وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
فیزیک (گرایش گرانش و کیهان‌شناسی)

بررسی درجات آزادی دینامیکی در نظریه‌ی اسکالر تانسوری گرانش

توسط:
هدی غفاریان

استاد راهنما:
سید شهاب‌الدین شهیدی

استاد مشاور:
زهرا حقانی

بهمن ۱۳۹۵

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

بررسی درجات آزادی دینامیکی در نظریه‌ی اسکالر تانسوری گرانش

توسط:

هدی غفاریان

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

فیزیک (گرایش گرانش و کیهان‌شناسی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر سید شهاب‌الدین شهیدی شادکام استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر زهرا حقانی استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر لیلا شاهکرمی استادیار دانشگاه دامغان (استاد داور)

دکتر داود مهدویان یکتا استادیار دانشگاه حکیم سبزواری (استاد داور)

دکتر لیلا شاهکرمی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

بهمن ۱۳۹۵

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که علیرغم تحمل سختی‌ها و دشواری‌های فراوان مسیر کسب دانش و معرفت را برایم هموار

نموده و از دعای خیرشان بی نصیب نبوده‌ام.

سپاس بی حد به درگاه باری تعالی که نخستین و بزرگترین یاریگر بندگان در آغاز و پایان هر کاریست.

و با تقدیر و تشکر از استاد محترم جناب آقای دکتر سید شهاب الدین شهیدی که به حق مرا در طول دوره ی تحصیل و نیز طی مراحل مختلف این تحقیق، صبورانه و مشتاقانه راهنمایی کردند.

همچنین با تشکر از خانم دکتر زهرا حقانی که با قبول زحمت مشاوره این پایان نامه مرا در انجام این کار یاری دادند.

چکیده

نسبیت عام نظریه‌ای برای گرانش است که در سال ۱۹۱۵ توسط آلبرت اینشتین مطرح شد. این نظریه هموردایی عام را به نمایش می‌گذارد و به خوبی همه‌ی آن‌چه را در منظومه‌ی شمسی مشاهده می‌کنیم توضیح می‌دهد. مشکلات زمانی ایجاد می‌شوند که به جهان در مقیاس‌های کیهانی یا کوانتومی نگاه می‌کنیم. مشاهدات اخیر نشان داده‌اند که جهان، در حال انبساط شتاب‌دار تندشونده است و نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین قادر به توضیح این شتاب تندشونده‌ی عالم نیست. به‌این منظور نیازمند تعمیم گرانش هستیم.

ما با استفاده از نظریه‌ی اسکالرتانسوری به‌نام هورندسکی که اولین بار در ۱۹۷۴ توسط هورندسکی ارائه شد سعی در تعمیم گرانش داریم. ویژگی این نظریه از مرتبه‌ی دوم بودن معادلات حرکت آن است، درحالی‌که لاگرانژی آن می‌تواند دارای مشتقات مراتب بالاتر از دو باشد. این طبیعت مرتبه دوم نظریه‌ی هورندسکی آن را از داشتن شبح محافظت می‌کند. درجات آزادی این نظریه با کمک گرفتن از سیستم‌های هامیلتونی مقید و تعریف قیدهای اولیه و ثانویه و همچنین قیدهای نوع اول و نوع دوم مورد مطالعه قرار گرفت. برای بررسی ساختار هامیلتونی هورندسکی فرمول‌بندی ADM، یعنی تجزیه‌ی ۱ + ۳بعدی فضا_زمان را معرفی نموده و روابط نظریه را با استفاده از این فرمول‌بندی به‌دست آوردیم. به‌عنوان مثالی از نظریه‌ی هورندسکی گالیلئون‌ها مورد مطالعه قرار گرفتند و مشاهده شد که با ورود به فضای خمیده هم می‌توانیم معادلات حرکتی حداکثر از مرتبه‌ی دوم داشته باشیم. در نتیجه نظریه‌ای عاری از هر گونه ناپایداری خواهیم داشت.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مقدمه

نسبیت‌عام نظریه‌ای برای گرانش است که در سال‌های بین ۱۹۰۷ و ۱۹۱۵ توسط آلبرت اینشتین گسترش یافت. از آنجایی‌که نسبیت‌عام بر پایه‌ی تانسورها بنا شده است هموردایی عام را به نمایش می‌گذارد. یعنی این نظریه می‌کوشد قوانین فیزیک را به‌گونه‌ای تنظیم کند که در تمام دستگاه‌های مختصات فیزیک یکسانی را در بر داشته باشند. معادلات گرانش نظریه‌ی نسبیت‌عام را می‌توان در هر دستگاه مختصاتی به‌کار گرفت. در نسبیت‌عام فضا_زمان در پاسخ به اثرات ماده خمیده می‌شود و در فضا_زمان خمیده دیگر هندسه‌ی اقلیدسی برقرار نیست. مشاهدات و آزمایش‌ها نشان می‌دهند که توصیف اینشتین از گرانش پدیده‌هایی را پیش‌بینی می‌کند که توسط نظریه‌ی نیوتن قابل پیش‌بینی نیستند. اینشتین ۳ آزمون برای نسبیت عام پیشنهاد نمود که به عنوان آزمون‌های کلاسیک نسبیت عام شناخته می‌شوند. برای مثال می‌توان به ناهنجاری‌های کوچک مشاهده شده در مدار برخی سیارات نظیر عطارد اشاره کرد. علاوه بر این نسبیت عام پدیده‌های جدیدی مانند همگرایی گرانشی را نیز پیش‌بینی می‌کند.

نظریه‌ی نسبیت‌عام به‌خوبی آن‌چه در مقیاس منظومه‌ی شمسی مشاهده می‌کنیم را توضیح می‌دهد. مشکلات زمانی ایجاد می‌شوند که به جهان در مقیاس‌های کوانتومی و مقیاس‌های بزرگ کیهانی نگاه می‌کنیم. مشاهدات اخیر نشان می‌دهند که جهان در یک فاز با انبساط تندشونده است که نسبیت‌عام اینشتین قادر به توضیح آن نمی‌باشد. اگر به این نظریه معتقدیم باید تصدیق کنیم که یک شکل مرموز از انرژی (معروف به انرژی تاریک) با فشار منفی وجود دارد و باعث شتاب تندشونده‌ی عالم می‌شود. برای بهبود نسبیت‌عام و همچنین مشخص شدن دینامیک بخش تاریک نیاز به تعمیم گرانش داریم.

مدل‌های انرژی تاریک [۱، ۲] و تورم [۳] به‌طورکلی با افزودن چند درجه آزادی اضافی به نظریه‌ی نسبیت‌عام به‌وجود می‌آیند. به‌عنوان ساده‌ترین مثال می‌توان این درجات آزادی اضافی را به‌وسیله‌ی

یک میدان اسکالر تولید کرد. تاکنون گمان می‌کردیم که برای سالم بودن یک نظریه‌ی گرانشی مجبور به افزودن جملاتی به کنش هستیم که حداکثر مشتق مرتبه دوم زمانی داشته باشند. اخیرا توسط نظریه‌ی هورندسکی[۱] [۱۱، ۱۲]، به این نتیجه رسیده‌ایم که می‌توانیم گستره‌ی نظریه‌های سالم را به نظریه‌هایی با مشتقات مراتب بالاتر ارتقا دهیم. یکی از مثال‌های مهم نظریه‌ی هورندسکی که منجر به معادلات مرتبه‌ی دوم برای میدان اسکالر و متریک می‌شود، نظریه‌ی "گالیلئون تعمیم‌یافته" [۱۵] است که تقارن گالیله‌ای را برای میدان اسکالر فرض می‌کند. این نظریه شامل مدل DGP [۱۶، ۱۷، ۱۸] به عنوان یک مثال خاص است. طبیعت مرتبه دوم نظریه‌ی هورندسکی آن را از داشتن ناپایداری مربوط به مشتقات زمانی مراتب بالاتر[۲] محافظت می‌کند. تمام نظریه‌های تعمیم‌یافته‌ی گرانشی را می‌توان به‌نوعی یک نظریه‌ی اسکالر تانسوری در نظر گرفت. برای بیشتر نظریه‌های تعمیم‌یافته این هم‌ارزی ثابت شده است و تلاش برای یافتن هم‌ارزی دیگر نظریه‌ها ادامه دارد. ازاین‌رو نظریه‌های اسکالر تانسوری گرانش را می‌توان به عنوان مهم‌ترین تعمیم نظریه‌ی گرانشی اینشتین درنظر گرفت.

در این پایان‌نامه قصد داریم نظریه‌ی اسکالر تانسوری موسوم به هورندسکی [۱۹، ۲۰] را مورد مطالعه قرار داده و درجات آزادی دینامیکی آن را مورد بررسی قرار دهیم. ابزار طبیعی برای شمارش درجات آزادی بررسی متعارف قیدها است. ابتدا باید بدانیم چه نوع قیدهایی وجود دارند. همچنین ممکن است بعضی از درجات آزادی سیستم دارای مشتقات زمانی بالاتر از مرتبه‌ی ۲ باشند، یا باعث شوند انرژی سیستم از پایین کران‌دار نشود [۷، ۸]. تمام این حالت‌ها باعث می‌شوند که سیستم ناپایدار شده و از نظر فیزیکی قابل قبول نباشد.

در این پایان‌نامه شمردن درجات آزادی دینامیکی نظریه‌ی هورندسکی را به‌وسیله‌ی روش هامیلتونی انجام خواهیم داد. در نهایت با مشخص کردن قیدهای نوع اول و نوع دوم [۹] تعداد درجات آزادی سیستم و رفتار این درجات آزادی را مشخص می‌کنیم. این کار به ما کمک خواهد کرد تا مشخص کنیم که آیا می‌توان این نظریه‌ی اسکالر تانسوری را به‌عنوان تعمیمی سالم از نظریه‌ی نسبیت‌عام در نظر بگیریم یا خیر.

در فصل دوم این پایان‌نامه به‌عنوان مثالی از نظریه‌ی هورندسکی به بررسی گالیلئون‌ها [۱۳، ۱۴] می‌پردازیم. در این روش گرانش را با اضافه کردن یک میدان اسکالر که با π نمایش داده می‌شود تعمیم می‌دهیم. در این مدل درحالی‌که لاگرانژی می‌تواند شامل مشتقات مراتب بالاتر باشد اما معادلات حرکت آن حداکثر از مرتبه‌ی دوم می‌باشند، همچنین جملات این نظریه تحت تبدیل گالیله‌ای ناوردا هستند [۴]. برای نوشتن نظریه‌ای گرانشی بر این اساس باید وارد فضای خمیده شد [۵]. از این رو جملات گالیلئونی دارای مشتقات جزئی را به مشتقات هموردا تبدیل می‌کنیم. خواهیم دید که در

[۱] Horndeski
[۲] Ostrogradski

نهایت با یک جفت‌شدگی غیرکمینه به متریک، مجدداً معادلات حرکتی از مرتبه‌ی دوم خواهیم داشت. اما دیگر تقارن گالیله‌ای وجود ندارد [۶، ۱۰].

در فصل سوم توابع پیمانه‌ای [۲۱]، انواع قیدها و خواص آن‌ها را بررسی کرده، با معرفی کروشه‌ی پواسون و کروشه‌ی دیراک، هامیلتونی تعمیم‌یافته را به‌دست آورده و قیدهای آن را می‌شماریم [۲۲، ۲۳]. نظریه‌ی هورندسکی یک نظریه‌ی ۴ بعدی است. برای ساده شدن محاسبات از فرمول‌بندی ADM [۳] کمک می‌گیریم. در فصل چهارم این روش را به تفصیل توضیح خواهیم داد. در واقع در این فرمول‌بندی فضا_زمان ۴ بعدی را به‌صورت ۱+۳ بعدی تجزیه می‌کنیم. بدین‌صورت که ۳ بعد فضاگونه را به‌شکل ابرسطح‌هایی فضایی درنظر می‌گیریم که در امتداد مختصه‌ی چهارم زمان‌گونه درحال پیش‌روی می‌باشند. سپس این روش را به معادلات هامیلتونی نظریه اعمال کرده و هامیلتونی جدید را بر حسب مختصات فضایی ADM به‌دست می‌آوریم. در روند اعمال این روش از معادلات گوس_کودازی[۴] برای نوشتن لاگرانژی گرانش [۲۵]، برحسب مختصات فضایی بهره می‌گیریم و با استفاده از این لاگرانژی، هامیلتونی و معادلات حرکت را محاسبه می‌کنیم [۲۴] و در نهایت در فصل آخر ساختار هامیلتونی نظریه‌های اسکالر تانسوری هورندسکی تعمیم یافته را بررسی کرده و هامیلتونی آن را به‌دست می‌آوریم. با محاسبه‌ی قیدها همان‌گونه که قبلا گفته شد، درجات آزادی سیستم را خواهیم شمرد [۲۷].

[۳] Arnowitt-Deser-Misner formalism

[۴] Gauss-codazzi equation

فصل ۲

گالیلئون به عنوان تعمیمی از گرانش

شواهد قوی جمع شده در سال‌های اخیر مبنی بر این‌که جهان دست‌خوش یک انبساط با شتاب تندشونده است انگیزه‌ی بیشتری برای در نظر گرفتن تعمیمی از گرانش در مقیاس‌های کیهانی فراهم آورده است. می‌توانیم گرانش را با اضافه کردن درجه آزادی اضافی به‌صورت یک میدان اسکالر تعمیم دهیم. مثال‌هایی از این نوع بر پایه‌ی نظریه میدان ۴ بعدی، نظریه‌هایی از گرانش جرم‌دار هستند مانند فیرز پاولی و DGP[1].

