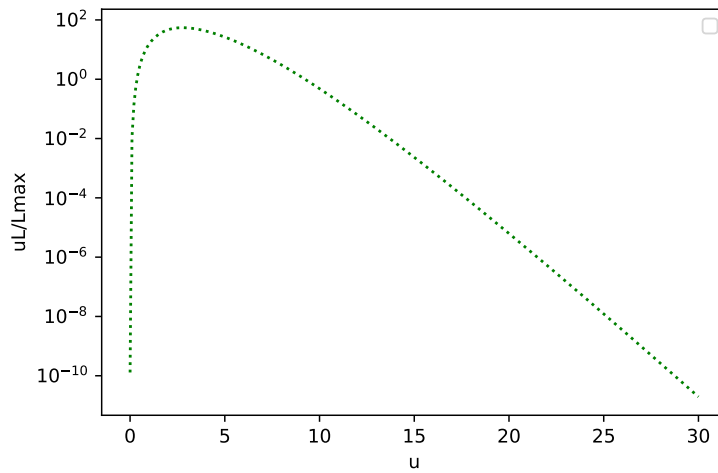


شکل ۳-۴: تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاهچاله شوارتزشیلد

۳-۱۹ درخشندگی

رابطه مربوط به درخشندگی در معادله (۱۹.۲) نوشته شده است. ابتدا معادله (۲۰.۲) را باز نویسی می‌کنیم

$$1 + z = \frac{R^{3/2}}{\sqrt{R^2(R-3)}} \quad (۱۳۰.۳)$$



شکل ۵-۳: تغییرات درخشندگی بر حسب u در سیاه‌چاله شوارتزشیلد

حال نمودار تغییرات درخشندگی بر حسب u را رسم می‌کنیم.

همانگونه که در شکل ۵-۳ مشاهده می‌شود برای بهنجار سازی نمودار درخشندگی بر بیشینه درخشندگی بر حسب u رسم شده است. درخشندگی ابتدا با شیب بسیار تندی شروع شده تا به مقدار بیشینه خود می‌رسد. سپس با شیبی نسبتاً کند، درخشندگی کاهش یافته و در شعاع ۳۰ به مقدار صفر می‌رسد.

فصل ۴

حل کر

۴-۱ مقدمه

در سیاهچاله شوارتزشیلد ما جرم مرکزی را بدون چرخش در نظر گرفته بودیم. اما می‌دانیم که اکثر احرام اختر فیزیکی در حال چرخش هستند. روی کر، برای نخستین بار در سال ۱۹۶۳ سیاهچاله‌ای را در نظر گرفت که جرم مرکزی آن در حال چرخش است. در این مورد علاوه بر جرم پارامتر تکانه زاویه‌ای نیز برای توصیف اینگونه سیاهچاله مورد نیاز است. به این سیاهچاله‌ها، سیاهچاله‌های چرخان می‌گویند. متریک کر، توصیف کننده هندسه ی فضازمان در خارج از یک جسم چرخان است.

۴-۲ متریک

در حل شوارتزشیلد متریک برای جرم مرکزی بدون چرخش بدست آمد. حال می‌خواهیم برای یک جرم مرکزی چرخان متریک را بدست آوریم. برای راحتی مختصات (t, r, θ, ϕ) به مختصات (x^0, x^1, x^2, x^3) تبدیل می‌کنیم. متریک متقارن کروی باید مستقل از t و ϕ باشد. پس

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2), \quad (1.4)$$

جایی که x^1 و x^2 دو مختصات فضایی باقی مانده هستند.

علاوه بر این ما به عنصر خطی نیاز داریم که تحت تبدیلات زیر نیز ثابت باشد

$$t \rightarrow -t, \quad (2.4)$$

و

$$\phi \rightarrow -\phi, \quad (3.4)$$

که این یعنی جرم مرکزی دارای حرکاتی است که صرفاً چرخشی هستند. نتیجه می‌شود که

$$g_{01} = g_{02} = g_{12} = g_{23} = 0. \quad (4.4)$$

بنابراین عنصر خط باید به صورت زیر باشد

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 + (g_{11} (dx^1)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} (dx^2)^2). \quad (5.4)$$

از آنجایی که ضرایب متریک تنها به x^1 و x^2 وابسته‌اند می‌توان عبارت داخل پرانتز را مجزا در نظر گرفت. از این واقعیت که منیفولد هر دو بعدی (شبه) ریمانی کاملاً مسطح است، یعنی همیشه امکان یافتن یک سیستم مختصات وجود دارد که در آن متریک زیر شکل می‌گیرد

$$g_{ab} = \Omega^2(x) \eta_{ab}, \quad (6.4)$$

که در آن $\Omega^2(x)$ یک تابع دلخواه از مختصات است و η_{ab} ماتریس یکه (۱) و (۱-) است. پس عنصر خط (۵.۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$ds^2 = A dt^2 - B(d\phi - \omega dt)^2 - C((dx^1)^2 + (dx^2)^2), \quad (7.4)$$

که در آن (A, B, C) توابع دلخواهی از مختصات فضایی x^1 و x^2 هستند. می‌دانیم که

$$x^1 \rightarrow r, \quad (8.4)$$

و

$$x^2 \rightarrow \theta. \quad (9.4)$$

پس عنصر خط به صورت زیر در می آید

$$ds^2 = A dt^2 - B(d\phi - \omega dt)^2 - C dr^2 - D d\theta^2. \quad (10.4)$$

ما باید معادلات میدان فضای خالی را حل کنیم.

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (11.4)$$

مشخص است که معادلات انیشتین به تنهایی برای تعیین تمامی توابع مجهول کافی نیستند. برای بدست آوردن متریک کر ما باید شرایط اضافی را بر راه حل تحمیل کنیم. در حد $r \rightarrow \infty$ هندسه فضا زمان به مینکوفسکی تبدیل می شود. عنصر خط کر برای مختصات شوارتزشیلد به صورت زیر تبدیل می شود

$$ds^2 = c \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{4\mu a c r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (12.4)$$

که در آن a و μ ثابت و Δ و ρ^2 به صورت زیر تعریف می شوند

$$\Delta = r^2 - 2\mu r + a^2, \quad (13.4)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (14.4)$$

که این شکل عنصر خط بوئر لیندکوئیست است. حال مولفه زیر را تعریف می‌کنیم

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (15.4)$$

پس عنصر خط را به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} c^2 dt^2 + \frac{4\mu ar \sin^2 \theta}{\rho} c dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2. \quad (16.4)$$

که با اعمال ثابت‌ها و برخی محاسبات، عنصر خط به صورت زیر می‌شود

$$ds^2 = f dt^2 + \frac{4Mar}{\Sigma} \sin^2 \theta dt d\phi - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \times \sin^2 \theta d\phi^2 - \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right), \quad (17.4)$$

جایی که a فاکتور مقیاس، M جرم مرکزی و بقیه توابع به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$f(r, \theta) = 1 - \frac{2Mr}{\Sigma}, \quad (18.4)$$

$$\Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (19.4)$$

$$\Delta(r) = r^2 + a^2 - 2Mr. \quad (20.4)$$

با جایگذاری $\theta = \frac{\pi}{4}$ مولفه‌های متریک به صورت زیر بدست می‌آید

$$g_{tt}(r) = -f(r) = -1 + \frac{2M}{r}, \quad (21.4)$$

و

$$g_{t\phi}(r) = \frac{-2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma(r)} = -\frac{2aM}{r}, \quad (22.4)$$

و

$$g_{\phi\phi}(r) = \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma(r)} \right) = a^2 + r^2 + \frac{2a^2 M}{r}, \quad (23.4)$$

و

$$g_{rr}(r) = \frac{\Sigma(r)}{\Delta(r)} = \frac{r^2}{a^2 - 2Mr + r^2}, \quad (24.4)$$

و

$$g_{\theta\theta}(r) = \Sigma(r) = r^2. \quad (25.4)$$

با جایگذاری در معادله (۱۲.۲)، سرعت زاویه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Omega = \frac{M}{aM + r^{\frac{3}{2}}\sqrt{M}}. \quad (26.4)$$

به همین صورت انرژی ویژه نیز از رابطه (۱۰.۲) بدست می‌آید

$$E = \frac{a\sqrt{M} + \sqrt{r}(-2M + r)}{\sqrt{2a\sqrt{M}r^{\frac{3}{2}} + r^2(-3M + r)}}. \quad (27.4)$$

و تکانه زاویه‌ای از رابطه (۱۱.۲) خواهد بود [۱]

$$L = \frac{\sqrt{M} (a^2 - 2a\sqrt{M}\sqrt{r} + r^2)}{\sqrt{2a\sqrt{M}r^{\frac{3}{2}} + r^2(-3M + r)}}. \quad (28.4)$$

۳-۴ پتانسیل موثر

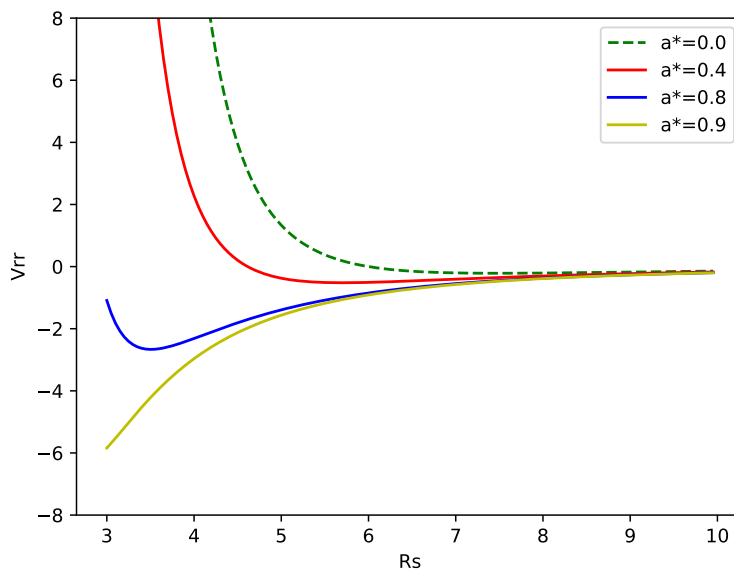
با جایگذاری مولفه‌های متریک کر و پارامترهای سرعت زاویه‌ای، انرژی ویژه و تکانه زاویه‌ای در معادله

(۱۷.۲) پتانسیل موثر به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$V = \frac{2M (3a^2 - 8a\sqrt{M}\sqrt{r} + (6M - r)r)}{r^{3/2} (2a\sqrt{M} + \sqrt{r}(-3M + r)) (a^2 + r(-2M + r))}. \quad (29.4)$$

برای رسم نمودار و تحلیل داده‌ها باید معادله بدست آمده را بی بعد کنیم. برای این منظور از

تبدیلات زیر کمک می‌گیریم



شکل ۱-۴: تغییرات پتانسیل موثر بر حسب شعاع در سیاه چاله کر

$$a \rightarrow a_* M, \quad (30.4)$$

$$r \rightarrow RM. \quad (31.4)$$

با اعمال تبدیلات بالا معادله پتانسیل موثر به صورت زیر باز نویسی می شود

$$V = -\frac{2 \left(3a_*^2 - \lambda a_* \sqrt{R} + (6M - R)R \right)}{M^2 R^{3/2} \left(2a_* + \sqrt{R}(-3 + R) \right) \left(a_*^2 + R(-2 + R) \right)}, \quad (32.4)$$

با تقسیم پتانسیل بر مربع جرم، جرم از معادله حذف می شود. حال نمودار تغییرات پتانسیل بر حسب شعاع را برای مقادیر مختلف a_* را رسم می کنیم.