هم در فیرز پاولی وهم در DGP، تعمیم گرانش در فواصلی از مرتبه‌ی پارامتر هابل توسط یک درجه آزادی اسکالر اضافی توضیح داده شده است که با π نشان داده می‌شود.

۲-۱ جفت شدگی با π

تعمیمی از نسبیت عام را در فواصل طولانی برای میدان‌های گرانشی ضعیف در نظر می‌گیریم. کنش $\int \sqrt{-g}Rd^4x$ را حول $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ بسط می‌دهیم، که در آن انحرافات از نسبییت عام، منجر به یک درجه‌ی آزادی اسکالر جفت شده به متریک شده و با رابطه‌ی زیر معرفی می‌شود

$$S = \int d^4x \Big[\frac{1}{2}M_{PL}^2\Big(-\frac{1}{2}(\Box h_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu}\partial_\alpha h^\alpha_{\nu)} + \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\Box h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta})\Big) + \mathcal{L}_\pi + \pi T^\mu{}_\mu\Big] + S_M. \tag{1.2}$$

در کنش بالا ضریب M_p^2، بسط تا مرتبه‌ی دوم لاگرانژی اینشتین هیلبرت، حول فضای تخت است. جمله دوم دینامیکی است که احتمالا π با خود به همراه خواهد داشت، جمله‌ی سوم جفت‌شدگی

[1] Dvali-Gabadadze-Porrati Model

میدان اسکالر π با ماده را نمایش می‌دهد و جمله‌ی آخر کنش مربوط به ماده است.

۲-۲ ساختار لاگرانژی $\mathcal{L}_\pi$

مطالب پیش‌رو تا بخش ۲-۵ در این فصل از مقاله‌ی [۴] انتخاب شده است. اکنون باید ساختار لاگرانژی $\mathcal{L}_\pi$، مرتبط با یک تعمیم واقعی از گرانش را مشخص کنیم. از یک سو، می‌خواهیم π در مقیاس کیهان‌شناسی منجر به یک تعمیم مرتبه‌ی اول از مقدار هابل شود و از سوی دیگر نمی‌توانیم انحرافات بزرگتر از مرتبه‌ی $۱۰^{-۳}$ از گرانش اینشتینی را در فواصل منظومه‌ی شمسی تحمل کنیم. در صورت خطی بودن دینامیک π شرایط بالا برقرار نخواهند بود. اگر جملات غیرخطی دارای اهمیت باشند یک نظریه‌ی پایدار خواهیم داشت. مدل DGP با جملات غیرخطی مربوط به اثر واینشتاین یک مثال خوب در این زمینه است. بنابراین اولین قید مورد نیاز تا π بتواند به عنوان یک اختلال کوچک از هندسه رفتار کند غیرخطی بودن جملات آن است.

یکی از ویژگی‌های نظریه‌ی DGP ناوردا بودن لاگرانژی آن تحت تبدیل زیر است

$$\pi \longrightarrow \pi + c + b_\mu x^\mu. \tag{۲.۲}$$

c، b_μ و x^μ در رابطه‌ی (۲.۲) کمیت‌های ثابت هستند. در نتیجه دومین فرض خود را به این شکل در نظر می‌گیریم که معادلات حرکت π، تحت تبدیل (۲.۲) ناوردا باقی بمانند و به عنوان آخرین قید به‌منظور جلوگیری از ایجاد مشکل توسط درجات آزادی ناپایدار[۲] معادلات حرکت باید فقط دارای مشتقات مرتبه‌ی ۲ روی π باشند. با در نظر گرفتن این ۳ قید معادلات حرکت به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\pi}{\delta \pi} = F(\partial_\mu \partial_\nu \pi). \tag{۳.۲}$$

F در رابطه‌ی (۳.۲)، یک تابع دلخواه از تانسور $\partial_\mu \partial_\nu \pi$ است.

تبدیل (۲.۲) یک تبدیل شبه گالیلئونی است و با مشتق گرفتن از این رابطه به تبدیل گالیله‌ای $\partial_\mu \pi \rightarrow \partial_\mu \pi + b_\mu$ می‌رسیم، که یک تعمیم فضا‐زمان از تقارن گالیله‌ای $\dot{x} \rightarrow \dot{x} + v$ از مکانیک غیرنسبیتی است. به‌این‌ترتیب به‌طور طبیعی به تبدیل گالیله‌ای $\pi \rightarrow \pi + b.x$ دست یافتیم که π گالیلئون نامیده می‌شود.

جملات لاگرانژی با توجه به رابطه‌ی (۳.۲)، باید شامل n تا π و $۲n - ۲$ مشتقات فضا‐زمان باشند. ساده‌ترین مثال در $n = ۱$ داده می‌شود جایی که خواهیم داشت: $\mathcal{L}_۱ = \pi$ [۳]. در مرتبه‌ی nام

[۲] ghost

[۳] tadpole

در π، ساختار کلی یک جمله‌ی لاگرانژی ناوردای گالیله‌ای به‌صورت $(\partial^2\pi)^{n-2}\partial\pi\partial\pi$ خواهد بود. بدین ترتیب تا مرتبه‌ی پنجم جملات ناوردای گالیله‌ای به شکل زیر به‌دست می‌آیند

$$\mathcal{L}_1 = \pi, \tag{۴.۲}$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}\partial\pi.\partial\pi, \tag{۵.۲}$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{2}[\Pi]\partial\pi.\partial\pi, \tag{۶.۲}$$

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{4}([\Pi]^2\partial\pi.\partial\pi - 2[\Pi]\partial\pi.\Pi.\partial\pi - [\Pi^2]\partial\pi.\partial\pi + 2\partial\pi.\Pi^2.\partial\pi), \tag{۷.۲}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{5}(&[\Pi]^3\partial\pi\partial\pi - 3[\Pi]^2\partial\pi.\Pi.\partial\pi \\ &- 3[\Pi][\Pi^2]\partial\pi.\partial\pi + 6[\Pi]\partial\pi.\Pi^2.\partial\pi \\ &+ 2[\Pi^3]\partial\pi.\partial\pi + 3[\Pi^2]\partial\pi.\Pi.\partial\pi \\ &- 6\partial\pi.\Pi^3.\partial\pi).\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

در روابط بالا از تعاریف $\Pi^\mu_\nu \equiv \partial^\mu\partial_\nu\pi$، $[\Pi]\partial\pi.\partial\pi \equiv \Box\pi\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi$ و $[\Pi^n] \equiv (\partial_\mu\partial_\nu\pi)^n$ استفاده شده است. برای هدف ما روش بهتر کار با معادلات حرکت است که فقط مشتقات مرتبه‌ی دوم در معادلات ظاهر می‌شوند. با استفاده از رابطه‌ی $\varepsilon_i \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_i}{\delta\pi}$، به‌دست می‌آوریم

$$\varepsilon_1 = 1, \tag{۹.۲}$$

$$\varepsilon_2 = \Box\pi, \tag{۱۰.۲}$$

$$\varepsilon_3 = (\Box\pi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2, \tag{۱۱.۲}$$

$$\varepsilon_4 = (\Box\pi)^3 - 3\Box\pi(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2 + 2(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^3, \tag{۱۲.۲}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_5 = &(\Box\pi)^4 - 6(\Box\pi)^2(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2 + 8\Box\pi(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^3 \\ &+ 3[(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2]^2 - 6(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^4.\end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

لاگرانژی کامل برای π یک ترکیب خطی از ناوردایی‌های بالاست

$$\mathcal{L}_\pi = \sum_{i=1}^{5} c_i \mathcal{L}_i, \tag{۱۴.۲}$$

که c_iها ضرایب کلی هستند. به همین ترتیب برای معادلات حرکت خواهیم داشت

$$\varepsilon \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_\pi}{\delta \pi} = \sum_{i=1}^{5} c_i \varepsilon_i = -T^\mu{}_\mu. \tag{۱۵.۲}$$

۲-۳ تجزیه و تحلیل فنی

حال می‌خواهیم وجود جواب‌های شتاب خودبه‌خودی خوش‌رفتار را بررسی کنیم. منظور ما از شتاب خودبه‌خودی، جواب‌هایی برای π است که مرتبط با فضای دوسیته و تانسور انرژی تکانه صفر هستند. شکل مناسب برای π را در فضای دوسیته به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\pi_{ds}(x) = -\frac{1}{4} H^2 x^\mu x_\mu, \qquad \partial_\mu \partial_\nu \pi_{ds} = -\frac{1}{2} H^2 \eta_{\mu\nu}, \tag{۱۶.۲}$$

که برای به‌دست آوردن این روابط $H_0 = \dot{H}_0 = 0$ در نظر گرفته شده است، زیرا تانسور انرژی تکانه صفر است و همچنین چون به‌دنبال یک حل دوسیته هستیم $\dot{H}$ را برابر صفر قرار داده‌ایم. انحنای H^2 توسط معادلات حرکت (۱۵.۲) با $T^\mu{}_\mu = 0$ تعیین می‌شود. با جایگذاری (۱۶.۲) در معادلات حرکت، رابطه‌ای جبری به‌صورت زیر برای H^2 به‌دست می‌آید

$$c_1 - 2c_2 H^2 + 3c_3 H^4 - 3c_4 H^6 + \frac{3}{2} c_5 H^8 = 0. \tag{۱۷.۲}$$

سپس فرض می‌کنیم یک حل دوسیته داریم می‌خواهیم پایداری این جواب و دینامیک اختلالاتی که تقریب دوسیته را تغییر نمی‌دهند بررسی کنیم. معادلات حرکت برای اختلالات باید ترکیبی خطی از ناورداهای گالیله‌ای باشند

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\pi}{\delta \pi}\Big|_{ds} = \sum_{i=2}^{5} d_i \varepsilon_i. \tag{۱۸.۲}$$

d_i ترکیباتی خطی از کمیت‌های c_i با ضرایب وابسته به H^2 هستند. تا زمانی که علاقه‌مند به حل‌هایی با تقریب دوسیته هستیم، می‌توانیم ضرایب لاگرانژ c_i را فراموش کرده، وانمود کنیم در فضای تخت هستیم (فعلاً با فرم هموردای معادلات کاری نداریم) و دینامیک اختلالات را با ضرایب اختیاری d_i پارامتربندی کنیم. تعیین پارامتر هابل در فضای دوسیته هیچ قیدی روی ضرایب d_i اعمال نمی‌کند و همیشه یک حل از رابطه‌ی (۱۷.۲)، با H^2 مثبت وجود خواهد داشت.

برای این‌که مدل گالیله‌ای ما توصیف درستی از جهان را دارا باشد باید آزمایشات منظومه‌ی شمسی را تصدیق کند. باید نشان دهیم که حل دوسیته در برابر اختلالات کوچک پایدار است. علاوه براین در مورد این ساختار دوسیته باید جواب‌های متقارن کروی وجود داشته باشد. همچنین باید میدان π تولید شده توسط منابع مادی را بتوان توسط این منابع مادی توصیف کرد. این چارچوب همچنین باید عاری از هر گونه ناپایداری شبح باشد. و در نهایت نیازمند این هستیم که اختلالات کوچک مربوط به این جواب‌ها "ذراتی با سرعت بالاتر از نور"[۴] را انتشار ندهند که البته این مدل در مورد آخر با شکست مواجه شده و ذراتی با سرعت بالاتر از نور را انتشار می‌دهد.

برای تقارن کروی $\pi(r)$، معادلات حرکت به‌شدت ساده می‌شوند. در ساختار شعاعی برای این‌که معادلات حرکت به فرم مشتقات مرتبه دو باقی بمانند از تعاریف $\partial\pi \sim \pi'$ و $\partial\partial\pi \sim \pi'' \sim \frac{\pi'}{r}$ استفاده می‌کنیم. چون تقارن کروی داریم مشتقات به‌طور موثر، مشتق نسبت به مکان هستند و همچنین فرض می‌کنیم که π به اندازه‌ی کافی کندتغییر باشد، که در نتیجه مشتق دوم نسبت به r تقریباً برابر با $\frac{\pi'}{r}$ خواهد بود. زیرا حضور π''، در روند محاسبات به‌دست آوردن معادلات حرکت، منجر به ایجاد مشتقات مرتبه ۳ می‌شود و این در حالی است که فقط مشتقات مرتبه‌ی ۲ مجاز هستند. در نتیجه برای معادلات حرکت (۱۰.۲) تا (۱۳.۲) خواهیم داشت

$$\varepsilon_۲ \longrightarrow \frac{۱}{r^۲}\frac{d}{dr}(r^۲\pi'), \tag{۱۹.۲}$$

$$\varepsilon_۳ \longrightarrow \frac{۲}{r^۲}\frac{d}{dr}(r\pi'^۲), \tag{۲۰.۲}$$

$$\varepsilon_۴ \longrightarrow \frac{۲}{r^۲}\frac{d}{dr}(\pi'^۳), \tag{۲۱.۲}$$

$$\varepsilon_۵ \longrightarrow ۰. \tag{۲۲.۲}$$

صفر شدن جمله‌ی آخر به این دلیل است که برای π مستقل از زمان، ماتریس $\partial_\mu\partial_\nu\pi$ دارای رتبه‌ی ۳ می‌باشد، بدین ترتیب جملات ناوردای مرتبه‌ی ۴ صفر می‌شوند. برای یک منبع مادی در مبدا داریم

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_\pi}{\delta\pi} &= \sum_i d_i\varepsilon_i \\ &= \frac{۱}{r^۲}\frac{d}{dr}r^۳[d_۲(\frac{\pi'}{r}) + ۲d_۳(\frac{\pi'}{r})^۲ + ۲d_۴(\frac{\pi'}{r})^۳] \\ &= M\delta^۳(\vec{r}).\end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

[۴] superluminality

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا به‌دست می‌آوریم

$$d_۲(\frac{\pi'}{r}) + ۲d_۳(\frac{\pi'}{r})^۲ + ۲d_۴(\frac{\pi'}{r})^۳ = \frac{M}{۴\pi r^۳}. \qquad (۲۴.۲)$$

۲-۳-۱ بررسی وجود جواب

با تغییر r از ۰ تا بی‌نهایت در سمت راست رابطه‌ی (۲۴.۲)، همیشه مقادیر حقیقی مثبت اندازه‌گیری می‌شود. چندجمله ای سمت چپ (۲۴.۲) را با تعریف $y = \frac{\pi'}{r}$، با $p(y)$ معرفی می‌کنیم

$$p(y) \equiv d_۲y + ۲d_۳y^۲ + ۲d_۴y^۳. \qquad (۲۵.۲)$$

رابطه‌ی (۲۵.۲) یک رابطه‌ی مثبت است و برای به‌دست آوردن y باید بتوان آن را معکوس کرد. در نتیجه شرط وجود داشتن جواب معکوس‌پذیر بودن $p(y)$ است. می‌دانیم که در فضای دوسیته برای پایدار بودن جواب در مقابل اختلالات کوچک، $d_۲$ ضریب جمله‌ی جنبشی $-\frac{۱}{۲}(\partial\pi)^۲$ در لاگرانژی اختلالات باید مثبت باشد[5]. اکنون دور از منبع جایی که r بزرگ است (yکوچک است)، جمله‌ی خطی یعنی جمله‌ی اول در $p(y)$ غالب می‌شود. در نتیجه در y کوچک، p مثبت منجر به y مثبت خواهد شد. اگر $p'(y)$ مخالف صفر شود $p(y)$ معکوس‌پذیر خواهد بود. بدین ترتیب با حرکت به‌سوی yهای بزرگتر (rکوچک)، p باید افزایش پیدا کند.

$$p'(y) = d_۲ + ۴d_۳y + ۶d_۴y^۲ > ۰, \qquad \forall y > ۰. \qquad (۲۶.۲)$$

در صورت برقراری رابطه‌ی بالا یک حل شعاعی وجود خواهد داشت. در yهای بزرگ (rهای کوچک)، جمله‌ی درجه‌ی ۲ در $p'(y)$ غالب می‌شود. بنابراین $d_۴$ باید غیرمنفی باشد. سپس اگر $d_۳ > -\sqrt{\frac{۳}{۲}d_۲d_۴}$ باشد رابطه‌ی (۲۶.۲)، به ازای هر $y > ۰$ برقرار خواهد بود. در نتیجه جواب‌های متقارن کروی با تقریب دوسیته وجود دارند اگر و فقط اگر قیود زیر را داشته باشیم

$$d_۲ > ۰ \qquad d_۴ \geq ۰ \qquad d_۳ > -\sqrt{\frac{۳}{۲}d_۲d_۴}. \qquad (۲۷.۲)$$

۲-۳-۲ پایداری جواب

اکنون به مطالعه‌ی حل شعاعی $\pi_۰(r)$ در مقابل اختلالات کوچک $\pi = \pi_۰(r) + \varphi$ می‌پردازیم. φ اختلال است و تابعیت تمام مختصات را دارد $\varphi(t, x, y, z)$. با توجه به تقارن جواب داده شده

[5] ضریب جمله‌ی جنبشی برای جلوگیری از به‌وجود آمدن شبح باید مثبت باشد

(تقارن کروی)، لاگرانژی درجه دوم برای اختلالات کوچک به شکل زیر خواهد بود

$$S_\varphi = \frac{1}{2}\int d^4x[K_t(r)(\partial_t\varphi)^2 - K_r(r)(\partial_r\varphi)^2 - K_\Omega(r)(\partial_\Omega\varphi)^2], \qquad (28.2)$$

ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$K_r(r) = p'(y)\big|_{y=\frac{\pi_0'}{r}}, \qquad (29.2)$$

$$K_t = \frac{d_2^2 + 4d_2d_3y + 12(d_3^2 - d_2d_4)y^2 + 24(d_3d_4 - 2d_2d_5)y^3}{d_2 + 4d_3y + 6d_4y^2} + \frac{12(3d_4^2 - 4d_3d_5)y^4}{d_2 + 4d_3y + 6d_4y^2}, \qquad (30.2)$$

$$K_\Omega = \frac{d_2^2 + 2d_2d_3y + (4d_3^2 - 6d_2d_4)y^2}{d_2 + 4d_3y + 6d_4y^2}. \qquad (31.2)$$

برای اینکه جواب در برابر اختلالات طول موج کوتاه پایدار باشد تمام ضرایب K_i برای جلوگیری از ایجاد ناپایداری بولوار_دسر[6] و ناپایداری لاپلاسی باید مثبت باشند.

همان‌گونه که قبلاً ذکر شد ضرایب جنبشی برای جلوگیری از ایجاد ناپایداری باید مثبت باشند، برای این امر صورت کسر در رابطه‌ی K_Ω به ازای $d_3 \geq \sqrt{\frac{3}{2}d_2d_4}$ و همچنین صورت کسر K_t به ازای $d_5 \leq \frac{3}{4}\frac{d_4^2}{d_3}$ باید مثبت باشند. به‌طور خلاصه حل شعاعی با تقریب دوسیه وجود دارد و در برابر اختلالات کوچک پایدار است، اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند

$$d_2 > 0, \qquad d_4 > 0, \qquad d_3 \geq \sqrt{\frac{3}{2}d_2d_4}, \qquad d_5 \leq \frac{3}{4}\frac{d_4^2}{d_3}. \qquad (32.2)$$

۲-۳-۳ بررسی وجود جواب‌هایی با سرعت کمتر از نور

سرعت شعاعی انتشار نوسانات از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$c_r^2 = \frac{K_r}{K_t}. \qquad (33.2)$$

در رابطه‌ی (۲۸.۲)، جمله‌ی $\partial_r\varphi$ مشتق نسبت به مکان $(\dot{x})$ و جمله‌ی $\partial_t\varphi$ مشتق نسبت به زمان $(\dot{t})$ است. بنابراین تقسیم ضرایب آنها برهم، یعنی تقسیم K_r بر K_t، سرعت در راستای r را می‌دهد. با

[6] The Boulware-Deser ghost

توجه به قیود داده شده برای وجود و پایداری جواب در رابطه‌ی (۳۲.۲)، در فواصل دور از منبع به اجبار ذراتی با سرعت بالاتر از نور انتشار می‌یابند. در واقع خواهیم داشت

$$c_r^2 = 1 + 4\frac{d_3}{d_2}y + O(y^2) > 1. \tag{۳۴.۲}$$

در حرکت به‌سوی فواصل کوتاهتر (yبزرگتر)، سرعت انتشار ذرات به کمتر از سرعت نور کاهش می‌یابد[7]. برای اثبات این امر صورت و مخرج رابطه‌ی (۳۳.۲) را در حد فواصل کوتاه از هم کم می‌کنیم

$$\begin{aligned} K_r - K_t = &\ 4d_2d_3y + 4(d_3^2 + 6d_2d_4)y^2 \\ &+ 24(d_3d_4 + 2d_2d_5)y^3 + 48d_3d_5y^4, \end{aligned} \tag{۳۵.۲}$$

که در این رابطه به شرط منفی بودن d_5، جواب منفی خواهد بود که به معنی بزرگتر بودن مخرج کسر و در نتیجه سرعت انتشار کمتر از نور خواهد بود. به‌طور مشابه با سرعت شعاعی در راستای r، برای سرعت انتشار زاویه‌ای داریم

$$c_\Omega^2 = \frac{K_\Omega}{K_t}. \tag{۳۶.۲}$$

که از تقسیم ضرایب $\partial_\Omega\varphi$ بر $\partial_t\varphi$ به‌دست می‌آید. مجدداً با کم کردن صورت و مخرج کسر جواب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} K_\Omega - K_t \propto &-2d_2d_3y - (8d_3^2 - 6d_2d_4)y^2 \\ &- 24(d_3d_4 - 2d_2d_5)y^3 - 12(3d_4^2 - 4d_3d_5)y^4, \end{aligned} \tag{۳۷.۲}$$

در این رابطه نیز به شرط منفی بودن d_5، جواب منفی خواهد بود. در نهایت با پیروی از قیود زیر برای وجود جواب‌هایی دارای پایداری و با سرعت انتشار کمتر از نور، کار خود را به پایان می‌رسانیم

$$d_2 > 0 \qquad d_4 \geq 0 \qquad d_3 \geq \sqrt{\frac{3}{2}d_2d_4} \qquad d_5 < 0. \tag{۳۸.۲}$$

۲-۴ پدیده شناسی

لاگرانژی گالیلئون به‌طور کلی به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{L} = f^2\partial\pi\partial\pi F(\frac{\partial\partial\pi}{H_0^2}). \tag{۳۹.۲}$$

[7] subluminality

f را به عنوان ضریبی ثابت برای اندازه‌گیری جفت‌شدگی بین π و ماده (تانسور انرژی تکانه) در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم یک جمله‌ی برهم کنش بین ماده و π اضافه کنیم. این جمله باید اسکالر باشد و چون π اسکالر است باید در T اسکالر ضرب شود $\frac{1}{f}\pi T^{\mu}{}_{\mu}$. در واقع ضرب $\frac{1}{f}$ در این رابطه برای اطمینان حاصل کردن از تغییر درست π است تا منجر به ضریب $-\frac{1}{2}$ برای جمله‌ی جنبشی $\partial\pi\partial\pi$ شود. همچنین مقیاس f باید کران‌دار باشد، زیرا در محاسبات تعمیم‌یافته با اضافه کردن میدان اسکالر π (جفت کردن میدان با ماده)، نباید جوابی خیلی متفاوت از واقعیت به‌دست آید، بنابراین f را باید به‌گونه‌ای محدود کنیم که قابل قیاس با مشاهدات باشد. در واقع π نمی‌تواند در هر حدی با ماده جفت شود.

در فواصل کمتر از مقیاس هابل تانسور انرژی تکانه ماده نمی‌تواند منجر به انحنای خیلی بزرگتر از H_0^2 شود، زیرا در غیراین‌صورت از FRW خارج شده‌ایم و نظریه خراب است. این ویژگی اشاره به $f \lesssim M_p$ دارد (M_p جرم پلانک است). اکنون نیاز داریم بررسی کنیم که کدام ساختار، خطی یا غیرخطی، دینامیک اختلالات π را در زمینه‌ی کیهانی دوسیته مشخص می‌کنند.

بسیار شبیه به مدل DGP زمانی‌که $\partial\partial\pi \lesssim O(H_0^2)$ است، π رفتار خطی خواهد داشت که در واقع مربوط به نقاطی است که به اندازه‌ی کافی از منبع دور هستند. درحالی‌که $\partial\partial\pi \gtrsim O(H_0^2)$ مرتبط به ساختار غیرخطی واینشتاین[8] است که مرتبط با نقاط نزدیک به منبع می‌باشد. برای به‌دست آوردن یک ایده‌ی کیفی، منبعی با جرم کلی M مرتبط با پتانسیل نیوتنی $h_N \sim \frac{1}{M_p^2}\frac{M}{r} = \frac{R_s}{r}$ را در نظر می‌گیریم. در فواصل به اندازه‌ی کافی بزرگ، جایی که ساختار خطی کار می‌کند و گالیلئون به‌صورت $\pi \sim \frac{1}{f^2}\frac{M}{r} = (\frac{M_p}{f})^2\frac{R_s}{r}$ رفتار می‌کند خواهیم داشت

$$\frac{\partial\partial\pi}{H_0^2} \sim \frac{M_p^2}{f^2}\frac{R_s}{r^3}\frac{1}{H_0^2} = \frac{M_p^2}{f^2}\frac{\mathcal{R}}{H_0^2}, \qquad (۴۰.۲)$$

که $\mathcal{R}$، انحنای ریمان القا شده توسط منبع است. زمانی یک سیستم گرانشی محدود(کران‌دار) خواهیم داشت که جاذبه‌ی گرانشی بر نیروهای مرتبط با انبساط هابل غلبه داشته باشد، یعنی $\mathcal{R} \gtrsim H_0^2$ باشد. رابطه‌ی (۴۰.۲) نشان می‌دهد زمانی‌که $f \lesssim M_p$ باشد برای هر سیستم محدود گرانشی π در ساختار غیرخطی واینشتاین است[9].