در شکل ۱-۴ مشاهده می شود که در $a_* = 0$ و $a_* = 0.4$ پتانسیل از بی نهایت شروع و با شیب تندی به صفر می رسد. سپس در مقدارهای منفی پتانسیل با شیبی کند کم شده و سپس با شیبی کندتر به سمت صفر برمی گردد و در شعاع بی نهایت به پتانسیل صفر می رسد.

در $a_* = 0.8$ پتانسیل از منفی شرو به حرکتی نزولی با شیبی نسبتاً تند می‌شود و سپس با رسیدن به نقطه کمینه خود با شیبی کند به سمت صفر حرکت می‌کند و در بی نهایت به صفر می‌رسد. در $a_* = 0.9$ پتانسیل از عددی حدود (-6) شروع می‌کند و با شیب ملایم زیاد شده و کم کم شیب کم می‌شود و با شیب کند به سمت بی نهایت می‌رود. اسکالر کرچمن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \Sigma^{-6} \left(\frac{\Delta}{M} \right)^{-2} g(r, \theta). \quad (33.4)$$

از رابطه فوق می‌توان دریافت که اسکالر کرچمن دارای واگرایی برای $\Sigma = 0$ است. تابع $g(r, \theta)$ تابعی است که با Δ^2 متناسب است. پس در مقدار خاص $\Delta = 0$ شعاع‌های زیر تعریف می‌شوند

$$r_{\pm} = M(1 \pm \sqrt{1 - a_*^2}) \quad (34.4)$$

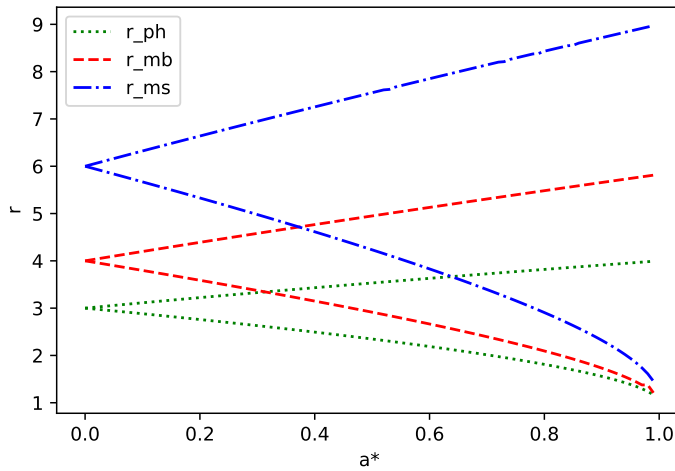
و برای حالت خاص انتقال به سرخ بی نهایت $f = 0$ شعاع‌های زیر بدست می‌آید

$$r_{s,n} = M(1 \pm \sqrt{1 - a_*^2 \cos^2 \theta}). \quad (35.4)$$

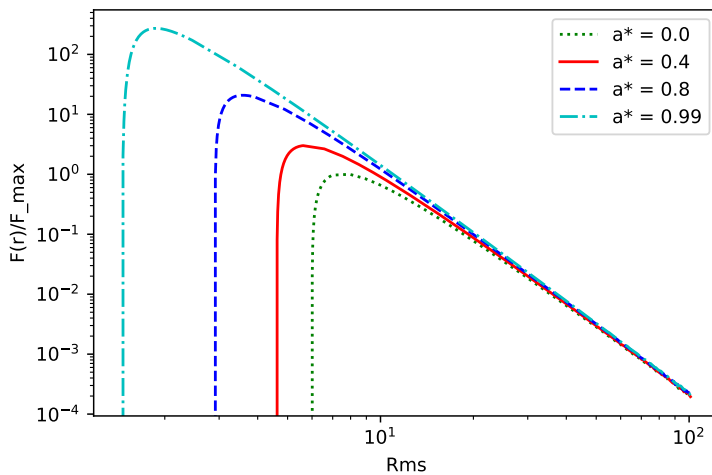
و با توجه به تعاریف R_{ms} ، R_{ph} ، R_{mb} نمودار زیر را رسم می‌کنیم. در شکل ۲-۴ مشاهده می‌شود هر سه نمودار R_{ms} ، R_{ph} ، R_{mb} دو نمودار مثبت و منفی دارند که نمودار مثبت صعودی و نمودار نزولی است. بیشترین نقطه شروع برای R_{ms} (۶) و کمترین آن برای R_{ph} (۳) است. نمودار مثبت با افزایش a_* افزایش می‌یابد. بیشترین شیب صعودی برای R_{ms} و کمترین آن برای R_{ph} است. نمودارهای منفی نیز نزول می‌کنند که بیشترین و کمترین شیب مانند نمودار مثبت است.

۴-۴ شار

با جایگذاری معادلات مربوط در معادله (۱۸.۲) رابطه مربوط به شار انرژی تابشی بدست می‌آید. توجه می‌شود که برای رسم نمودار شار انرژی تابشی نیز باید همانند پتانسیل، بی بعد سازی را انجام دهیم. برای بدست آوردن رابطه (۱۸.۲) ابتدا معادله زیر را بدست می‌آوریم.



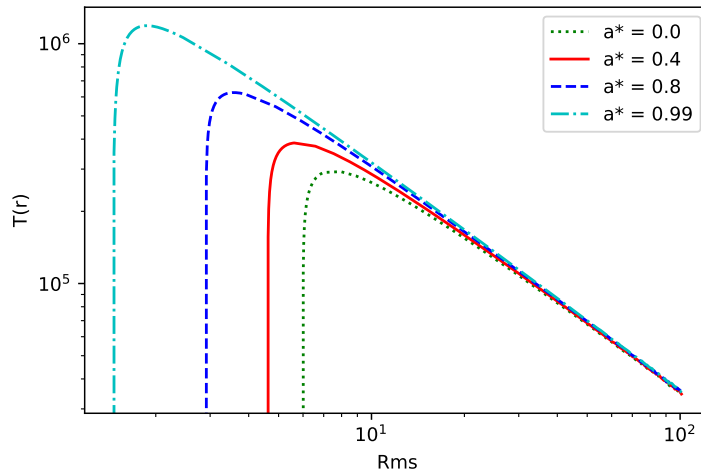
شکل ۲-۴: تغییرات شعاع‌های مختلف بر a_* در سیاه‌چاله کر



شکل ۳-۴: تغییرات شار انرژی تابشی بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کر

$$L_{,r}(E - \Omega L) = \frac{-3a_*^2 + \lambda a_* \sqrt{R} + R(R - 6)}{4a_* R + 2R^{3/2}(R - 3)}. \quad (36.4)$$

مشاهده می‌شود که در معادله بالا بی بعد سازی صورت گرفته است. حال نمودار رسم می‌شود. در شکل ۳-۴ مشاهده می‌شود که در ابتدا شار انرژی تابشی برای تمامی a_* ها با شیبی تند، صعودی است و در زمانی که به مقدار بیشینه خود می‌رسد و سپس با شیبی کند تر از صعود، نزول



شکل ۴-۴: تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کر

می‌کند تا به مقدار صفر برسد. هر چه مقدار a_* بیشتر باشد، نمودار از مقدار اولیه کوچکتری آغاز می‌شود و مقدار ماکزیمم بیشتری خواهد داشت.

۴-۵ دما

همانگونه که در قبیل بحث شد، دما بر حسب شار انرژی تابشی به صورت زیر تعریف می‌شود

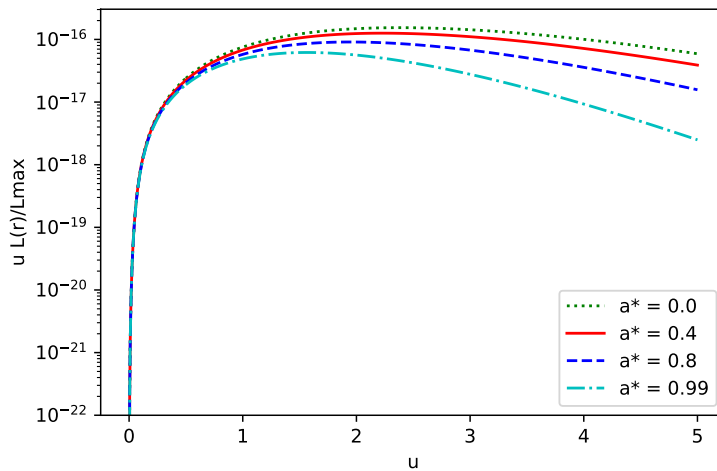
$$T^4 = \frac{F}{\sigma_{SB}}. \quad (37.4)$$

حال می‌توان نمودار تغییرات دما را رسم کرد.

در شکل ۴-۴ مشاهده می‌شود که در ابتدا دما برای تمامی a_* ها با شیبی تند، صعودی است و در زمانی که به مقدار بیشینه خود می‌رسد و سپس با شیبی کند تر از صعود، نزول می‌کند تا به مقدار صفر برسد. هر چه مقدار a_* بیشتر باشد، نمودار از مقدار اولیه کوچکتری آغاز می‌شود و مقدار ماکزیمم بیشتری خواهد داشت.

۴-۶ درخشندگی

رابطه مربوط به درخشندگی در معادله (۱۹.۲) نوشته شده است. ابتدا معادله ۲۰.۲ را باز نویسی می‌کنیم



شکل ۴-۵: تغییرات درخشندگی بر حسب u در سیاه‌چاله کر

$$1 + z = \frac{a_* + R^{3/2}}{\sqrt{2a_*R^{3/2} + R^2(R-3)}} \quad (38.4)$$

حال نمودار تغییرات درخشندگی بر حسب u را رسم می‌کنیم.

همانگونه که در شکل ۴-۵ مشاهده می‌شود برای بهنجار سازی نمودار درخشندگی بر بیشینه درخشندگی بر حسب u رسم شده است. درخشندگی برای تمامی a_* ها ابتدا با شیب بسیار تندی شروع شده تا به مقدار بیشینه خود می‌رسد. سپس با شیبی نسبتاً کند، درخشندگی کاهش می‌یابد. مشاهده می‌شود که a_* های بزرگتر، بیشینه بزرگتری دارند و دیرتر به مقدار کمینه خود می‌رسند. البته در $a_* = 0.99$ در مقدار بیشینه نمودار با شیب بیشتری نزول می‌کند و زودتر به مقدار کمینه می‌رسد.