اندازه‌ی نسبی پتانسیل π و پتانسیل نیوتنی به شکل زیر است:

$$\frac{\pi}{h_N} \sim (\frac{M_p}{f})^{\frac{2}{3}}\frac{H_0^{\frac{4}{3}}r^2}{R_s^{\frac{2}{3}}} = (\frac{M_p}{f}\frac{H_0^2}{\mathcal{R}})^{\frac{2}{3}}. \qquad (۴۱.۲)$$

[8] Vainshtein

[9] چون در این‌حالت صورت رابطه‌ی (۴۰.۲) بزرگتر شده و $\partial\partial\pi \gtrsim O(H_0^2)$ خواهد بود، که نشان دهنده‌ی ساختار غیرخطی در اثر واینشتاین است.

با توجه به رابطه‌ی بالا برای به‌دست آوردن یک کران پایین، چون f در مخرج قرار گرفته است باید داشته باشیم

$$f > M_p. \tag{۴۲.۲}$$

همچنین به عنوان حد بالا داشتیم $f \lesssim M_p$. بنابراین تنها انتخاب ما $f \sim M_p$ خواهد بود [۴].

۲-۵ گالیلئون هموردا

تمام بحث‌ها تا اینجا در مورد یک نظریه‌ی میدان معمولی در فضای تخت بود و همه‌ی تقارن‌های گفته شده نیز در این فضا حاکم بودند. برای این‌که از یک نظریه میدان در فضای تخت به یک نظریه میدان گرانشی در فضای خمیده دست پیدا کنیم، یک روش تبدیل مشتقات جزئی به مشتقات هموردا است . با انجام این تبدیل، مشتقات مرتبه‌ی دوم زمانی که قبلا ظاهر نمی‌شدند اکنون به‌وجود می‌آیند و این به دلیل از بین رفتن تقارن گالیله‌ای است. باوجود دور ریختن تقارن گالیله‌ای همچنان می‌خواهیم نظریه حداکثر از مشتق مرتبه دوم زمانی باشد یعنی ناپایداری استروگردسکی[۱۰] نداشته باشد.

به این منظور جملاتی را که در آن‌ها مشتق مرتبه دوم زمانی به‌وجود می‌آید از اصل جمله کم می‌کنیم. بنابراین چیزی که در نهایت خواهیم داشت حداکثر از مرتبه‌ی دوم زمانی خواهد بود. چنین نظریه‌ای ناپایداری شبح نخواهد داشت، اما تقارن گالیله‌ای نیز در آن از بین رفته است. با این حال همچنان این نظریه گالیلئون هموردا نامیده می‌شود [۶].

برای نشان دادن این نتایج در مورد گالیلئون هموردا به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

۲-۶ جفت شدگی با π

تعمیمی از نسبیت عام را در فواصل طولانی برای میدان‌های گرانشی ضعیف در نظر می‌گیریم که در آن انحرافات از نسببیت عام، منجر به یک درجه‌ی آزادی اسکالر جفت شده به متریک می‌شوند. در مرتبه‌ی دو، کنش $\sqrt{-g}R$ را با کنش جفت شده با π به‌صورت زیر جایگزین می‌کنیم

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}M_{PL}^2\sqrt{-g}R + \mathcal{L}_\pi + \pi T^\mu{}_\mu\right] + S_M. \tag{۴۳.۲}$$

جمله‌ی اول رابطه‌ی بالا کنش اینشتین هیلبرت است. جملات بعدی قبلا در بخش ۲-۱ معرفی شده‌اند.

[۱۰] Ostrogradski

۲-۶-۱ جفت شدگی کمینه در برابر جفت شدگی غیرکمینه‌ی گالیلئون

لاگرانژی‌های $\mathcal{L}_4$ و $\mathcal{L}_5$ را در فضای خمیده با تبدیل مشتقات جزئی به مشتقات هموردا تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 = {} & (\Box\pi)^2(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu}) - 2(\Box\pi)(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu}) \\ & - (\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu})(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho}) + 2(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu\rho}\pi^{;\rho}),\end{aligned} \tag{44.2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5 = {} & (\Box\pi)^3(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu}) - 3(\Box\pi)^2(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu}) - 3(\Box\pi) \\ & \times (\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu})(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho}) + 6(\Box\pi)(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu\rho}\pi^{;\rho}) \\ & + 2(\pi^{\nu}_{;\mu}\pi^{\rho}_{;\nu}\pi^{\mu}_{;\rho})(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda}) + 3(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}) \\ & \times (\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\lambda}\pi_{;\lambda}) - 6(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu\rho}\pi^{;\rho\lambda}\pi_{;\lambda}).\end{aligned} \tag{45.2}$$

اکنون مورد $\mathcal{L}_4$ را بررسی می‌کنیم. معادلات حرکت را برای $\mathcal{L}_4$، با وردش‌گیری نسبت به π به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 = {} & 2(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\rho}{}^{\rho} - \pi_{;\nu\rho}{}^{\nu\rho}) + 2\pi^{;\mu}\pi^{;\nu}(2\pi_{;\mu\nu\rho}{}^{\rho} \\ & - \pi_{;\mu\nu\rho}{}^{\rho} - \pi_{;\rho}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}) + 10(\Box\pi)\pi^{;\mu}(\pi_{;\mu\nu}{}^{\nu} - \pi_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\mu}) \\ & + 12\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}(\pi_{;\rho}{}^{\rho}{}_{\nu} - \pi_{;\nu\rho}{}^{\rho}) + 8\pi^{;\mu}\pi^{;\nu\rho}(\pi_{;\nu\rho\mu} \\ & - \pi_{;\mu\nu\rho}) - 4(\Box\pi)^3 - 8(\pi_{;\mu}{}^{\nu}\pi_{;\nu}{}^{\rho}\pi_{;\rho}{}^{\mu}) \\ & + 12(\Box\pi)(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}),\end{aligned} \tag{46.2}$$

که در این رابطه دو جمله‌ی اول شامل مشتقات مرتبه‌ی چهارم، سه جمله‌ی بعد شامل مشتقات مرتبه‌ی سوم و سه جمله‌ی آخر شامل مشتقات مرتبه‌ی دوم می‌باشند. با جابه‌جایی مشتقات و استفاده از تانسور انحنا می‌توانیم رابطه‌ی بالا را به‌شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 = {} & -4(\Box\pi)^3 - 8(\pi_{;\mu}{}^{\nu}\pi_{;\nu}{}^{\rho}\pi_{;\rho}{}^{\mu}) + 12(\Box\pi) \\ & \times (\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}) - (\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu}R^{;\nu}) \\ & + 2(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\pi_{;\rho}R^{\mu\nu;\rho}) + 10(\Box\pi)(\pi_{;\mu}R^{\mu\nu}\pi_{;\nu}) \\ & - 8(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}R_{\nu\rho}\pi^{;\rho}) - 2(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu\rho}R^{\nu\rho}) \\ & - 8(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\pi_{;\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma}),\end{aligned} \tag{47.2}$$

که فقط شامل مشتقات تانسور ریچی و اسکالر ریچی است، بدین ترتیب رابطه‌ی بالا شامل مشتقات مرتبه‌ی سوم متریک خواهد بود. روشی برای از بین بردن این مشتقات مرتبه‌ی بالا یک جفت‌شدگی

غیرکمینه به متریک است که به‌صورت ترکیبی خطی از دو جمله‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{L}_{۴,۱} = (\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu}\pi^{;\nu})R, \tag{۴۸.۲}$$

$$\mathcal{L}_{۴,۲} = (\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})(\pi_{;\mu}R^{\mu\nu}\pi_{;\nu}). \tag{۴۹.۲}$$

در واقع ترکیبی منحصربه‌فرد از دو رابطه‌ی بالا به‌صورت $\mathcal{L}_{۴,۲} - \frac{۱}{۲}\mathcal{L}_{۴,۱}$ وجود دارد که با اضافه کردن آن به $\mathcal{L}_{۴}$، تمام مشتقات مرتبه‌ی سوم π در معادلات حرکت از بین می‌روند. با محاسبه‌ی

$$\mathcal{L}_{۴,۲} - \frac{۱}{۲}\mathcal{L}_{۴,۱} = (\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})(\pi_{;\mu}G^{\mu\nu}\pi_{;\nu})$$

کنش غیر کمینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$S_{۴}^{nonmin} = \int d^{۴}x\sqrt{-g}(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})(\pi_{;\mu}G^{\mu\nu}\pi_{;\nu}). \tag{۵۰.۲}$$

معادلات حرکت π را برای این کنش غیرکمینه به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{۴} &= -۴(\Box\pi)^{۳} - ۸(\pi_{;\mu}{}^{\nu}\pi_{;\nu}{}^{\rho}\pi_{;\rho}{}^{\mu}) \\ &+ ۱۲(\Box\pi)(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}) + ۲(\Box\pi)(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})R \\ &+ ۴(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;nu})R + ۸(\Box\pi)(\pi_{;\mu}R^{\mu\nu}\pi_{;\nu}) \\ &- ۴(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})(\pi_{;\mu\nu}R^{\mu\nu}) - ۱۶(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}R_{\rho\nu}\pi^{;\rho}) \\ &- ۸(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\pi_{;\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma}). \end{aligned} \tag{۵۱.۲}$$

معادله حرکت به‌دست‌آمده حداکثر از مشتقات مرتبه دوم می‌باشد. کنش کلی برای لاگرانژی $\mathcal{L}_{۴}$ را با اضافه کردن کنش غیر کمینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S_{۴}^{nonmin} + S_{۴} = \int d^{۴}x\sqrt{-g}(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})\Big[&۲(\Box\pi)^{۲} \\ &- ۲(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}) - \frac{۱}{۲}(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})R\Big]. \end{aligned} \tag{۵۲.۲}$$

با محاسبه‌ی تانسور انرژی تکانه از رابطه‌ی $\mathcal{T}_{۴}^{\mu\nu} \equiv (-g)^{-\frac{۱}{۲}}\frac{\delta S_{۴}}{\delta g_{\mu\nu}}$ خواهیم دید که حاصل این محاسبه شامل جملاتی از مرتبه‌ی سوم π خواهد بود که با اضافه کردن جفت‌شدگی غیرکمینه‌ی (۵۰.۲)، این

جملات از بین می‌روند و تانسور انرژی تکانه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{۴}^{\prime\mu\nu} &= ۴\Box(\pi)\pi_{;\rho}\Big[\pi^{;\mu}\pi^{;\rho\nu} + \pi^{;\nu}\pi^{;\rho\mu}\Big] - ۲(\Box\pi)^{۲}(\pi^{;\mu}\pi^{;\nu}) \\ &+ ۲(\Box\pi)(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})(\pi^{;\mu\nu}) + ۴(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\rho}\pi_{;\rho})(\pi^{;\mu\nu}) \\ &- ۴(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\mu})(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\nu}) + ۲(\pi_{;\lambda\rho}\pi^{;\lambda\rho})(\pi^{;\mu}\pi^{;\nu}) \\ &- ۲(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})(\pi^{;\mu}{}_{\rho}\pi^{;\rho\nu}) - ۴\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda\rho}\Big[\pi^{;\rho\mu}\pi^{;\nu} + \pi^{;\nu\rho}\pi^{;\mu}\Big] \\ &- (\Box\pi)^{۲}(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})g^{\mu\nu} - ۴(\Box\pi)(\pi^{;\mu\nu}) + ۴(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\rho}\pi_{;\rho})(\pi^{;\mu\nu}) \\ &+ ۴(\pi^{;\mu\nu}) + ۴(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\rho}\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\sigma})(\pi^{;\mu\nu}) + (\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda})(\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\rho\sigma})g^{\mu\nu} \\ &+ (\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda})(\pi^{;\mu}\pi^{;\nu})R - \frac{۱}{۴}(\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda})(\pi^{;\rho}\pi_{;\rho})g^{\mu\nu}R \\ &- ۲(\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda})\pi_{;\rho}\Big[R^{\rho\mu}\pi^{;\nu} + R^{\rho\nu}\pi^{;\mu}\Big] + \frac{۱}{۲}(\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda})(\pi^{;\rho}\pi_{;\rho})R^{\mu\nu} \\ &+ ۲(\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda})(\pi_{;\rho}R^{\rho\sigma}\pi_{;\sigma})g^{\mu\nu} - ۲(\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda})(\pi_{;\rho}\pi_{;\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma}).\end{aligned} \tag{۵۳.۲}$$

با انجام همین روند به نتایج مشابهی برای $\mathcal{L}_{۵}$ خواهیم رسید. کنش کل برای $\mathcal{L}_{۵}$ به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}S_{۵} + S_{۵}^{nonmin} &= \frac{۵}{۲}\int d^{۴}x\sqrt{-g}(\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda})\Big[(\Box\pi)^{۳} - ۳(\Box\pi) \\ &\times (\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}) + ۲(\pi_{;\mu}{}^{\nu}\pi_{;\nu}{}^{\rho}\pi_{;\rho}{}^{\mu}) \\ &- ۶(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}G_{\nu\rho}\pi^{;\rho})\Big].\end{aligned} \tag{۵۴.۲}$$