۴-۷ نتیجه گیری

در این فصل با تغییر متریک استاتیک شوارتزشیلد به متریک چرخان کر سعی شد پارامترهای مورد بحث را بدست آورده و با حالت استاتیک قبلی مقایسه شود. مشاهده شد که با چرخان شدن جسم مرکزی سیاه‌چاله چه تفاوت‌هایی در پارامترها و رفتار آنان ایجاد می‌شود.

همچنین مشاهده شد که می‌توان حدهایی یافت که در آن هر دو سیاه‌چاله شوارتزشیلد و کر رفتار یکسانی نشان دهند. مشاهده شد که مقدار خاص $a_* = 0$ چنین حدی برای سیاه‌چاله کر می‌باشد. حال به سراغ بررسی سیاه‌چاله کیسلیف می‌رویم و آن را با سیاه‌چاله کر مقایسه خواهیم کرد.

فصل ۵

حل کیسلیف

۵-۱ مقدمه

مشاهدات نجومی اخیر نشان می‌دهد که کیهان، به طور شتاب‌دار در حال انبساط است که دلالت بر حالت فشار منفی دارد. علت این فشار می‌تواند دو چیز باشد. اولی ثابت کیهانی است، در حالی که دومی به با ذات معادله حالت داده شده توسط رابطه بین فشار p_q و چگالی انرژی ρ_q بطوری که $p_q = \omega_q \rho_q$ که $-\frac{1}{3} < \omega_q < -1$ است، بدست می‌آید. مورد مرزی $\omega_q = -1$ ثابت کیهانی را پوشش می‌دهد.

ما معادلات انیشتین را برای ماهیت ایستا کروی متقارن که یک سیاه‌چاله را احاطه کرده بررسی و به دقت حل می‌کنیم تا پارامتر آزاد خاصی را که ذات تانسور انرژی تکانه T_{μ}^{ν} را مشخص می‌کند بیابیم. عنصر خط یک سیاه‌چاله کیسلیف در حال چرخش را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr + \alpha r^{1-3\omega_q}}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + 2a \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr + \alpha r^{1-3\omega_q}}{\Sigma}\right) \times d\phi dt + \Sigma d\theta^2 - \sin^2 \theta \left[r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr + \alpha r^{1-3\omega_q}}{\Sigma}\right) \right] d\phi^2, \quad (1.5)$$

جایی که $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 - \alpha r^{1-3\omega_q}$ و $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ که M جرم مرکزی و a فاکتور مقیاس است.

شرط تعیین کننده افق رویداد به صورت زیر است

$$g^{rr} = 0, \quad (2.5)$$

که یعنی

$$\Delta = 0. \quad (3.5)$$

بدین صورت افق‌های رویداد این سیاه‌چاله با حل معادله زیر بدست می‌آید

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 - \alpha r^{1-3\omega_q} = 0. \quad (4.5)$$

تبدیل $\alpha = M^{1+3\omega_q}$ را اعمال می‌کنیم

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 - M^{1+3\omega_q} r^{1-3\omega_q} = 0. \quad (5.5)$$

با حل معادله بالا برای مقادیر مختلف ω_q می‌توانیم افق‌های رویداد را بدست آوریم [3].

۲-۵ متریک کیسلیف

صورت عمومی عنصر خط به صورت زیر تعریف شده است

$$ds^2 = g_{tt}c^2 dt^2 + 2g_{t\phi}cdtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (6.5)$$

که با جایگذاری متریک‌ها در حل کیسلیف به صورت زیر می‌شود [5]

$$ds^2 = + \left(1 - \frac{2Mr + \alpha r^{1-3\omega_q}}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + 2a \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr + \alpha r^{1-3\omega_q}}{\Sigma}\right) \times d\phi dt - \Sigma d\theta^2 - \sin^2 \theta \left[r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2Mr + \alpha r^{1-3\omega_q}}{\Sigma}\right) \right] d\phi^2, \quad (7.5)$$

جایی که a فاکتور مقیاس، M جرم مرکزی و بقیه توابع به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 - \alpha r^{1-3\omega_q}, \quad (8.5)$$

و

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (9.5)$$

با جایگذاری $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $\alpha = M^{1+3\omega_q}$ مولفه‌های متریک به صورت زیر بدست می‌آید

$$g_{tt}(r) = -\left(1 - \frac{2Mr + M^{1+3\omega_q} r^{1-3\omega_q}}{\Sigma}\right), \quad (10.5)$$

$$g_{t\phi}(r) = -a \sin^2 \theta \frac{2Mr + M^{1+3\omega_q} r^{1-3\omega_q}}{\Sigma}, \quad (11.5)$$

$$g_{\phi\phi}(r) = \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2Mr + M^{1+3\omega_q} r^{1-3\omega_q}}{\Sigma} \right), \quad (12.5)$$

$$g_{rr}(r) = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad (13.5)$$

$$g_{\theta\theta}(r) = \Sigma. \quad (14.5)$$

حال پارامترها را برای دو مقدار $\omega_q = -0.4$ و $\omega_q = -0.2$ محاسبه می‌کنیم.

۳-۵ پارامترهای مورد نیاز

برای بی بعد سازی از تبدیلات زیر کمک می‌گیریم

$$a \rightarrow a_* M, \quad (15.5)$$

$$r \rightarrow RM. \quad (16.5)$$

با جایگذاری در معادله (۱۲.۲)، سرعت زاویه‌ای برای $\omega_q = -0.2$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Omega = \frac{a_*(-1 - 0.2R^{1/6}) + 0.707107\sqrt{0.4 + \frac{2}{R^{1/6}}R^{1/8}}}{a_*^2(-1 - 0.2R^{1/6}) + R^3}. \quad (17.5)$$

و برای $\omega_q = -0.4$ خواهد بود

$$\Omega = \frac{0.707107\sqrt{-0.2 + \frac{2}{R^{1/2}}R^{1/4}} + a_*(-1 + 0.1R^{1/2})}{R^3 + a_*^2(-1 + 0.1R^{1/2})}. \quad (18.5)$$

به همین صورت انرژی ویژه برای $\omega_q = -0.2$ از معادله (۱۰.۲) نیز بدست می‌آید

$$E = \left(a_*^2(2R^{1/2} + 0.4R^{1/8}) - a_*\sqrt{0.8 + \frac{4}{R^{1/6}}(R^{1/6})} + (4R^{1/2} - 2R^{3/2}) \right) \times \left(R^{1/2}\sqrt{4a_*^2\sqrt{0.8 + \frac{4}{R^{1/6}}(R^{1/8})} + a_*^2(-12R - 12R^2) + A} \right)^{-1}, \quad (19.5)$$

که

$$A = -0.96R^{1/2} - 2/4R^{1/6} + 12a_*\sqrt{0.8 + \frac{4}{R^{1/6}}(R^{1/8})} + 0.4R^{3/4} - 12R^6 - 4/8R^{4/6} + 4R^5. \quad (20.5)$$

و برای $\omega_q = -0.4$ خواهد بود

$$E = \left(a_*^2(R^{1/2} - 0.1R^{1/4}) - a_*\sqrt{-0.4 + \frac{4}{R^{1/2}}(R^{1/2})} + 2R^{1/2} + R^{3/4} \right) \times \left[R^{1/6}\sqrt{a_*^2\sqrt{-0.4 + \frac{4}{R^{1/2}}(R^{1/2} - 0.1R^{1/4})} + a_*^2 + B} \right]^{-1}, \quad (21.5)$$

که در آن

$$B = (-3R^{1/4} - 3R^{1/4} + 0.3R^{3/2} + 0.09R^{3/5}) + 3a_*\sqrt{-0.4 + \frac{4}{R^{1/2}}} \times (R^{1/2} + 0.3R^{4/4}) - 3R^{4/4} + R^{5/4} - 0.9R^{5/3}. \quad (22.5)$$

و تکانه زاویه‌ای برای $\omega_q = -0.2$ از رابطه (۱۱.۲) خواهد بود

$$L = \left(\frac{1}{4} 1421 R^f \sqrt{\frac{2}{R^{0.6}} + C_0} \right) \times \left[R^{0.7} \sqrt{4 a_*^2 \sqrt{\frac{4}{R^{0.6}} (R^{0.8} + 0.2 R^{0.4})} + C} \right]^{-1}, \quad (23.5)$$

که در آن

$$C_0 = a_*^2 \sqrt{\frac{2}{R^{0.6}} (-2.82843 R - \frac{1}{4} 1421 R^{0.6} - \frac{1}{4} 1421 R^2)} + a_* (6 R^{0.2} + \frac{2}{4} R^{0.8}), \quad (24.5)$$

و

$$C = a_*^2 (-12 R - 7.2 R^{0.6} - 12 R^2 - \frac{2}{4} R^{0.6}) + 12 a_* \sqrt{\frac{4}{R^{0.6}}} \times (R^{0.8} + \frac{0.4}{4} R^{0.4}) - 12 R^f - \frac{4}{8} R^{0.6} + 4 R^5. \quad (25.5)$$

و برای $\omega_q = -0.4$ خواهد بود

$$L = \left(-0.7 \sqrt{-0.2 + \frac{2}{R^{0.8}} R^{0.1}} - a_*^2 (0.1 R^{0.2}) + a_*^2 \sqrt{-0.2 + \frac{2}{R^{0.8}} D} \right) \times \left[R^{0.65} \sqrt{a_*^2 \sqrt{-0.4 + \frac{4}{R^{0.2}} (R^{0.2})} + a_*^2 (-3 R^{0.1} - 3 R^{0.1})} + D \right]^{-1}, \quad (26.5)$$

که در آن

$$D = (-\frac{1}{4} 14 R^{0.1} - 0.7 \cdot 0.7 R^{0.1} - 0.7 \cdot 0.7 R^{0.2}) + a_* (3 R^2 + 0.9 R^{0.2}), \quad (27.5)$$

و

$$D = -0.6 R^{0.2} + 0.3 R^{0.2} + 0.09 R^{0.5} + 3 a_* \sqrt{-0.4 + \frac{4}{R^{0.2}}} \times (R^{0.2} + \frac{0.3}{4} R^{0.4}) - 3 R^{0.1} + R^{0.1} - 0.9 R^{0.2}. \quad (28.5)$$

۴-۵ پتانسیل موثر

با جایگذاری مولفه‌های متریک کر و پارامترهای سرعت زاویه‌ای، انرژی ویژه و تکانه زاویه‌ای در معادله (۱۷.۲) پتانسیل موثر برای $\omega_q = -0.2$ به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$V = (a_*^f(-1.0R^{3/6} - 3/6R^{f/4} - 0.32R^5) + a_*^r + E. + E) \times \left[R^{f/8}(a_*^y - R^{1/6}) \left(-1/667a_*^r \sqrt{0.8 + \frac{0.4}{R^{1/6}}}(R^{1/8} + 0.2R^{1/2}) + F \right) \right]^{-1}, \quad (29.5)$$

که در آن

$$E. = \sqrt{0.8 + \frac{0.4}{R^{1/6}}}(13/33R^{f/6} + 5/33R^{5/2} + 1.0R^{5/6} + 1/6R^{6/2}) + a_*^y(-2.0R^{f/8} - 14/8R^{5/4} - 5.0R^{5/8} - 3/76R^6), \quad (30.5)$$

و

$$E = -19/6R^{2/4} - 1.0R^{2/8} - 1/9R^y - 1/6R^{y/4} + a_* \sqrt{0.8 + \frac{0.4}{R^{1/6}}}(2.0R^{2/6} + 1.0R^{y/6} + 1/6R^{y/8} + 1/6R^{y/2}) - 2.0R^{y/8} - 1/6R^9, \quad (31.5)$$

و

$$F = (5R + 3R^{1/6} + 5R^2 + R^{2/6}) - 5a_* \sqrt{0.8 + \frac{0.4}{R^{1/6}}}(R^{2/8} + 0.4R^{2/4}) + 5R^f + 2R^{f/6} - 1/66667R^5 + a_*^y. \quad (32.5)$$

و برای $\omega_q = -0.4$ خواهد بود

$$V = \left(-2 \left(3a_*^f R^{1/8} \left(0.24 + \frac{4}{R^{1/4}} - \frac{0.64}{R^{1/2}} \right) + 24R^{y/4} + G + H + I \right) \right) \times \left[R^r \left(R - \frac{a_*^y + R(R-2)}{R^{1/2}} \right) (J. + J) \right]^{-1}, \quad (33.5)$$

که در آن

$$G = -4R^{3/4} - 0.96R^{3/6} - 6a_*R^{3/9} \sqrt{-0.4 \frac{4}{R^{1/2}} (-0.12 + \frac{4}{R^{3/4}} - \frac{0.16}{R^{1/2}})} + 0.88R^{4/6} - 0.72R^{4/8}, \quad (34.5)$$

و

$$H = -2a_*^3 R^{1/9} \sqrt{-0.4 \frac{4}{R^{1/2}} (0.8 + \frac{-1/6 - 0.33R}{R^{1/2}} + \frac{8 + 6R}{R^{3/4}})} + 3a_*^2 R^2 (0.024 + \frac{-0.208 + 0.184R}{R^{1/2}}), \quad (35.5)$$

و

$$I = \frac{-1/12 + (-3/84 - 0.24R)R}{R^{2/4}} + \frac{8 + 4R(5 + R)}{R^{3/6}}, \quad (36.5)$$

و

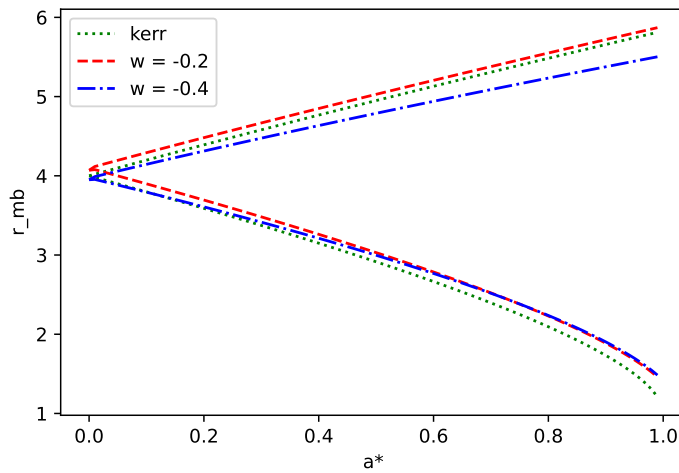
$$J = \frac{2a_*^2 (-0.2 + \frac{2}{R^{1/2}}) \sqrt{-0.4 \frac{4}{R^{1/2}}}}{R^{1/4}}, \quad (37.5)$$

و

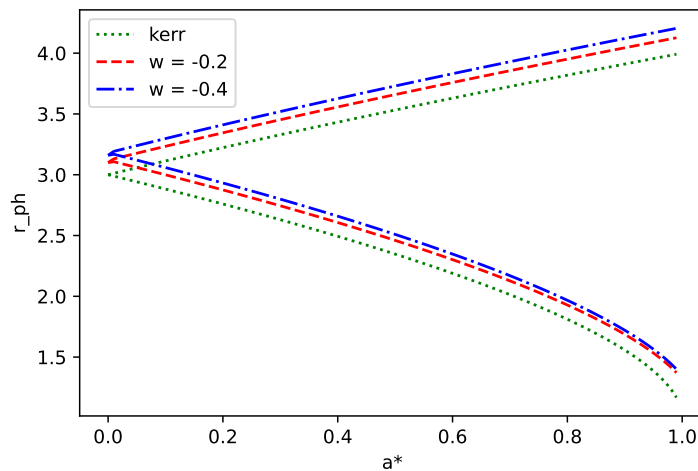
$$J = +4R^{1/6}(R - 3) + 6a_*R^{1/9} (0.6 + \frac{2}{R^{1/2}}) \sqrt{-0.4 \frac{4}{R^{1/2}}} - 3/6 R^{2/8} - 3a_*^2 (-0.2 + \frac{2}{R^{1/2}}) R (0.6 + \frac{2(R+1)}{R^{1/2}}). \quad (38.5)$$

با توجه به تعاریف R_{ms} و R_{ph} ، R_{mb} نمودارهای این سه شعاع را رسم می‌کنیم. همانگونه که در شکل ۱-۵ مشاهده می‌شود تمامی سه حالت برای مقدار مثبت خود با افزایش a_* نمودار صعودی و برای منفی خود با افزایش آن شعاع نزولی می‌باشد. برای $\omega_q = -0.2$ در مقایسه کر، نمودار برای هر دو مقدار مثبت و منفی از نقطه بالاتری شروع می‌شوند و با شیب کندتری صعود و نزول می‌کنند. برای $\omega_q = -0.4$ نیز با وجود اینکه نمودار نقطه شروع پایین تری از هر دو دارد اما با شیب کندتری نزول و صعود می‌کند. نمودار منفی دو مقدار ω_q در حدود $a_* =$ بهم می‌رسند.

همانگونه که در شکل ۲-۵ مشاهده می‌شود تمامی سه حالت برای مقدار مثبت خود با افزایش a_* نمودار صعودی و برای منفی خود با افزایش آن شعاع نزولی می‌باشد. برای $\omega_q = -0.2$ در مقایسه

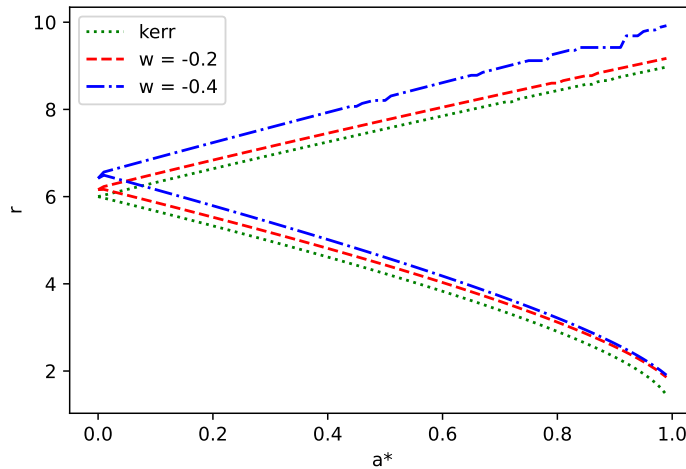


شکل ۱-۵: تغییرات شعاع R_{mb} برحسب a_* در سیاه‌چاله کیسلیف



شکل ۲-۵: تغییرات شعاع R_{ph} برحسب a_* در سیاه‌چاله کیسلیف

کر، نمودار برای هر دو مقدار مثبت و منفی از نقطه بالاتری شروع می‌شوند و با شیب تقریباً یکسان صعود و نزول می‌کنند. برای $\omega_q = -0.4$ نیز با وجود اینکه نمودار نقطه شروع بالاتری از هر دو دارد اما با شیب تندتری نزول و صعود می‌کند. نمودار منفی دو مقدار ω_q در حدود $a_* =$ بهم می‌رسند. همانگونه که در شکل ۳-۵ مشاهده می‌شود تمامی سه حالت برای مقدار مثبت خود با افزایش a_* نمودار صعودی و برای منفی خود با افزایش آن شعاع نزولی می‌باشد. برای $\omega_q = -0.2$ در مقایسه کر، نمودار برای هر دو مقدار مثبت و منفی از نقطه بالاتری شروع می‌شوند و با شیب تقریباً یکسان



شکل ۳-۵: تغییرات شعاع R_{mb} بر حسب a_* در سیاه‌چاله کیسلیف

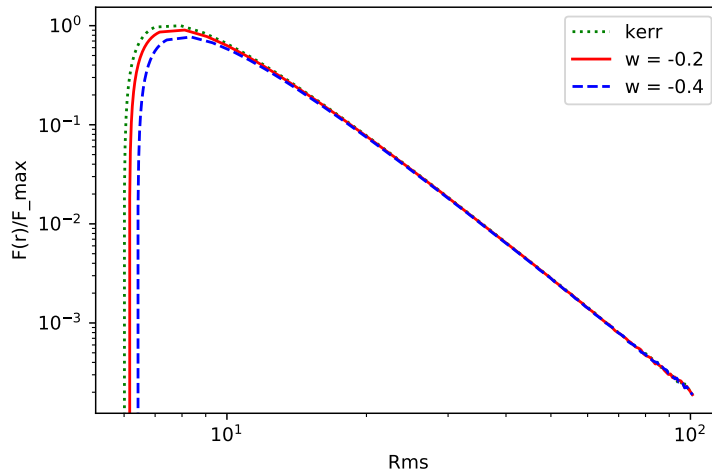
صعود و نزول می‌کنند. برای $\omega_q = -0.4$ نیز با وجود اینکه نمودار نقطه شروع بالاتری از هر دو دارد اما با شیب تندتری نزول و صعود می‌کند. نمودار منفی دو مقدار ω_q در حدود $a_* = 0.4$ بهم می‌رسند.

۵-۵ شار

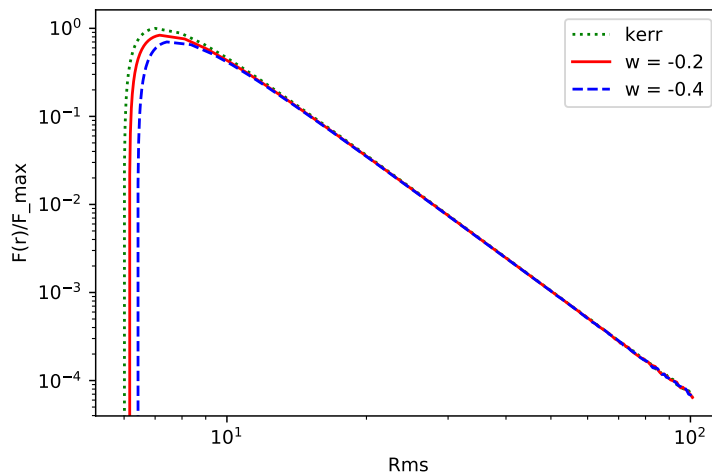
با جایگذاری معادلات مربوط در معادله ۱۹.۲ رابطه مربوط به شار انرژی تابشی بدست می‌آید. توجه می‌شود که برای رسم نمودار شار انرژی تابشی نیز باید همانند پتانسیل، بی بعد سازی را انجام دهیم. حال نمودار تغییرات شار بر حسب شعاع را برای مقادیر مختلف $a_* = 0.1$ ، $a_* = 0.4$ و $a_* = 0.99$ و برای کر و دو مقدار $\omega_q = -0.2$ و $\omega_q = -0.4$ رسم می‌کنیم.