و در نهایت تانسور انرژی تکانه برای $\mathcal{L}_5$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_5'^{\mu\nu} &= -\frac{5}{2}(\Box\pi)^3(\pi^{;\mu}\pi^{;\nu}) - \frac{5}{2}(\Box\pi)^3(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})g^{\mu\nu} \\
&+ \frac{15}{2}(\Box\pi)^2(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi^{;\mu\nu\circ}) + \frac{15}{2}(\Box\pi)^2\pi_{;\rho}\left[\pi^{;\rho\mu}\pi^{;\nu} + \pi^{;\nu\rho}\pi^{;\mu}\right] \\
&- \frac{15}{2}(\Box\pi)^2(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma})g^{\mu\nu} - 15(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi^{;\mu\sigma}\pi_{;\sigma}{}^{\nu}) \\
&+ 15(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma})(\pi^{;\mu\nu}) + \frac{15}{2}(\Box\pi)(\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\rho\sigma})(\pi^{;\mu}\pi^{;\nu}) \\
&- 15(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\mu})(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\nu}) - 15(\Box\pi)\pi^{;\rho}\pi_{;\rho\sigma}\left[\pi^{;\sigma\mu}\pi^{;\nu} + \pi^{;\sigma\nu}\pi^{;\mu}\right] \\
&+ \frac{15}{2}(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\sigma\lambda})g^{\mu\nu} + 15(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\lambda})g^{\mu\nu} \\
&+ \frac{15}{4}(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi^{;\mu}\pi^{;\nu})R - \frac{15}{2}(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})\pi_{;\sigma}\left[R^{\sigma\mu}\pi^{;\nu} + R^{\sigma\nu}\pi^{;\mu}\right] \\
&+ \frac{15}{2}(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma}R^{\sigma\lambda}\pi_{;\lambda})g^{\mu\nu} - \frac{15}{2}(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma}\pi_{;\lambda}R^{\mu\sigma\nu\lambda}) \\
&- \frac{15}{2}(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\sigma\lambda})(\pi^{;\mu\nu}) + 15(\Box\pi)(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi^{;\mu\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\lambda\nu}) \\
&- 15(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma})(\pi^{;\mu\lambda}\pi_{;\lambda}{}^{\nu}) - 15(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\lambda})(\pi^{;\mu\nu}) \\
&- 5(\pi_{;\rho}{}^{\sigma}\pi^{\lambda}_{;\sigma}\pi_{;\lambda}{}^{\rho})(\pi^{;\mu}\pi^{;\nu}) - \frac{15}{2}(\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\sigma\lambda})\pi_{;\rho}\left[pi^{;\rho\mu}\pi^{;\nu} + \pi^{;\rho\nu}\pi^{;\mu}\right] \\
&+ 15\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\left[\pi^{;\lambda\mu}\pi^{;\nu} + \pi^{;\lambda\nu}\pi^{;\mu}\right] + 15\pi^{;\rho}\pi_{;\rho\lambda}\pi_{;\sigma}\left[\pi^{;\lambda\mu}\pi^{;\sigma\nu} + \pi^{;\lambda\nu}\pi^{;\sigma\mu}\right] \\
&- 5(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma}{}_{\lambda}\pi_{;\lambda}{}^{k}\pi_{;k}{}^{\sigma})g^{\mu\nu} + \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma})(\pi_{;\lambda k}\pi^{;\lambda k})g^{\mu\nu} \\
&- 15(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\lambda k}\pi_{;k})g^{\mu\nu} - \frac{15}{4}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})\pi_{;\sigma}\left[\pi^{;\sigma\mu}\pi^{;\nu} + \pi^{;\sigma\nu}\pi^{;\mu}\right]R \\
&+ \frac{15}{4}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}\pi_{;\lambda})Rg^{\mu\nu} - \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}\pi_{;\lambda})R^{\mu\nu} \\
&- \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma}R^{\sigma\lambda}\pi_{;\lambda})(\pi^{;\mu\nu}) - \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma\lambda}R^{\sigma\lambda})(\pi^{;\mu}\pi^{;\nu}) \\
&+ \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})\pi^{;\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\left[R^{\lambda\mu}\pi^{;\nu} + R^{;\lambda\nu}\pi^{;\mu}\right] + \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})\pi_{;\lambda}\pi_{;\sigma}\left[R^{\lambda\mu}\pi^{;\sigma\nu} + R^{\lambda\nu}\pi^{;\sigma\mu}\right] \\
&+ \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})\pi^{;\sigma}R_{\sigma\lambda}\left[\pi^{;\lambda\mu}\pi^{;\nu} + \pi^{;\lambda\nu}\pi^{;\mu}\right] - 15(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}R_{\lambda k}\pi^{;k})g^{\mu\nu} \\
&+ \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})\pi_{;\sigma}\pi_{;\lambda k}\left[R^{\mu\lambda\sigma k}\pi^{;\nu} + R^{\nu\lambda\sigma k}\pi^{;\mu}\right] - \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})\pi_{;\sigma}\pi_{;\lambda}\left[R^{\mu\sigma\lambda k}\pi_{;k}{}^{\nu} + R^{\nu\sigma\lambda k}\pi_{;k}{}^{\mu}\right] \\
&+ \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})\pi^{;\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\pi_{;k}\left[R^{\mu\lambda\nu k} + R^{\nu\lambda\mu k}\right] - \frac{15}{2}(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho})(\pi_{;\sigma}\pi_{;\lambda}\pi_{;k\tau}R^{\sigma k\lambda\tau})g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{55.2}$$

که همان‌طور که دیده می‌شود رابطه‌ی بالا فقط شامل مشتقات مرتبه دوم π می‌باشد [۶].

فصل ۳

مروری بر سیستم‌های هامیلتونی مقید

با مطالعه‌ی سیستم‌های مقید بررسی نظریه‌های پیمانه‌ای اهمیت ویژه‌ای پیدا کرد. از حدود سال ۱۹۶۰ به بعد اکثر فیزیکدانان به نظریه‌های پیمانه‌ای روی آوردند. این نوع از نظریه‌ها در ساختن مدل‌های کوانتومی بر اساس مدل‌های کلاسیک پیمانه ناوردا، بسیار کارآمد هستند. زیرا مدل‌های کلاسیک قادر نیستند به طور کامل طبیعت را توصیف کنند و برای بررسی دقیق طبیعت باید مدل‌های کوانتومی را درک کنیم.

نظریه‌های پیمانه‌ای شامل قیود نوع اول هستند. لاگرانژی این سیستم‌ها تکین بوده و تکینگی ذاتی در چنین سیستم‌هایی باعث وجود تقارن‌های پیمانه‌ای در آنها می‌گردد. با بررسی‌های انجام شده دریافته‌ایم که تمامی قیود نوع اول مولدهای تبدیل پیمانه‌ای هستند [۲۱].

۳-۱ تبدیلات پیمانه‌ای و آشنایی با تابع مولد

سیستم‌های دینامیکی در چارچوب مکانیک کلاسیک به دو دسته‌ی سیستم‌های مقید و غیرمقید تقسیم می‌شوند. در دستگاه‌های غیرمقید لاگرانژی آنها به گونه‌ای می‌باشد که تمامی جوابهای معادلات حرکت با شرایط اولیه‌ی معین یکتا خواهند بود. بنابراین می‌توانیم با داشتن تنها یک شرط اولیه‌ی معین با مختصه‌ی q و سرعت $\dot{q}$ به‌شکل $(q, \dot{q})$، یک مسیر یکتا برای چنین سیستم‌هایی بیابیم.

اما در مورد سیستم‌های مقید چنین شرایطی حاکم نیست. برای یک دستگاه مقید نمی‌توان یکتایی جواب معادلات حرکت را تضمین کرد. در واقع گاهی با دادن یک شرط اولیه‌ی معین به لاگرانژی سیستم نمی‌توان تنها یک جواب برای معادلات حرکت بدست آورد و حتی امکان دارد بی‌نهایت جواب متفاوت برای معادلات حرکت حاصل شود. در این حالت می‌توان به کمک تبدیلات پیمانه‌ای این

بی‌شمار جواب بدست آمده را به هم مربوط کرد.

۳-۱-۱ تبدیلات پیمانه‌ای

مطالب گفته شده در این بخش با استفاده از مرجع [۲۱] جمع‌آوری شده است. وجود بی‌نهایت جواب مختلف برای معادلات حرکت یک سیستم مقید از تکینگی لاگرانژی این نوع سیستم‌ها ناشی می‌شود. تکینگی لاگرانژی خاصیت ذاتی یک سیستم مقید است. وجود قیود ذاتی در لاگرانژی باعث ظاهر شدن توابع دلخواه زمانی در حل معادلات حرکت می‌گردد.

فرض کنید حالت اولیه‌ی یک دستگاه مقید نوع اول در فضای فاز در لحظه‌ی $t_\circ$ با مجموعه‌ای از $(q_\circ, p_\circ)$ داده شود، که مختصه و تکانه در لحظه‌ی $t_\circ$ می‌باشند. اگر حالت اولیه‌ی سیستم را با $\psi_\circ$ نشان دهیم حالت بعدی دستگاه در زمان t می‌تواند در وضعیت‌های متفاوتی قرار گیرد و تفاوت این مسیرهای مختلف سیستم ناشی از انتخاب‌های مختلف توابع دلخواه زمانی است. تمامی این مسیرهای بدست آمده که نقطه‌ی شروع آنها از حالت اولیه‌ی $\psi_\circ$ می‌باشد، می‌توانند مسیر دستگاه در زمان‌های مختلف در نظر گرفته شوند.

در سیستم غیرمقید یک تناظر یک به یک بین حالت فیزیکی دستگاه و نقاط فضای فاز وجود دارد. این مطلب نتیجه‌ی آن است که در زمان t دستگاه تنها یک مسیر منحصر به فرد دارد. اما نمی‌توان برای یک سیستم مقید آن تناظر یک به یک را داشت. به بیان دیگر هر نقطه‌ی $(q_\circ, p_\circ)$ تعیین کننده‌ی یک حالت فیزیکی دستگاه در فضای فاز است اما وارون این مطلب صادق نیست و هر حالت فیزیکی دستگاه با مجموعه‌ای از نقاط فضای فاز مربوط است. این مجموعه از نقاط با انتخاب‌های متفاوت توابع دلخواه زمانی در معادله‌ی حرکت از یک حالت اولیه به دست می‌آیند.

تبدیل پیمانه‌ای تبدیلی است که به ما این امکان را می‌دهد تا از یک نقطه در فضای فاز با یک حالت فیزیکی مشخص به گونه‌ای جابه‌جا شویم که به یک نقطه‌ی دیگر در فضای فاز که دارای همان حالت فیزیکی است برسیم.

به عبارت دیگر تبدیلات پیمانه‌ای بدون اینکه حالت فیزیکی دستگاه را تغییر دهند تمامی نقاط مختلف فضای فاز که بر اثر انتخاب متفاوت توابع دلخواه زمانی از یک حالت اولیه سرچشمه گرفته‌اند را به یکدیگر تبدیل خواهند کرد. ازآنجا که تحت تبدیلات پیمانه‌ای حل‌های مختلف معادلات حرکت که درآنها تنها توابع دلخواه زمانی متفاوت‌اند به یکدیگر تبدیل می‌شوند، انتظار داریم که تحت تبدیلات پیمانه‌ای کنش کل ناوردا بماند.

حال فرض کنیم تابع دینامیکی مانند F از مختصات فضای فاز در لحظه‌ی $t_\circ$ دارای مقدار $F_\circ$

باشد

$$F(t_\circ) = F_\circ = F(p_\circ, q_\circ). \tag{۱.۳}$$

حال اگر مقدار این تابع را در لحظه‌ی $t_\circ + \delta t$ بخواهیم، با استفاده از بسط تیلور تا مرتبه‌ی اول آن داریم

$$F(t_\circ + \delta t) = F(t_\circ) + \dot{F}\delta t, \tag{۲.۳}$$

که δtیک فاصله‌ی زمانی بی‌نهایت کوچک دلخواه می‌باشد.

با استفاده از رابطه‌ی مشتق زمانی، $\dot{F} = \{F, H_t\}$، رابطه‌ی (۲.۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$F(t_\circ + \delta t) = F(t_\circ) + \{F, H_t\}\delta t. \tag{۳.۳}$$

که رابطه‌ی هامیلتونی کل H_t از یک هامیلتونی H و ترکیب دلخواهی از قیود اولیه‌ی نوع اول ϕ_a ساخته می‌شود

$$H_t = H + v^a\phi_a. \tag{۴.۳}$$

در رابطه‌ی (۴.۳) ضرایب دلخواه v^a را می‌توان هر تابع اختیاری از زمان در نظر گرفت. از این رو ضرایب نامعین لاگرانژ در اینجا کاملا تعیین نمی‌گردند و در دینامیک سیستم توابع دلخواه از زمان وجود دارد. بنابراین اگر دو حل متفاوت داشته باشیم که تفاوت آنها در v^a باشد فیزیک یکسانی را در بر خواهند داشت

$$F(t_\circ + \delta t) = F(t_\circ) + [\{F, H\} + v^a\{F, \phi_a\}]\delta t, \tag{۵.۳}$$

از آنجایی که v^a توابعی دلخواه از زمان هستند اگر همین روند را برای یک تابع دلخواه دیگر مانند $v^{a'}$ تکرار کنیم حاصل چنین خواهد بود

$$\tilde{F}(t_\circ + \delta t) = F(t_\circ) + [\{F, H\} + v^{a'}\{F, \phi_a\}]\delta t. \tag{۶.۳}$$

$\tilde{F}$ نقطه‌ی دیگری در فضای فاز است. تفاوت $F(t_\circ + \delta t)$ و $\tilde{F}(t_\circ + \delta t)$ در انتخاب توابع دلخواه زمانی است، بنابراین حاصل تفاضل این دو رابطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\delta F = \delta v^a\{F, \phi_a\}, \tag{۷.۳}$$

که در آن δv^a تابعی دلخواه و بی‌نهایت کوچک می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a)\delta t. \tag{۸.۳}$$

از رابطه‌ی (۷.۳) دو نکته قابل استنباط می‌باشد

۱.تحت این تبدیل حالت فیزیکی دستگاه عوض نشده است (حالت فیزیکی را هامیلتونی سیستم تعیین می‌کند) و توانستیم دو نقطه از فضای فاز یعنی F و $\tilde{F}$ را با این تبدیل به هم مربوط کنیم، بنابراین تبدیل (۷.۳) یک تبدیل پیمانه‌ای است.