همانگونه که در شکل ۵-۴ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش شعاع با شیب بسیار تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به شار اولیه بازگردند. مشاهده می‌شود که در $\omega_q = -0.2$ نمودار شعاع اولیه بیشتری نسبت به کر دارد و نقطه بیشینه کوچکتری دارد اما شیب آن تقریباً یکسان است. دیگر نمودار نیز همچنین است. مقدار اولیه بیشتر از قبلی و بیشینه کوچکتری دارد با شیب تقریبی یکسان با دو نمودار دیگر که رسم شده است.

همانگونه که در شکل ۵-۵ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش شعاع با شیب بسیار تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به شار اولیه بازگردند. مشاهده می‌شود که در $\omega_q = -0.2$ نمودار شعاع اولیه بیشتری نسبت به کر دارد و نقطه بیشینه کوچکتری دارد اما شیب آن تقریباً یکسان است. دیگر نمودار نیز همچنین است. مقدار اولیه بیشتر از

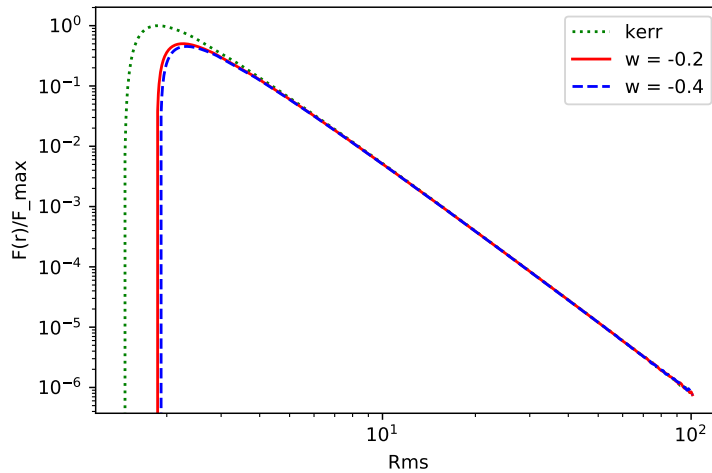


شکل ۴-۵: تغییرات شار بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0$



شکل ۵-۵: تغییرات شار بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0.4$

قبلی و بیشینه کوچکتری دارد با شیب تقریبی یکسان با دو نمودار دیگر که رسم شده است. همانگونه که در شکل ۵-۶ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش شعاع با شیب بسیار تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به شار اولیه بازگردند. مشاهده می‌شود که در $w_q = -0.2$ نمودار شعاع اولیه بیشتری نسبت به کر دارد و نقطه بیشینه کوچکتری دارد اما شیب آن تقریباً یکسان است. دیگر نمودار نیز همچنین است. مقدار اولیه بیشتر از قبلی و بیشینه کوچکتری دارد با شیب تقریبی یکسان با دو نمودار دیگر که رسم شده است. تفاوت دو



شکل ۶-۵: تغییرات شار بر حسب شعاع در سیاهچاله کیسلیف به ازای $a_* = 0.99$

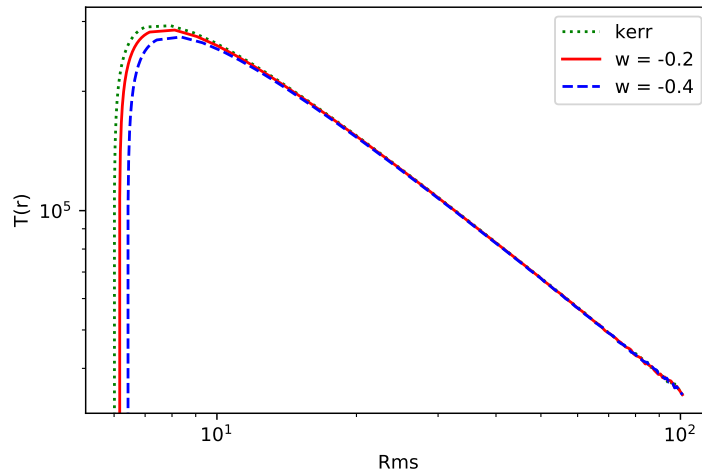
نمودار مربوط به سیاهچاله کیسلیف بسیار اندک است اما در مقایسه با دو نمودار قبلی، تفاوت بیشتری با کر دارند.

۶-۵ دما

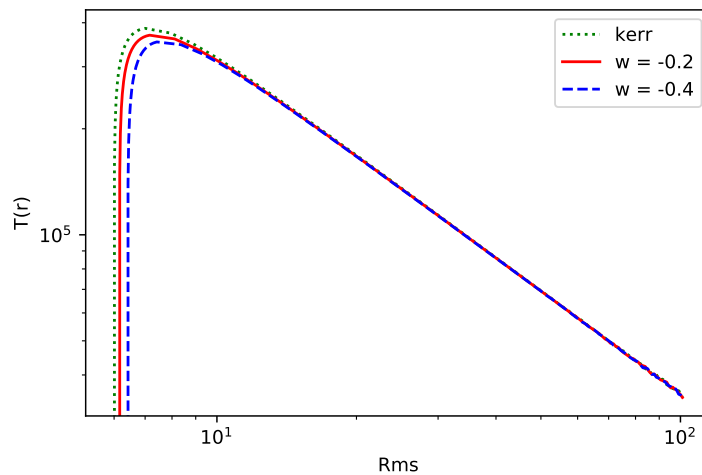
همانگونه که در قبل بحث شد، دما بر حسب شار انرژی تابشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^4 = \frac{F}{\sigma_{SB}} \quad (39.5)$$

حال نمودار تغییرات پتانسیل بر حسب شعاع را برای مقادیر مختلف $a_* = 0.1$ ، $a_* = 0.4$ و $a_* = 0.99$ و برای $\omega_q = -0.2$ و $\omega_q = -0.4$ رسم می‌کنیم. همانگونه که در شکل ۷-۵ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش شعاع با شیب بسیار تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به شار اولیه بازگردند. مشاهده می‌شود که در $\omega_q = -0.2$ نمودار شعاع اولیه بیشتری نسبت به کر دارد و نقطه بیشینه کوچکتری دارد اما شیب آن تقریباً یکسان است. دیگر نمودار نیز همچنین است. مقدار اولیه بیشتر از قبلی و بیشینه کوچکتری دارد با شیب تقریبی یکسان با دو نمودار دیگر که رسم شده است. همانگونه که در شکل ۸-۵ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش شعاع با شیب بسیار تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به شار اولیه بازگردند.

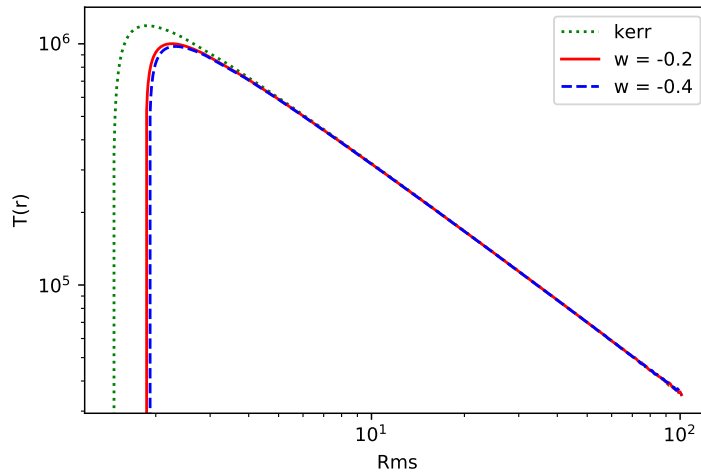


شکل ۷-۵: تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0$



شکل ۸-۵: تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0.4$

مشاهده می‌شود که در $\omega_q = -0.2$ نمودار شعاع اولیه بیشتری نسبت به کر دارد و نقطه بیشینه کوچکتری دارد اما شیب آن تقریباً یکسان است. دیگر نمودار نیز همچنین است. مقدار اولیه بیشتر از قبلی و بیشینه کوچکتری دارد با شیب تقریبی یکسان با دو نمودار دیگر که رسم شده است. همانگونه که در شکل ۹-۵ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش شعاع با شیب بسیار تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به شار اولیه بازگردند. مشاهده می‌شود که در $\omega_q = -0.2$ نمودار شعاع اولیه بیشتری نسبت به کر دارد و نقطه بیشینه



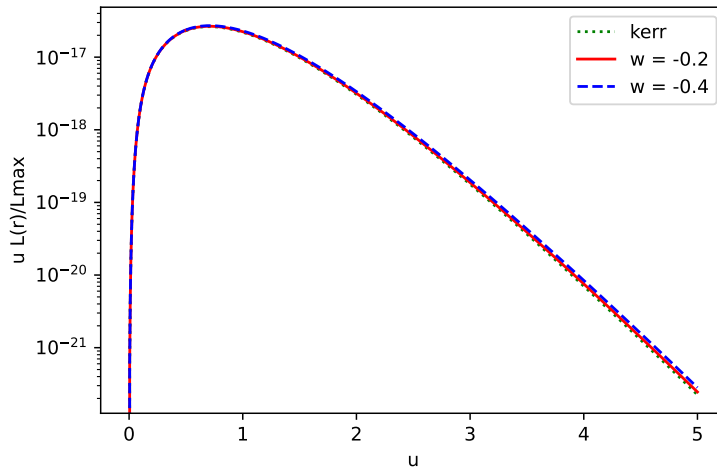
شکل ۹-۵: تغییرات دما بر حسب شعاع در سیاهچاله کیسلیف به ازای $a_* = 0.99$

کوچکتری دارد اما شیب آن تقریباً یکسان است. دیگر نمودار نیز همچنین است. مقدار اولیه بیشتر از قبلی و بیشینه کوچکتری دارد با شیب تقریبی یکسان با دو نمودار دیگر که رسم شده است. تفاوت دو نمودار مربوط به سیاهچاله کیسلیف بسیار اندک است اما در مقایسه با دو نمودار قبلی، تفاوت بیشتری با کر دارند.

۵-۷ درخشندگی

رابطه مربوط به درخشندگی در معادله ۱۹.۲ نوشته شده است. ابتدا معادله ۲۰.۲ را برای $\omega_q = -0.2$ باز نویسی می‌کنیم

$$1 + z = (-5R^f + a_*^2(5R + R^{1/6})) \times \left[\sqrt{+25R^8 + 35/3553a_*^2 \sqrt{0.4 + \frac{2}{R^{0.6}}(R^{2/8} + 0.2R^{6/6})} + K} \right]^{-1}, \quad (40.5)$$



شکل ۱۰-۵: تغییرات درخشندگی بر حسب ν در سیاهچاله کیسلیف به ازای $a_* = 0$

که در آن

$$K = -75R^7 - 30R^{7/6} + a_*^2(-75R^4 - 45R^{4/6} - 75R^5 - 6R^{5/2} - 15R^{5/6}) + 10.61066a_*\sqrt{0.4 + \frac{2}{R^{0.6}}(R^{5/8} + 0.4R^{6/4})}. \quad (41.5)$$

و برای $\omega_q = -0.4$ خواهد بود

$$1 + z = (10R^4 + a_*^2(-10R + R^{7/2})) \times \left[\sqrt{-300R^7 + 100R^8 - 90R^{8/2} + 141/421a_*^2 + L} \right]^{-1}, \quad (42.5)$$

که در آن

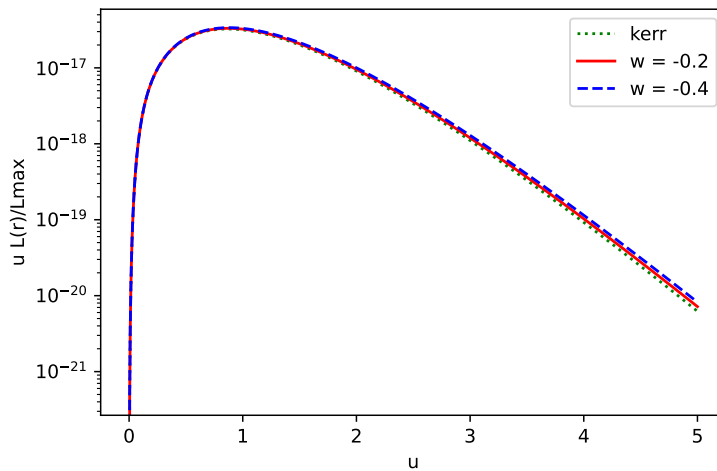
$$L = \sqrt{-0.2 + \frac{2}{R^{1/2}}(R^{4/1} + 0.1R^{5/3})} + a_*^2(-300R^5 - 60R^{5/2} + 30R^{6/2}) + 424/421a_*\sqrt{-0.2 + \frac{2}{R^{1/2}}(R^{6/1} + 0.3R^{7/3})}. \quad (43.5)$$

حال نمودار تغییرات درخشندگی بر حسب ν را برای مقادیر مختلف $a_* = 0.4$ ، $a_* = 0.1$ و $a_* = 0.99$

برای $\omega_q = -0.4$ و $\omega_q = -0.2$ رسم می‌کنیم.

همانگونه که در شکل ۱۰-۵ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش ν با شیب بسیار

تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به درخشندگی اولیه

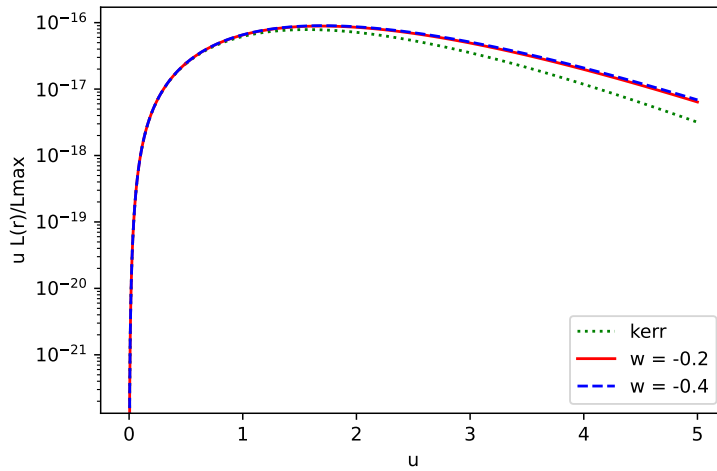


شکل ۱۱-۵: تغییرات شار بر حسب ν در سیاه‌چاله کیسلیف به ازای $a_* = 0.4$

بازگردند. مشاهده می‌شود که هر سه نمودار از درخشندگی اولیه صفر شروع و با شیب تقریباً یکسان صعود و به بیشینه یکسان خود می‌رسند. سپس با شیب باز هم یکسان به درخشندگی اولیه خود باز می‌گردند.

همانگونه که در شکل ۱۱-۵ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش ν با شیب بسیار تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به درخشندگی اولیه بازگردند. مشاهده می‌شود که هر سه نمودار از درخشندگی اولیه صفر شروع و با شیب تقریباً یکسان صعود و به بیشینه یکسان خود می‌رسند. سپس با شیب باز هم یکسان به درخشندگی اولیه خود باز می‌گردند. تفاوت با نمودار ۱۰-۵ در این است که در این شکل شیب نزولی سه نمودار کندتر از قبل است.

همانگونه که در شکل ۱۲-۵ مشاهده می‌شود، هر سه نمودار در ابتدا با افزایش ν با شیب بسیار تندی صعود کرده و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه با شیبی کند نزول می‌کنند تا به درخشندگی اولیه بازگردند. مشاهده می‌شود که هر دو نمودار مربوط به کیسلیف از درخشندگی اولیه صفر شروع و با شیب تقریباً یکسان صعود و به بیشینه یکسان خود می‌رسند. سپس با شیب باز هم یکسان به درخشندگی اولیه خود باز می‌گردند. نمودار کر با اینکه نقطه شروع و شیب صعودی یکسانی دارد اما نقطه بیشینه کوچکتر و شیب نزولی تندتری نسبت به نمودارهای کیسلیف دارد. باز هم مشاهده می‌شود که در این نمودار نیز شیب نزولی از دو نمودار قبل کندتر و حتی نقطه بیشینه نیز کوچکتر شده است. پس متوجه می‌شویم با افزایش a_* نقطه بیشینه کوچکتر و شیب نزولی نمودار کندتر می‌شود.



شکل ۱۲-۵: تغییرات شار بر حسب ν در سیاهچاله کیسلیف به ازای $a_* = 0.99$

۵-۸ نتیجه گیری

در این فصل ما پارامترهای انرژی ویژه، تکانه زاویه‌ای، پتانسیل موثر و سرعت زاویه‌ای را برای سیاه چاله کیسلیف بدست آوردیم و سپس برای دو مقدار خاص ω_q نمودار شار، درخشندگی و دما را رسم کرده و با نمودارهای سیاهچاله کر مقایسه کردیم. مشاهده شد که با تغییر پارامتر ω_q چه تغییراتی در رفتار نمودارها اتفاق افتاد و با کر مقایسه شد.

فصل ۶

بخش پایانی

بعد از معرفی سیاه‌چاله کیسلیف و حل‌های آن، بررسی‌های مختلفی بر روی آن صورت گرفت [۱۰] - [۴۵]. بررسی‌هایی که متریک اولیه را به فرم متریک کر بدست آورد و پارامتر ω_q را تعریف کرد. سپس بررسی شد که این پارامتر باید عددی بین $-\frac{1}{3} < \omega_q < -1$ داشته باشد [۶].

سپس با استفاده از حل این سیاه‌چاله پارامترهای مهمی برای این مدل بدست آمد که در آن‌ها، ω_q به عنوان یک ثابت قرار داشت. سپس این پارامترها مثل ژئودزیک‌ها، شعاع‌های اساسی و همچنین افق رویداد و دیگر پارامترهای مهم بدست آمده را برای مقدارهای خاص ω_q بدست آوردند که نتایج جالبی به همراه داشت [۵].

از دیگر کارهای انجام شده بر روی این سیاه‌چاله می‌توان به بررسی اثرات ناشی از چرخش جرم مرکزی آن و بررسی ترمودینامیک کلی آن‌ها اشاره کرد [۶]. همچنین برای سیاه‌چاله کیسلیف تفاوت افق رویداد برهنه و سیاه‌چاله بطور کامل بررسی شده است [۸].

همچنین راه حل کیسلیف به مورد سیاه‌چاله‌های چرخان برای مقدار کلی پارامتر اصلی تعمیم داده شده است. سپس در مورد مدارهای ژئودزیکی دایره‌ای حول سیاه‌چاله‌های در حال چرخش با مقدار خاصی از پارامتر اصلی که نتایج را می‌توان به شکل قابل توجهی ساده بیان کرد، به خصوص در مورد فضازمان کروی متقارن، به تفصیل بحث شده است [۷].

همچنین تأثیر تکانه زاویه‌ای یک ذره باردار را بر هرج و مرج محدود شده از طریق حرکات دایره‌ای ذره در اطراف سیاه‌چاله کیسلیف بررسی شد. این سیاه‌چاله فضایی را توصیف می‌کند که توسط یک مایع ناهمسانگرد احاطه شده است. مقدار توان لیاپانوف به طور دقیق توسط یک ماتریس ژاکوبی به دست می‌آید. موقعیت یک مدار تعادلی ذره تحت تأثیر نسبت جرم بار و تکانه زاویه‌ای آن قرار می‌گیرد.

کران به صورت عددی در ناحیه افق نزدیک و در فاصله معینی از افق مورد بحث قرار می‌گیرد بقیه به صورت زیر سازماندهی شده است. با در نظر گرفتن حرکت یک ذره باردار در صفحه استوایی یک سیاه‌چاله کروی متقارن، با محاسبه مقدار ویژه ماتریس ژاکوبین، بیان کلی توان لیاپانوف را به دست آوردند. همچنین تأثیر تکانه زاویه‌ای ذره را بر هرج و مرج محدود در ناحیه افق نزدیک و در فاصله معینی از افق سیاه‌چاله کیسلیف بررسی شده است [۹].

در این پایان‌نامه ما به بررسی پارامترهای اختر فیزیکی همچون شار، دما و درخشندگی پرداختیم و پارامترهایی مانند پتانسیل موثر، تکانه زاویه‌ای، انرژی ویژه و چند پارامتر دیگر را برای دو مقدار $\omega_q = -0.2$ و $\omega_q = -0.4$ بدست آوردیم.

در اینجا با استفاده از کامپیوتر، نمودارهای مرتبط با هر کدام از پارامترهای اشاره شده در بالا مانند دما، شار و درخشندگی را برای سیاه‌چاله شوارتزشیلد، سیاه‌چاله کر، سیاه‌چاله کیسلیف با $\omega_q = -0.2$ و سیاه‌چاله کیسلیف با $\omega_q = -0.4$ را رسم و با یکدیگر مقایسه شد.

در ابتدا نمودار شعاع r_{mb} حسب تغییرات a_* برای سیاه‌چاله کر و سیاه‌چاله کیسلیف برای دو مقدار $\omega_q = -0.2$ و $\omega_q = -0.4$ رسم شد و مشاهده شد که برای مقدار مثبت آن چگونه با افزایش a_* هر سه نمودار صعود می‌کنند و تفاوت آن‌ها فقط در نقطه شروع و شیب صعودی آن‌ها می‌باشد. همینطور مشاهده شد برای مقدار منفی هر سه نمودار نزولی هستند و تمایز در این مدل نیز در نقطه شروع و شیب آن‌ها است. نقطه شروع دو نمودار منفی و مثبت هر یک از سه نمودار، یکی است.