۲.در رابطه‌ی (۷.۳)، ϕ_a ها که همان قیود اولیه‌ی نوع اول سیستم قیدی هستند به عنوان مولدهای تبدیل پیمانه‌ای δF ظاهر شدند. پس می‌توان اذعان داشت که "تمامی قیود اولیه‌ی نوع اول مولدهای تبدیل پیمانه‌ای بی‌نهایت کوچک هستند".

لازم به ذکر است تبدیل (۷.۳) تنها شکل یک تبدیل پیمانه‌ای نیست. می‌توان ترکیب‌هایی از کروشه‌ی پواسون قیود اولیه‌ی نوع اول $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ ویا ترکیب‌هایی از کروشه‌ی پواسون هامیلتونی H با قیود اولیه‌ی نوع اول $\{H, \phi_a\}$ درست کرد که همگی مولدهای تبدیل پیمانه‌ای باشند. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که حاصل کروشه‌ی پواسون هامیلتونی با قیود اولیه الزاما ترکیبی از قیود اولیه‌ی نوع اول نیست. در واقع می‌توان گفت علاوه بر قیود اولیه‌ی نوع اول، قیود ثانویه‌ی نوع اول نیز وجود دارند. به این ترتیب نمی‌توان مولدهای تبدیل پیمانه‌ای را تنها به قیود اولیه‌ی نوع اول محدود دانست و باید آن دسته از قیود ثانویه که از کروشه‌های پواسون ϕ_a ها با یکدیگر حاصل می‌شوند را نیز در نظر گرفت . با توجه به مطالب گفته شده می‌توان فرض دیراک [۲۱] را مطرح کرد

" تمامی قیود نوع اول اعم از اولیه و ثانویه، مولد تبدیلات پیمانه‌ای هستند ."

۳-۱-۲ قیدهای اولیه

نقطه شروع درباره‌ی دینامیک سیستم‌های پیمانه‌ای، رابطه‌ی کنش به فرم زیر است

$$s_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q_n, \dot{q}_n) dt. \tag{۹.۳}$$

در این رابطه لاگرانژی L تابعی از مختصات q_n و سرعت‌های $\dot{q}_n$ در نظر گرفته می‌شود. معادلات کلاسیک حرکت با وردش دلخواه δq حول مسیر حرکت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\delta s_L &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_n (\frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n + \delta \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n})dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_n (\frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\frac{d}{dt}\delta q_n)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_n \Big\{(\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n})\delta q_n dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta q_n\Big\} = 0.\end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\sum_n \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n}\right) = 0, \tag{۱۱.۳}$$

که به معادلات اویلر_لاگرانژ معروف هستند (وردش در نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر صفر است). برای سهولت فرض می‌کنیم لاگرانژی تابع صریحی از زمان نباشد. با معرفی ماتریس هسیان[۱] $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}})$، که مشتق دوم لاگرانژی نسبت به سرعت هاست و با استفاده از رابطه‌ی

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_{n'}}\dot{q}_{n'} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}}\ddot{q}_{n'}, \tag{۱۲.۳}$$

رابطه‌ی (۱۱.۳) را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\ddot{q}^{n'}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'}\frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'}\partial \dot{q}^n}. \tag{۱۳.۳}$$

از معادله بالا در می‌یابیم که می‌توان شتاب سیستم را در هر زمان دلخواه بر حسب مختصه و تکانه‌ها بطور یکتا تعیین کرد، تنها با این شرط که ماتریس هسیان معکوس پذیر باشد یعنی دترمینان آن مخالف صفر شود. ولی اگر دترمینان صفرشود (لاگرانژی را تکین می‌گوییم) معادلات حرکت می‌توانند شامل توابع دلخواهی از زمان باشند. همان‌طور که قبلا گفته شد این ویژگی سیستم‌های پیمانه‌ای است که در جواب عمومی معادله‌ی حرکتشان توابع زمانی دلخواه وجود دارد. بنابراین حالت مطلوب برای این سیستم‌ها حالتی است که ماتریس هسیان معکوس پذیر نباشد.

برای حل معادلات حرکت (۱۳.۳) طرفین رابطه را در معکوس ماتریس هسیان ضرب می‌کنیم و شتاب‌ها را به عنوان تابعی از مختصات و سرعت‌ها به‌دست می‌آوریم.

برای دست‌یابی به فرمول‌بندی هامیلتونی روش معمول به‌دست آوردن سرعت‌ها به‌عنوان توابعی از مختصات و تکانه‌ها، با استفاده از رابطه‌ی زیر است

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}, \tag{۱۴.۳}$$

[۱] hessian matrix

که در عبارت زیر قرار داده و هامیلتونی را به‌دست می‌آوریم

$$H = \sum_n \Big(\dot{q}^n p_n - L\Big). \tag{۱۵.۳}$$

اما این کار وقتی عملی است که رابطه‌ی (۱۴.۳)، که تکانه‌ها را بر حسب مختصات و سرعت‌ها می‌دهد معکوس‌پذیر باشد و بتوان سرعت‌ها را به‌دست آورد. شرط ریاضی این امر آن است که تکانه‌های تعریف شده در (۱۴.۳)، توابعی مستقل از سرعت‌ها باشند و یا به بیان دیگر ماتریس هسیان غیرتکین باشد. بنابراین یک چهره‌ی دیگر لاگرانژی‌های تکین این است که در آنها تکانه‌ها توابع مستقلی نبوده و در نتیجه به طریق معمول نمی‌توان برای آنها تابع هامیلتونی ساخت.

با جایگذاری (۱۴.۳) در (۱۱.۳) داریم

$$\frac{d}{dt}(p_n) = \frac{\partial L}{\partial q_n}, \qquad \dot{p}_n = \frac{\partial L}{\partial q_n}. \tag{۱۶.۳}$$

چنان‌که دیدیم برای یک لاگرانژی تکین، p_n هایی که از رابطه‌ی (۱۴.۳) تعریف می‌شوند، توابع مستقلی از سرعت‌ها (و مختصات) نیستند. در نتیجه می‌توان بین آنها روابطی به‌صورت زیر نوشت که به آن‌ها قیود اولیه‌ی هامیلتونی می‌گوییم

$$\phi_m(q_n, p_n) = ۰, \qquad m = ۱, ..., M. \tag{۱۷.۳}$$

در نوشتن این قیدها از روابط دینامیکی استفاده نشده و تنها تعریف تکانه‌ها مد نظر بوده است. به منظور دست‌یابی به معادلات حرکت هامیلتون، رابطه‌ی (۱۵.۳) را در نظر گرفته و از عبارت کنش(هامیلتونی) نسبت به متغیرهای دینامیکی q و $\dot{q}$ وردش می‌گیریم، به طوری‌که

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_n \Big(\dot{q}^n \delta p_n + p_n \delta \dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\delta \dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n\Big) \\ &= \sum_n \Big(\dot{q}^n \delta p_n + p_n \delta \dot{q}^n - p_n \delta \dot{q}^n - \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n\Big) \\ &= \sum_n \Big(\dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n\Big). \end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

همان طور که دیده می‌شود وردش H، فقط شامل وردش تکانه‌ها و مختصه‌هاست و شامل وردش سرعت‌ها نیست.

از طرفی وردش تابع $H(q,p)$ را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$\delta H(q,p) = \sum_n \Big(\frac{\partial H}{\partial q^n}\delta q^n + \frac{\partial H}{\partial p_n}\delta p_n\Big). \tag{۱۹.۳}$$

سپس با برابر قرار دادن (۱۸.۳) و (۱۹.۳) معادلات زیر به‌دست می‌آیند

$$\sum_n \Big(\frac{\partial H}{\partial q^n}\delta q^n + \frac{\partial H}{\partial p_n}\delta p_n\Big) = \sum_n \Big(\dot{q}^n\delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n\Big), \tag{۲۰.۳}$$

$$\sum_n \Big(\frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n}\Big)\delta q^n + \sum_n \Big(\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n\Big)\delta p_n = \circ.$$

اما بر خلاف نظریه‌های معمول (غیر تکین) در اینجا نمی‌توان از مقایسه روابط (۱۸.۳) و (۱۹.۳) به روابط $\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}$ و $\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$ رسید، زیرا q_n ها و p_nها متغیرهای مستقل از هم نیستند و از روابط قیدی (۱۷.۳) تبعیت می‌کنند. حال ترکیب‌های خطی از قیدها را به هامیلتونی اضافه می‌کنیم.

$$H' = H(q,p) + \sum_m u_m\phi_m. \tag{۲۱.۳}$$

اکنون مجدداً از رابطه‌ی بالا وردش گرفته و از برابر قرار دادن با رابطه‌ی (۱۸.۳) بدست می‌آوریم

$$\delta H' = \sum_n \Big[\Big(\frac{\partial H}{\partial q^n}\delta q^n + \frac{\partial H}{\partial p_n}\delta p_n\Big) + \sum_m \Big(u_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}\delta p_n + u_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}\delta q^n\Big)\Big] \tag{۲۲.۳}$$
$$= \sum_n \Big(\dot{q}^n\delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n}\delta q^n\Big),$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\sum_{m,n}\Big[\delta q^n\Big(\frac{\partial H}{\partial q_n} + \frac{\partial L}{\partial q_n} + u_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}\Big) + \delta p_n\Big(\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n + u_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}\Big)\Big] = \circ, \tag{۲۳.۳}$$

برای صفر شدن رابطه (۲۳.۳) باید ضرایب δq^n و δp_n برابر صفر باشند، زیرا p_n و q_n مختصات کاملاً مستقل از یکدیگر هستند. با دانستن $\dot{p}_n = \frac{\partial L}{\partial q_n}$ معادلات زیر به‌دست می‌آیند

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + \sum_m u_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - \sum_m u_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}. \tag{۲۴.۳}$$

این‌ها تعمیی از معادلات حرکت هامیلتونی معمولی هستند، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که چگونگی تغییر در زمان متغیرهای q وp را توصیف می‌کنند. اما اکنون با ضرایب ناشناخته‌ای درگیر شده‌اند. حال می‌توانیم معادلات هامیلتونی حرکت را دوباره بازنویسی کنیم

$$\dot{q}_n \approx \frac{\partial H'}{\partial p_n}, \qquad \dot{p}_n \approx -\frac{\partial H'}{\partial q_n}. \tag{۲۵.۳}$$

به تساوی که روی سطح قیدی دستگاه برقرار باشد یک تساوی ضعیف گفته می‌شود و آن را با نماد $\approx$ نشان می‌دهیم.

به منظور بررسی نقش u^m در معادلات تحول، راحت ترین راه معرفی کروشه‌ی پواسون است که ما را قادر می‌سازد معادلاتمان را به طور خلاصه بازنویسی کنیم.

۳-۱-۳ کروشه‌ی پواسون

کروشه‌های پواسون ابزار قدرتمندی در فرمول‌بندی هامیلتونی مکانیک کلاسیک هستند. آنها معمولا برای فراهم آوردن یک مسیر مستقیم بین مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی ایجاد می‌شوند. کروشه‌ی پواسون را با معرفی دو تابع f و g در فضای فاز به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\{f,g\} = \sum_n \Big(\frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n}\Big). \tag{۲۶.۳}$$

یکی از کاربردهای کروشه‌ی پواسون تشخیص ثابت حرکت است. برای مثال $f = f(q_i, p_i)$ ثابت حرکت است اگر و فقط اگر برای همه‌ی نقاط در فضای فاز رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$\{f(q_n,p_n), H\} = \circ. \tag{۲۷.۳}$$

رابطه‌ی (۲۷.۳) را به‌صورت زیر اثبات می‌کنیم

$$\frac{df(q_n,p_n)}{dt} = \sum_n \Big(\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}\Big). \tag{۲۸.۳}$$

چنانچه $p = p(t)$ و $q = q(t)$ را جواب معادلات هامیلتون ژاکوبی $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ و $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{df(q,p)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \\ &= \{f, H\}. \end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

برای اینکه f ثابت حرکت باشد باید مشتق آن برابر صفر شود، در نتیجه

$$\frac{df(q,p)}{dt} = \circ, \qquad \{f,H\} = \circ. \tag{۳۰.۳}$$

برای سیستم مقید نیز همین روند را با H' تکرار می‌کنیم و برای اینکه f ثابت حرکت باشد رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت

$$\{f, H'\} = \circ. \tag{۳۱.۳}$$

۳-۱-۴ ویژگی‌های کروشه پواسون

ویژگی‌های کروشه‌ی پواسون را با استفاده از توابع اختیاری f، g و h در فضای فاز با روابط زیر تعریف می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
&(a)\quad \{f,g\} = -\{g,f\}. \\
&(b)\quad \{f+g,h\} = \{f,h\} + \{g,h\}. \\
&(c)\quad \begin{cases} \{f,gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h. \\ \{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g \end{cases} . \\
&(d)\quad \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = \circ.
\end{aligned}
\tag{۳۲.۳}
$$

برای هر تابع فضای فاز $g(q,p)$ با هامیلتونی مقید، تحول زمانی به‌صورت زیر است

$$
\begin{aligned}
\dot{g} &= \sum_n \left(\frac{\partial g}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n}\dot{p}_n\right) \\
&= \sum_{m,n} \Big[\frac{\partial g}{\partial q_n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}\right) - \frac{\partial g}{\partial p_n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_n} + u^m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}\right)\Big] \\
&= \sum_{m,n} \Big[\left(\frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q_n}\right) + u^m\left(\frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial p_n}\frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}\right)\Big] \\
&= \{g,H\} + \sum_m u^m\{g,\phi_m\},
\end{aligned}
\tag{۳۳.۳}
$$

که معادل است با

$$
\begin{aligned}
\dot{g} &= \{g,H'\} \\
&= \sum_m \Big[\{g,H+u^m\phi_m\} = \{g,H\} + \{g,u^m\}\phi_m + u^m\{g,\phi_m\}\Big] \\
&= \{g,H\} + \sum_m u^m\{g,\phi_m\}.
\end{aligned}
\tag{۳۴.۳}
$$

ضریب ϕ_m در جمله‌ی $\phi_m\{g,u^m\}$ صفر است.