سپس نمودار شعاع r_{ph} بر حسب تغییرات a_* برای سیاه‌چاله کر و سیاه‌چاله کیسلیف برای دو مقدار $\omega_q = -0.2$ و $\omega_q = -0.4$ رسم شد و مشاهده شد که برای مقدار مثبت آن چگونه با افزایش a_* هر سه نمودار صعود می‌کنند و تفاوت آن‌ها فقط در نقطه شروع و شیب صعودی آن‌ها می‌باشد. همینطور مشاهده شد برای مقدار منفی هر سه نمودار نزولی هستند و تمایز در این مدل نیز در نقطه شروع و شیب آن‌ها است. نقطه شروع دو نمودار منفی و مثبت هر یک از سه نمودار، یکی است.

در آخر نمودار شعاع r_{ms} بر حسب تغییرات a_* برای سیاه‌چاله کر و سیاه‌چاله کیسلیف برای دو مقدار $\omega_q = -0.2$ و $\omega_q = -0.4$ رسم شد و مشاهده شد که برای مقدار مثبت آن چگونه با افزایش a_* هر سه نمودار صعود می‌کنند و تفاوت آن‌ها فقط در نقطه شروع و شیب صعودی آن‌ها می‌باشد. همینطور مشاهده شد برای مقدار منفی هر سه نمودار نزولی هستند و تمایز در این مدل نیز در نقطه شروع و شیب آن‌ها است. نقطه شروع دو نمودار منفی و مثبت هر یک از سه نمودار، یکی است. مشاهده می‌شود که در هر کدام از نمودارهای این سه شعاع خاص، رفتارهای نسبتاً مشابهی وجود دارد و تنها تفاوتی کوچکی در نقاط شروع و شیب صعودی و نزولی با یکدیگر دارند.

سپس به سراغ پارامترهای ترمودینامیکی رفتیم و در ابتدا نمودار تغییرات شار بر حسب r_{ms} برای سه مقدار مختلف $a_* = 0$ ، $a_* = 0.4$ و $a_* = 0.99$ برای هر یک از سیاه‌چاله‌های کر و کیسلیف

رسم شد. مشاهده شد که این سه نمودار نیز رفتار مشابهی دارند و با افزایش r_{ms} در ابتدا با شیبی تند صعود می‌کنند و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه، با شیبی بسیار کندتر نزول کرده و به مقدار اولیه می‌رسند. تفاوت سه مقدار مختلف a_* نیز در نقطه بیشینه نمودار مربوط به سه سیاه‌چاله مشخص می‌شود، به گونه‌ای که با افزایش a_* مقدار بیشینه دو نمودار مربوط به سیاه‌چاله کیسلیف به طرز مشهودی کاهش می‌یابد.

و سپس نمودار تغییرات دما بر حسب r_{ms} برای سه مقدار مختلف $a_* = 0$ ، $a_* = 0.4$ و $a_* = 0.99$ برای هر یک از سیاه‌چاله‌های کر و کیسلیف رسم شد. مشاهده شد که این سه نمودار نیز رفتار مشابهی دارند و با افزایش r_{ms} در ابتدا با شیبی تند صعود می‌کنند و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه، با شیبی بسیار کندتر نزول کرده و به مقدار اولیه می‌رسند. تفاوت سه مقدار مختلف a_* نیز در نقطه بیشینه نمودار مربوط به سه سیاه‌چاله مشخص می‌شود، به گونه‌ای که با افزایش a_* مقدار بیشینه دو نمودار مربوط به سیاه‌چاله کیسلیف به طرز مشهودی کاهش می‌یابد.

و در آخر نمودار تغییرات درخشندگی بر حسب r_{ms} برای سه مقدار مختلف $a_* = 0$ ، $a_* = 0.4$ و $a_* = 0.99$ برای هر یک از سیاه‌چاله‌های کر و کیسلیف رسم شد. مشاهده شد که این سه نمودار نیز رفتار مشابهی دارند و با افزایش r_{ms} در ابتدا با شیبی تند صعود می‌کنند و بعد از رسیدن به نقطه بیشینه، با شیبی بسیار کندتر نزول کرده و به مقدار اولیه می‌رسند. تفاوت سه مقدار مختلف a_* نیز در شیب نزولی نمودار مربوط به سه سیاه‌چاله مشخص می‌شود، به گونه‌ای که با افزایش a_* شیب نزولی به طرز مشهودی افت می‌کند و همچنین بیشینه هر سه نمودار نیز کاهش می‌یابد.

مراجع

- [1] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby, General Relativity(2006)
- [2] S.Shahidi, T.Harko, Z.Kovács, Distinguishing Brans–Dicke–Kerr type naked singularities and black holes with their thin disk electromagnetic radiation properties, Eur. Phys. J. C (2020) 80,162
- [3] V.V.Kiselev, Quintessence and black holes, arXiv:gr-qc/0210040v3
- [4] N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, 1973, A and A, 24, 337
- [5] Muhammad Rizwan, Mubasher Jamil, and Anzhong Wang, Hangzhou, 310032, China Distinguishing rotating Kiselev black hole from naked singularity using spin precession of test gyroscope (Dated: June 21, 2018),arXiv:1802.04301v2 [gr-qc] 20 Jun 2018
- [6] Bobir Toshmatov, Zdenek Stuchl, and Bobomurat Ahmedov, Rotating black hole solutions with quintessential energy,THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL PLUS, Eur. Phys. J. Plus (2017) 132, 98
- [7] S. R. Wu, B. Q. Wang, and Z. W. Long Gravitational perturbations and electromagnetic perturbations of the Bardeen-Kiselev black hole with cosmological constant: quasinormal modes and greybody factors (Dated: July 14, 2022)

- [8] Haotian Liu, Jinning Liang, and Junji Ji, Deflection and Gravitational lensing of null and timelike signals in the Kiselev black hole spacetime in the weak field limit (Dated: August 30, 2022)
- [9] Chuanhong Gao, Deyou Chen, and Chengye Yu, Peng Wang Chaos bound and its violation in charged Kiselev black hole
- [10] Bakhtiyor Narzilloev, Bobomurat Ahmedov, Regular black hole solution in PFDM environment to explain the radiative efficiency of black hole candidates, *New Astron.* 98 (2023) 101922
- [11] Shurui Wu (Guizhou U.), Bing-Qian Wang (Unlisted, CN), Hao Chen (Zunyi Normal School), Zheng-Wen Long (Guizhou U.) , EGUP-corrected Bardeen black hole thermodynamics with quintessence matter, *Eur.Phys.J.Plus* 137 (2022) 8, 970
- [12] Zdeněk Stuchlík, Jaroslav Vrba , Geodesic Model of HF QPOs Tested for Black Holes in Spacetimes Reflecting the Effect of Surrounding Dark Matter, *Astrophys.J.* 935 (2022) 2, 91
- [13] V.K. Shchigolev, Exact analytical solutions to the geodesic equations in general relativity via , expansion method , *Gen.Rel.Grav.* 54 (2022) 8, 78
- [14] Chengye Yu (Xihua U., Chengdu), Deyou Chen (Xihua U., Chengdu), Chuanhong Gao (Xihua U., Chengdu), Quasinormal modes and the correspondence with shadow in black holes with a deficit solid angle and quintessence-like matter, *Nucl.Phys.B* 983 (2022) 115925, *Nucl.Phys.B* 983 (2022) 115925
- [15] Marina-Aura Dariescu, Ciprian Dariescu, Vitalie Lungu, Cristian Stelea , Kiselev solution in power-Maxwell electrodynamics, *Phys.Rev.D* 106 (2022) 6, 064017
- [16] Wenfu Cao (SUES, Shanghai and Fudan U., Shanghai), Wenfang Liu (SUES, Shanghai), Xin Wu (SUES, Shanghai and Guangxi U. and Fudan U., Shanghai) , Integrability of Kerr-Newman spacetime with cloud strings, quintessence and electromagnetic field, *Phys.Rev.D* 105 (2022) 12, 124039
- [17] Krishna Pada Das (Bengal Engin. Sci. U., Howrah), Ujjal Debnath (Bengal Engin. Sci. U., Howrah), Anisotropic compact stars in presence of electromagnetic field,

- quintessence field and cosmological constant in $f(G)f(G)$ gravity, *Int.J.Mod.Phys.D* 31 (2022) 09, 2250073
- [18] Qanita Ama-Tul-Mughani (Unlisted, PK and U. Educ., Lahore and COMSATS, Lahore), Arfa Waseem (GC U., Lahore), Wardat us Salam (COMSATS, Islamabad), Abdul Jawad (COMSATS, Lahore), Greybody factor and thermal fluctuations of rotating regular black hole bounded by PFDm, *Chin.J.Phys.* 77 (2022) 2213-2227
- [19] G. Mustafa (Zhejiang Normal U.), Abdelghani Errehymy (Hassan U., II, Ain Chock), Allah Ditta (Shanghai U.), Mohammed Daoud (Ibn Tofail U. and ICTP, Trieste) , Charged strange stars with dust and phantom regimes in Rastall gravity, *Chin.J.Phys.* 77 (2022) 2781-2794
- [20] M. Sharif (Punjab U.), A. Raza (Punjab U.) , Greybody factor for a static spherically symmetric black hole with non-linear electrodynamics, *Annals Phys.* 442 (2022) 168920
- [21] Mohsen Fathi (Valparaiso U.), Marco Olivares (Diego Portales U.), J.R. Villanueva (Valparaiso U.), Study of null and time-like geodesics in the exterior of a Schwarzschild black hole with quintessence and cloud of strings, *Eur.Phys.J.C* 82 (2022) 7, 629, *Eur.Phys.J.C* 82 (2022) 629
- [22] Bakhtiyor Narzilloev (Tashkent, Astron. Inst. and Unlisted, UZ and Uzbekistan Natl. U.), Ibrar Hussain (NUST, Islamabad), Ahmadjon Abdujabbarov (Tashkent, Astron. Inst. and Uzbekistan Natl. U. and Shanghai, Astron. Observ. and Tashkent, IYF and Unlisted, UZ), Bobomurat Ahmedov (Tashkent, Astron. Inst. and Uzbekistan Natl. U. and Unlisted, UZ), Optical properties of an axially symmetric black hole in the Rastall gravity, *Eur.Phys.J.Plus* 137 (2022) 5, 645
- [23] Liu Li (Shenyang Normal U.), Zi-Yu Fu (Shenyang Normal U.), Hui-Ling Li (Shenyang Normal U.), AdS black holes with perfect fluid dark matter and weak cosmic censorship conjecture, *Gen.Rel.Grav.* 54 (2022) 5, 43
- [24] Askar Ali (Quaid-i-Azam U. and Natl. U. Comput. Emerg. Sci.), Khalid Saifullah (Quaid-i-Azam U.), Effects of quintessence and configuration of strings on the black holes of Lovelock-scalar gravity, *Eur.Phys.J.C* 82 (2022) 5, 408