با استفاده از کروشه‌ی پواسون می‌توانیم معادلات حرکت را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^n &\approx \{q^n,H'\}, \\
\dot{p}_n &\approx \{p_n,H'\}.
\end{aligned}
\tag{۳۵.۳}
$$

برای اثبات رابطه‌ی (۳.۳۵) به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}\{q^n, H(q,p)\} &= \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} = \dot{q}^n,\\ \{p_n, H(p,q)\} &= -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} = \dot{p}_n.\end{aligned} \tag{۳.۳۶}$$

۳-۱-۵ قیدهای نوع اول و نوع دوم

متغیر دینامیکی $R(q,p)$ یک قید نوع اول است اگر کروشه‌ی پواسون آن با همه‌ی قیدهای دیگر یعنی ϕها صفر باشد

$$\{R, \phi_j\} \approx ۰, \qquad j = ۱, ..., J. \tag{۳.۳۷}$$

که J نشان دهنده‌ی تعداد قیدها است. در صورت غیر صفر بودن رابطه‌ی بالا R قید نوع دوم است (اگر حداقل یک قید وجود داشته باشد که کروشه‌ی پواسون آن با همه‌ی ϕ ها صفر نباشد، آن قید نوع دوم است). اگر R را قید نوع اول در نظر بگیریم باید یک تساوی قوی از بعضی ترکیبات خطی از ϕها باشد

$$\{R, \phi_j\} = r_j^{j'} \phi_{j'}. \tag{۳.۳۸}$$

هر ترکیب خطی از قیدها قید دیگری است، اگر ما ترکیبی خطی از قیدهای نوع اول ایجاد کنیم قید نوع اول دیگری به‌دست خواهیم آورد. یکی از خصوصیات قیدهای نوع اول این است که کروشه‌ی پواسون دو قید نوع اول همچنان نوع اول است. اگر توابع F و G نوع اول باشند داریم

$$\{F, \phi_j\} = f_j^{j'} \phi_{j'}, \qquad \{G, \phi_j\} = g_j^{j'} \phi_{j'}, \tag{۳.۳۹}$$

$$\begin{aligned}\{\{F,G\}, \phi_j\} &= \{F, \{G, \phi_j\}\} - \{G, \{F, \phi_j\}\}\\ &= \{F, g_j^{j'} \phi_{j'}\} - \{G, f_j^{j'} \phi_{j'}\}\\ &= \{F, g_j^{j'}\}\phi_{j'} + g_j^{j'} f_{j'}^{j''} \phi_{j''}\\ &- \{G, f_j^{j'}\}\phi_{j'} - f_j^{j'} g_{j'}^{j''} \phi_{j''} \approx ۰.\end{aligned} \tag{۳.۴۰}$$

از صفر شدن رابطه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت که ترکیب خطی قیدهای نوع اول با سایر قیدها، قید نوع اول خواهد بود.

۳-۲ قیدهای ثانویه

حرکت دستگاه در فضای فاز باید چنان باشد که اگر در لحظه‌ی شروع حرکت روی سطح قیدی واقع شد نقاط بعدی مسیر نیز روی سطح قیدی واقع شوند. به عبارتی مشتق کامل زمانی قیدها باید صفر شود

$$\dot{\phi_\alpha} = \{\phi_\alpha, H'\} \approx \circ. \tag{۴۱.۳}$$

در رابطه‌ی بالا ϕ_α قیدهای اولیه‌ی نوع اول هستند و همان‌طور که اشاره شد علامت $\approx$ به معنای تساوی ضعیف روی سطح قیدی دستگاه است. ممکن است رابطه‌ی فوق به تعیین ضرایب نامعین لاگرانژ بر حسب مختصات فضای فاز و یا ظهور قیدهای جدید تحت عنوان قیدهای ثانویه منجر شود. در ادامه شرط سازگاری زمانی باید برای قیدهای جدید نیز در نظر گرفته شود. به این ترتیب اگر ضرایب نامعین لاگرانژ به دست نیاید و یا شرط سازگاری زمانی بطور اتحادی برقرار نشود، باز قیدهای جدیدی به دست می‌آیند. بررسی سازگاری زمانی تا جایی ادامه می‌یابد تا همه‌ی قیدهای سیستم به‌دست آیند.

$$\dot{\phi}_\alpha = \{\phi_\alpha, H'\} = \{\phi_\alpha, H\} + u_m\{\phi_\alpha, \phi_m\}. \tag{۴۲.۳}$$

واضح است که ضرایب نامعین لاگرانژ وقتی قابل محاسبه‌اند که کروشه‌ی پواسون $\{\phi_\alpha, \phi_m\}$ حتی به طور ضعیف نیز صفر نباشد. همان‌گونه که قبلا ذکر شد در صورت غیر صفر بودن کروشه‌ی پواسون قیدها با یکدیگر، دستگاه حاوی قیدهای نوع دوم است در غیر این صورت سیستم حاوی قیدهای نوع اول خواهد بود.

وقتی $\{\phi_\alpha, \phi_m\}$ صفر شود قیدهای ثانویه داریم و باید این قیدها را به هامیلتونی اضافه کرده و مجدداً تحول زمانی حساب کنیم. در نهایت قیدهای به‌دست آمده را دوبه‌دو بررسی می‌کنیم، قیدی که با همه‌ی قیدهای دیگر صفر شود نوع اول است و در غیر این‌صورت، اگر کروشه‌ی پواسون آن حتی با یکی از قیدها صفر نشد نوع دوم است.

قیدهای نوع اول هر کدام دو درجه آزادی از درجات آزادی سیستم کم می‌کنند، یعنی زوج بودن تعداد درجات آزادی در فضای فاز را خراب نمی‌کنند ولی قیدهای نوع دوم هر کدام یک درجه آزادی کم می‌کنند در نتیجه می‌خواهیم تعدادشان زوج باشد.

۳-۲-۱ قیدها روی ضریب لاگرانژ

فرض کنیم مجموعه‌ای کامل از قیدهای $\dot{g} \approx \{g, H'\}$ داریم. می‌توانیم به مطالعه‌ی قیدها روی ضریب لاگرانژ u_m، به منظور به‌دست آوردن رابطه‌ای برای هامیلتونی کلی بپردازیم. این قیدها به

شکل زیر هستند

$$\{\phi_j, H\} + u^m\{\phi_j, \phi_m\} \approx ۰, \qquad \begin{cases} m = ۱, ..., M \\ j = ۱, ..., J. \end{cases} \tag{۴۳.۳}$$

می‌توانیم (۴۳.۳) را به عنوان مجموعه‌ای از J معادله خطی ناهمگن در Mتا u^m ناشناخته که $(M \leq J)$ در نظر بگیریم، با ضرایبی که توابعی از q_n ها و p_n ها هستند. J تعداد همه‌ی قیدهای سیستم و M تعداد قیدهای اولیه می‌باشند.

راه حل کلی برای (۴۳.۳) به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$u^m = U^m + V^m, \tag{۴۴.۳}$$

که U^m جواب خصوصی معادله‌ی ناهمگن (۴۳.۳) است و V^m کلی‌ترین جواب سیستم همگن مرتبط است که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$V^m\{\phi_j, \phi_m\} \approx ۰. \tag{۴۵.۳}$$

کلی ترین V^m، ترکیبی خطی به‌صورت $a = ۱, ..., A \quad , v^a V_a^m$ در نظر گرفته می‌شود، که A تعداد جواب‌های همگن است. بنابراین راه حل کلی (۴۳.۳) بر حسب ضرایب v^a که به طور کلی اختیاری هستند به شکل زیر است:

$$u^m = U^m + v^a V_a^m. \tag{۴۶.۳}$$

در نتیجه می‌توانیم هامیلتونی کلی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_{total} = H + U^m\phi_m + v^a V_a^m \phi_m. \tag{۴۷.۳}$$

و با در نظر گرفتن H_{total} معادلات حرکت به شکل زیر ساده می‌شوند

$$\dot{g} \approx \{g, H_{total}\}. \tag{۴۸.۳}$$

۳-۳ یک مثال نقض بر فرض دیراک

بر اساس فرض دیراک تمامی قیدهای نوع اول اعم از اولیه و ثانویه، مولد تبدیلات پیمانه‌ای هستند. در این بخش سیستمی را بررسی می‌کنیم که فرض دیراک را نقض می‌کند. این سیستم توسط لاگرانژی زیر توصیف می‌شود

$$L = \frac{۱}{۲}e^y(\dot{x})^۲. \tag{۴۹.۳}$$

x و y متغیرهای سیستم هستند. اکنون تکانه‌های سیستم را محاسبه می‌کنیم

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^y \dot{x}, \qquad p_y \approx \circ. \tag{۵۰.۳}$$

در نتیجه p_y قید اولیه‌ی هامیلتونی است. یک قید ثانویه نیز وجود دارد به نحوی‌که

$$\dot{p}_y \approx \circ \qquad \dot{p}_y \approx \{H_T, p_y\}. \tag{۵۱.۳}$$

برای به‌دست آوردن تحول زمانی $\dot{p}_y$ ابتدا باید H_T را حساب کنیم

$$H = \sum_{i=۱}^{۲} p_i \dot{q}_i - L \tag{۵۲.۳}$$

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L \\ &= \frac{۱}{۲} p_x^۲ e^{-y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_T &= H + u_۱ p_y + u_۲ p_x \\ &= \frac{۱}{۲} p_x^۲ e^{-y} + u_۱ p_y + u_۲ p_x. \end{aligned} \tag{۵۳.۳}$$

هامیلتونی باید بر حسب p و q باشد، در نتیجه

$$H = \frac{۱}{۲} p_x^۲ e^{-y}, \tag{۵۴.۳}$$

$$H_T = \frac{۱}{۲} p_x^۲ e^{-y} + u_۱ p_y + u_۲ p_x. \tag{۵۵.۳}$$

حال تحول زمانی را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \dot{p}_y &\approx \{H_T, p_y\} = \{H, p_y\} + u_۱\{p_y, p_y\} + u_۲\{p_x, p_y\} \approx \circ \\ &\approx -\frac{۱}{۲} p_x^۲ e^{-y} \approx \circ, \end{aligned} \tag{۵۶.۳}$$

در نتیجه داریم

$$p_x^۲ \approx \circ, \qquad p_x \approx \circ,$$

در نتیجه p_x قید ثانویه است. از فرمول تحول زمانی $\{H_T, p_x\}$ قید دیگری به دست نمی‌آید بنابراین تنها قیود سیستم همان p_x و p_y هستند. کروشه‌ی پواسون $\{p_x, p_y\}$ صفر است بنابراین هر دو قید سیستم نوع اول هستند، اگرچه فقط p_y تبدیل پیمانه‌ای تولید می کند. بنابراین ویژگی حدس زده شده توسط دیراک برای مدل بالا جواب نمی‌دهد.

اما به نظر می‌رسد که نیاز است p_x را به عنوان یک مولد پیمانه‌ای قبول کنیم، در غیراین صورت به مشکل بر می‌خوریم. در واقع فضای فاز فیزیکی برای لاگرانژی بالا یک بعدی است زیرا در ابتدا ۴ درجه آزادی داشتیم سپس پیمانه‌ی p_y دو درجه و پیمانه‌ی p_x یک درجه از درجات آزادی سیستم کم کردند، در نتیجه لاگرانژی یک بعدی شد. همچین فضایی ساختار کروشه ندارد، به این معنی که برای فضای یک بعدی نمی‌توان فضای فاز تعریف کرد. یک راه رسیدن به جواب منطقی این است که قید ثانویه‌ی نوع اول p_x تبدیل پیمانه‌ای تولید کند. اگر x یک پیمانه‌ی کامل فرض شده باشد، فضای فاز فیزیکی لاگرانژی بالا صفر بعدی است و سیستم فاقد درجه‌ی آزادی است.