- [25] Javlon Rayimbaev (Tashkent, Astron. Inst. and Silesian U., Czech Republic and Uzbekistan Natl. U.), Pulat Tadjimuratov (Tashkent, Astron. Inst. and Silesian U., Czech Republic), Bobomurat Ahmedov (Uzbekistan Natl. U. and Unlisted uz), Satimbay Palvanov (Uzbekistan Natl. U.), Quintessential effects on quasiperiodic oscillations in 4D Einstein–Gauss–Bonnet gravity, *Arab.J.Math.* 11 (2022) 1, 119-131
- [26] P. Tamta (Kumaun U.), P. Fuloria (Kumaun U.) , Quintessence compact star models under embedded class one symmetry, *New Astron.* 93 (2022) 101671
- [27] Ines G. Salako (UAK, Benin and Benin, IMSP and Abomey-Calavi U.), Rachidi Boko (ICMPA, Benin and Benin, IMSP), Etienne Baffou (Benin, IMSP and ICMPA, Benin), M.Z. Arouko (Abomey-Calavi U.) , Anisotropic quintessence charged strange stars in Rastall–Maxwell gravity, *Mod.Phys.Lett.A* 37 (2022) 09, 2250053
- [28] H. Aounallah (U. Tebessa), H. El Moumni (Ibn Zohr U., Agadir), J. Khalloufi (Ibn Zohr U., Agadir), K. Masmar (Hassan U., II, Ain Chock) , Insight into the microscopic structure of a quintessential black hole from the quantization concept, *Int.J.Mod.Phys.A* 37 (2022) 08, 2250036
- [29] Chuanhong Gao (Xihua U., Chengdu), Deyou Chen (Xihua U., Chengdu), Chengye Yu (Xihua U., Chengdu), Peng Wang (SCU, Chengdu), Chaos bound and its violation in charged Kiselev black hole, *Phys.Lett.B* 833 (2022) 137343, *Phys.Lett.B* 833 (2022) 137343
- [30] Hao Chen (Guizhou U.), Bekir Can Lütfüoğlu (Akdeniz U. and Hradec Kralove U.), Hassan Hassanabadi (Hradec Kralove U. and K.N. Toosi U.), Zheng-Wen Long (Guizhou U.), Thermodynamics of the Reissner-Nordström black hole with quintessence matter on the EGUP framework, *Phys.Lett.B* 827 (2022) 136994
- [31] Haotian Liu, Jinning Liang, Junji Jia, Deflection and gravitational lensing of null and timelike signals in the Kiselev black hole spacetime in the weak field limit, *Class.Quant.Grav.* 39 (2022) 19, 195013
- [32] Antonio Capolupo (Salerno U. and INFN, Salerno), Gaetano Lambiase (Salerno U. and INFN, Salerno), Antonio Tedesco (Salerno U. and INFN, Salerno), Preces-

- sion shift in curvature based extended theories of gravity and quintessence fields, *Eur.Phys.J.C* 82 (2022) 4, 286
- [33] Jiayi Liu, Songbai Chen, Jiliang Jing, Tidal effects of dark matter halo around a galactic black hole, *Chin.Phys.C* 46 (2022) 105104
- [34] Aurélien Barrau (LPSC, Grenoble), Killian Martineau (LPSC, Grenoble), Cyril Reveyey (LPSC, Grenoble), Catastrophic fate of Schwarzschild black holes in a thermal bath, *Phys.Rev.D* 106 (2022) 2, 023509
- [35] Farruh Atamurotov, Furkat Sarikulov, Ahmadjon Abdujabbarov, Bobomurat Ahmedov, Gravitational weak lensing by black hole in Horndeski gravity in presence of plasma, *Eur.Phys.J.Plus* 137 (2022) 3, 336
- [36] F. Shojai (Tehran U. and IPM, Tehran), A. Sadeghi (Tehran U.), R. Hassannejad (Tehran U.), Generalized Oppenheimer–Snyder gravitational collapse into regular black holes, *Class.Quant.Grav.* 39 (2022) 8, 085003
- [37] Javlon Rayimbaev (Tashkent, Astron. Inst. and Uzbekistan Natl. U. and Tashkent, CTPA), Bushra Majeed (NUST, Islamabad), Mubasher Jamil (Zhejiang U. Tech. and NUST, Islamabad and CQRC, Vernon), Kimet Jusufi (State U., Tetova), Anzhong Wang (Baylor U., Math. Dept.), Quasiperiodic oscillations, quasinormal modes and shadows of Bardeen–Kiselev Black Holes, *Phys.Dark Univ.* 35 (2022) 100930
- [38] Adil Belhaj (Rabat U.), Hajar Belmahi (Rabat U.), Mohamed Benali (Rabat U.), Hasan El Mounni (Ibn Zohr U., Agadir), Mohammed Amine Essebani (Ibn Tofail U.), Optical shadows of rotating Bardeen-AdS black holes, *Mod.Phys.Lett.A* 37 (2022) 06, 2250032
- [39] Marina-Aura Dariescu (Cuza U., Iasi), Ciprian Dariescu (Cuza U., Iasi), Particles behavior close to black holes immersed in dark matter, *Eur.Phys.J.Plus* 137 (2022) 2, 238
- [40] Chengxiang Sun (Yangzhou U.), Yunqi Liu (Yangzhou U. and Sao Paulo U. and Shanghai Jiao Tong U.), Wei-Liang Qian (Yangzhou U. and Sao Paulo U. and Sao Paulo U., Guaratingueta), Ruihong Yue (Yangzhou U. and Shanghai Jiao Tong U.),

Shadows of magnetically charged rotating black holes surrounded by quintessence, *Chin.Phys.C* 46 (2022) 6, 065103

- [41] Asia Liaqat (NUST, Islamabad), Ibrar Hussain, Effect of dark energy models on the energy content of charged and rotating black holes, *Chin.Phys.C* 46 (2022) 1, 015101
- [42] Mohsen Khodadi (IPM, Tehran), Reza Pourkhodabakhshi (Shahid Beheshti U.), Superradiance and stability of Kerr black hole enclosed by anisotropic fluid matter, *Phys.Lett.B* 823 (2021) 136775
- [43] Farruh Atamurotov, Ahmadjon Abdujabbarov, Wen-Biao Han, Effect of plasma on gravitational lensing by a Schwarzschild black hole immersed in perfect fluid dark matter, *Phys.Rev.D* 104 (2021) 8, 084015
- [44] Francisco Tello-Ortiz (Antofagasta U.), S.K. Maurya (Unlisted), Pedro Bargeño (Alicante U.), Minimally deformed wormholes, *Eur.Phys.J.C* 81 (2021) 5, 426, *Eur.Phys.J.C* 82 (2022) 8, 742 (erratum)
- [45] Bakhtiyor Narzilloev (Fudan U. and Tashkent, Astron. Inst.), Javlon Rayimbaev (Tashkent, Astron. Inst. and Tashkent, IYF and Uzbekistan Natl. U.), Sanjar Shaymatov (Zhejiang U. Tech. and Tashkent, Astron. Inst. and Uzbekistan Natl. U. and Unlisted, UZ), Ahmadjon Abdujabbarov (Shanghai, Astron. Observ. and Tashkent, Astron. Inst. and Tashkent, IYF and Uzbekistan Natl. U. and Unlisted, UZ), Bobomurat Ahmedov (Tashkent, Astron. Inst. and Unlisted, UZ and Uzbekistan Natl. U.), Dynamics of test particles around a Bardeen black hole surrounded by perfect fluid dark matter, *Phys.Rev.D* 102 (2020) 10, 104062
- [46] D.N. Page, K.S. Thorne, *Astrophys. J.* 191, 499 (1974)
- [47] K.S. Thorne, *Astrophys. J.* 191, 507 (1974)

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Angular momentum	حرکت زاویه‌ای
Luminosity	درخشندگی
Temp	دما
Black hole	سیاه‌چاله
Rotating black hole	سیاه‌چاله چرخان
Flux	شار
Spacetime	فضا-زمان
Accretion disk	قرص برافزایشی
Spherically	کروی
Gravity	گرانش
Symmetric	متقارن
Coordinate	مختصات
General Relativity	نسبیت عام
Geometry	هندسه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accretion disk	قرص برافزایشی
Angular momentum	حرکت زاویه‌ای
Black hole	سیاه‌چاله
Coordinate	مختصات
Flux	شار
General Relativity	نسبیت عام
Geometry	هندسه
Gravity	گرانش
Luminosity	درخشندگی
Rotating black hole	سیاه‌چاله چرخان
Spacetime	فضا-زمان
Spherically	کروی
Symmetric	متقارن
Temp	دما

ABSTRACT

Astrophysical implications of semi-Schwarzschild black holes

By:

Mohsen Pahlevani

Einstein believed gravity is described by the curvature of space-time caused by the presence of matter. He obtained a set of equations which quantitatively determine how the curvature of space-time at any point is related to the distribution of matter at that point. These equations to Einstein's equations are famous [1]. Black hole solutions are one of the important solutions of Einstein's equations. In general, the majority physical astral objects are rotating. The possible existence of bare singularities, which lack event horizons, is an important issue in astrophysics. From an observational point of view, the distinction between astrophysical black holes and bare singularities have received much attention. One possible way to distinguish bare singularities from black holes is via a comparative study of the properties of the thin accretion disk around these compact objects [2]. In this thesis, we have briefly reviewed the three black hole models of Schwarzschild, Kerr, and Kiselev, and after that we have examined the astrophysical consequences of Kiselev black holes [3]. We discuss and compare flux, temperature and luminosity parameters for all three Schwarzschild, Kerr and Kiselev models. Then we draw the corresponding graphs and compare their behavior.

Ministry of Science, Research, and Technology



Damghan University
Faculty of Physics

M.Sc. Thesis
**In Astronomy and astrophysics (Gravity and
cosmology)**

**Astrophysical implications of
semi-Schwarzschild black holes**

By:
Mohsen Pahlevani

Supervisors:
Shahab Shahidi
Kazem Faghei

Advisor:

September 2022

In The Name of God

**Astrophysical implications of
semi-Schwarzschild black holes**

By:

Mohsen Pahlevani

THESIS

SUBMITTED TO THE SCHOOL OF GRADUATE STUDIES IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M.Sc.)

In

Astronomy and astrophysics (Gravity and cosmology)

DAMGHAN UNIVERSITY

DAMGHAN, ISLAMIC REPUBLIC OF IRAN

EVALUATED AND APPROVED BY THE THESIS COMMITTEE AS: **The given degree
by thesis committee**

Shahab Shahidi , Ph.D., ASSISTANT PROF. OF DAMGHAN UNIVERSITY (SU-
Pervisor)

Kazem Faghei , Ph.D., ASSISTANT PROF. OF DAMGHAN UNIVERSITY (SU-
Pervisor)

Zahra Haghani , Ph.D.,ASSOCIATE PROF. OF DAMGHAN UNIVERSITY (EX-
AMINER)

Motahareh Mohammadpour , Ph.D., ASSISTANT PROF. OF DAMGHAN UNI-
VERSITY (EXAMINER)

Zahra Haghani , Ph.D., ASSOCIATE PROF. OF DAMGHAN UNIVERSITY (Rep-
resentative of the Graduate Studies)

September 2022

Λ•