۳-۴ رفتار قیود نوع دوم

دو قید به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\chi_۱ = q^۱ \approx ۰, \qquad \chi_۲ = p_۱ \approx ۰, \tag{۵۷.۳}$$

چون کروشه‌ی پواسون این دو قید صفر نیست پس نوع دوم هستند:

$$\{\chi_۱, \chi_۲\} = ۱ \neq ۰. \tag{۵۸.۳}$$

در گذار به نظریه‌ی کوانتومی اگر قرار دهیم $q^۱\psi = ۰$ و $p_۱\psi = ۰$، به این نتیجه می رسیم که $(q^۱p_۱ - p_۱q^۱)\psi = i\hbar\psi = ۰$، و این یک تناقض است. ψ تابع موج است. در این مثال ساده راه حل کاملا مشخص است. اگر $q^۱$ و $p_۱$ همیشه برابر صفر باشند می‌توانیم کروشه‌ی پواسون را به صورت جدیدی تعریف کنیم

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial g}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial p_n}, \qquad n = ۲, ..., N. \tag{۵۹.۳}$$

N تعداد درجات آزادی است. این کروشه‌ی اصلاح شده برای دو قید $\chi_۱$ و $\chi_۲$ عینا صفر است، بدین معنی که هنگام کار کردن با این کروشه‌ی جدید می‌توانیم قبل از محاسبه‌ی کروشه، χ_α ها را مساوی صفر قرار دهیم. برای مثال بالا اگر به جای کروشه‌ی پواسون از این کروشه‌ی اصلاح شده استفاده کنیم می‌توانیم تمام قیدهای نوع دوم را به‌طور قوی مساوی صفر قرار دهیم. همچنین به‌طور واضح معادلات حرکت برای دیگر درجات آزادی $(n \geq ۲)$ بدون تغییر باقی می‌مانند اگر به جای کروشه‌ی پواسون، کروشه‌ی اصلاح شده را جایگزین کنیم. علاوه بر این کروشه‌ی جدید تمام ویژگی‌های کروشه‌ی پواسون را داراست.

۳-۵ کروشه‌ی دیراک

تعمیم کروشه‌ی اصلاح شده‌ی پواسون، برای مجوعه‌ای اختیاری از قیدهای نوع دوم توسط دیراک مطرح شد. کروشه‌ی دیراک را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\{F,G\}^* = \{F,G\} - \{F,\chi_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{\chi_\beta,G\}. \qquad (۶۰.۳)$$

χ_α و χ_β قیدهای نوع دوم، F و G توابع اختیاری در فضای فاز و $C^{\alpha\beta}$ ماتریس قیدهای نوع دوم می‌باشند.

۳-۵-۱ خواص کروشه‌ی دیراک

توابع F، G و R، توابع اختیاری در فضای فاز در نظر گرفته می‌شوند و با استفاده از این توابع، خواص کروشه‌ی دبراک را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a)\ \ \{F,G\}^* = -\{G,F\}^* \qquad (۶۱.۳)$$

$$(b).\ \ \{F,GR\}^* = \{F,G\}^*R + G\{F,R\}^*$$

$$(c)\ \ \{\{F,G\}^*,R\}^* + \{\{R,F\}^*,G\}^* + \{\{G,R\}^*,F\}^* = \circ$$

$$(d)\ \ \{\chi_\alpha,F\} = \circ \qquad for\ any\ F$$

$$(e)\ \ \{F,G\}^* \approx \{F,G\} \qquad for\ G\ first\ class\ and\ F.\ arbitrary$$

$$(f)\ \ \{R,\{F,G\}^*\}^* \approx \{R,\{F,G\}\} \qquad for\ F\ and\ G$$

$$first\ class\ and\ R\ arbitrary. \qquad (۶۲.۳)$$

کروشه‌ی پواسون اصلی پس از تشخیص قیدهای نوع اول و نوع دوم دور ریخته می‌شود و تمام معادلات نظریه با کروشه‌ی دیراک فرمول بندی می‌شوند.

۳-۶ شمارش درجات آزادی

در مدل هایی که فقط قیود نوع دوم وجود دارند هیچ تابع اختیاری در هامیلتونی ظاهر نمی‌شود و در نتیجه بین متغیرهای دینامیکی و حالت های فیزیکی یک رابطه یک به یک برقرار است. از آنجایی‌که بعد از تثبیت پیمانه فقط قیود نوع دوم باقی می‌مانند، می‌توان درجات آزادی سیستم را بصورت زیر محاسبه کرد [۲۲]

$$ (۶۳.۳) \quad \text{(تعداد درجات آزادی فیزیکی)} \times ۲ = $$

$$ = \text{(تعداد کلی متغیرهای کانونی)} - \text{(تعداد متغیرهای کانونی مستقل)} $$

$$ = \text{(تعداد شرایط پیمانه‌ای)} - \text{(تعداد قیدهای نوع اول)} - \text{(تعداد قیدهای نوع دوم اصلی)} $$

$$ \text{(تعداد قیدهای نوع اول)} \times ۲ - \text{(تعداد قیدهای نوع دوم اصلی)} - \text{(تعداد کلی متغیرهای کانونی)}. $$

در این فصل سیستم‌های هامیلتونی مقید را بررسی کردیم، آزادی‌های پیمانه‌ای را دور ریختیم و درجات آزادی سیستم را شمردیم. قیدهای اولیه و ثانویه را معرفی کردیم و دیدیم که هر گروه از قیدهای اولیه و ثانویه می‌توانند شامل قیدهای نوع اول و نوع دوم باشند. گفتیم قیدهای نوع اول هر کدام دو درجه و قیدهای نوع دوم هر کدام یک درجه از درجات آزادی سیستم کم می‌کنند. براین اساس در بخش آخر، با کم کردن این قیدها از متغیرهای سیستم تعداد درجات آزادی سیستم را به‌دست آوردیم.

فصل ۴

فرمول‌بندی ADM

در این فرمول بندی فضا زمان ۴ بعدی را به‌صورت ۱ + ۳ بعدی تجزیه می‌کنیم. بدین‌صورت که ۳ بعد فضاگونه را به‌صورت ابرسطح‌هایی فضایی در نظر می‌گیریم که در امتداد مختصه‌ی چهارم زمان گونه در حال پیشروی می‌باشند.

۴-۱ فرم مرتبه اول میدان گرانشی

۴-۱-۱ کنش اینشتین در فرم مرتبه اول

انتگرال کنش متداول برای نسبیت‌عام به‌صورت زیر است

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}L = \int d^4x\sqrt{-g}R. \tag{۱.۴}$$

می‌خواهیم با وردش گرفتن از کنش بالا معادلات میدان را به‌دست می‌آوریم. قبل از وردش گیری از معادله‌ی (۱.۴) چند رابطه‌ی مهم را ذکر می‌کنیم

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \\ \delta R &= \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \\ \delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\rho\delta\Gamma_\mu{}^\rho{}_\nu - \nabla_\mu\delta\Gamma_\rho{}^\rho{}_\nu. \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

حال با استفاده از روابط (۲.۴) وردش‌گیری را انجام می‌دهیم

$$\delta I = \int d^{4}x(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}) \tag{۳.۴}$$

$$= \int d^{4}x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$$

$$- g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}).$$

جملات سوم و چهارم در رابطه‌ی بالا به دلیل مشتق کامل بودن، صفر هستند. در نتیجه خواهیم داشت

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \tag{۴.۴}$$

که همان معادلات میدان اینشتین هستند [۲۶].

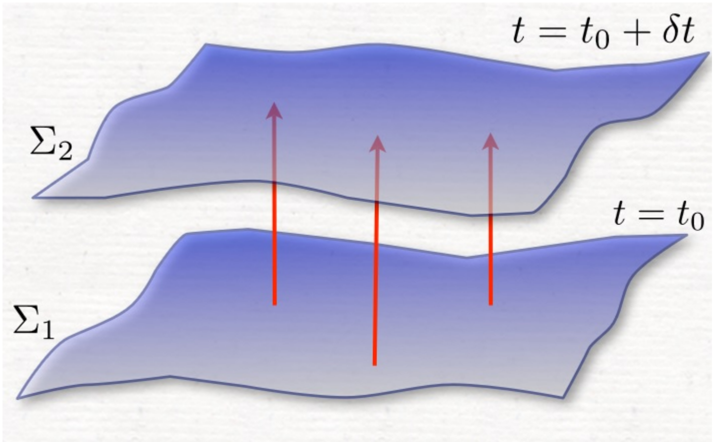
۲-۴ تجزیه ۱+۳ بعدی میدان اینشتین

در مکانیک کلاسیک، فرمول‌بندی هامیلتونی و لاگرانژی ابزار مفیدی برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم هستند. این دو فرمول‌بندی ارتباطی بین مکانیک کلاسیک و کوانتوم ایجاد می‌کنند. اکنون با معرفی یک تقسیم‌بندی ۱ + ۳ بعدی، مختصات فضا و زمان را از هم جدا می‌کنیم. یک خمینه‌ی M در نظر بگیرید که یک فضا_زمان ۴ بعدی با متریک $g_{\mu\nu}$ را توصیف می‌کند. می‌خواهیم این فضا_زمان را به ابرسطح‌های سه‌بعدی فضاگونه مانند Σ_1 و Σ_2 تبدیل کنیم که توسط یک تابع اسکالر نام گذاری و مشخص می‌شوند. هر کدام از بخش‌های فضایی که با Σ_t مشخص می‌شوند توسط یک پارامتر زمان t نمادگذاری شده‌اند. h_{ab} را متریک روی سطح فضایی Σ_t در نظر می‌گیریم. وقتی زمان تغییر می‌کند متریک h_{ab} نیز تغییر خواهد کرد که تحول دینامیکی سطوح فضایی Σ_t را توصیف می‌کند. برای هر Σ_t یک میدان برداری نرمال n وجود خواهد داشت. تا زمانی که Σ_t فضاگونه باشد n زمان‌گونه خواهد بود.

$$\begin{aligned} &t \textit{ is timelike} &&\longleftrightarrow N_iN^i < N^2 \\ &t \textit{ is null} &&\longleftrightarrow N_iN^i = N^2 \\ &t \textit{ is spacelike} &&\longleftrightarrow N_iN^i > N^2. \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

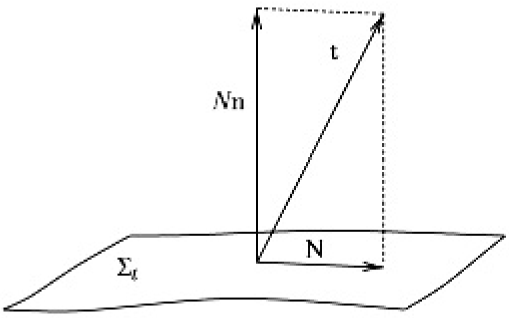
اگر t بردار زمان باشد داریم

$$t^i \equiv m + N^i \qquad m = Nn^i, \tag{۶.۴}$$



شکل ۴-۱: ابرسطح های سه بعدی فضاگونه، که توسط مختصه t نام گذاری شده اند.

که m بردار تحول زمان، N^i بردار انتقال[۱] و N تابع گذر[۲] می‌باشد. می‌توانیم بردار زمان t را بطور آزادانه انتخاب کنیم به‌طوریکه N^i و N بردار و تابع اسکالر اختیاری باشند، این یک آزادی پیمانه‌ای در نسبیت عام است که در حقیقت انعکاس هموردایی عام نظریه است.



شکل ۴-۲: ابرسطح به همراه تابع گذر و بردار انتقال

$$n.n = -۱ \tag{۷.۴}$$
$$t.t = -N^۲ + N_i N^i.$$

[۱] shift vector
[۲] lapse function

با استفاده از $g_{\alpha\beta} = g(\alpha, \beta)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g_{\circ\circ} &= g(t,t) = t.t, \\ g_{\circ\circ} &= -N^{۲} + N_i N^i, \\ g_{\circ i} &= g(t,j) = t.j = (Nn^j + N^j).j, \\ g_{\circ i} &= N^j.j = N_k dx^k.j = N_j, \\ g_{ij} &= g(i,j) = \gamma_{ij}. \end{aligned} \tag{۸.۴}$$

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} -N^{۲} + N_j N^j & N_j \\ N_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}. \tag{۹.۴}$$

ماتریس معکوس $g^{\alpha\beta}$ به‌صورت زیر است

$$[g^{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} -\frac{۱}{N^{۲}} & \frac{N^i}{N^{۲}} \\ \frac{N^j}{N^{۲}} & \gamma_{ij} - \frac{N^i N^j}{N^{۲}} \end{pmatrix}, \tag{۱۰.۴}$$

که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$[g^{\alpha\beta}] = \frac{۱}{det(g_{\alpha\beta})} \begin{pmatrix} \gamma_{ij} & -N_j \\ -N_i & -N^{۲} + N_j N^j \end{pmatrix}. \tag{۱۱.۴}$$

به‌منظور دست‌یابی به رابطه‌ای که متریک ۴ بعدی g را برحسب مولفه‌های ۳ بعدی نشان دهد از روابط و تعاریف زیر کمک می‌گیریم

اگر $C = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد، ماتریسی که از حذف سطر i ام و ستون j ام به‌دست می‌آید یک زیرماتریس C با ابعاد $(n - ۱) \times (n - ۱)$ خواهد بود، دترمینان این زیرماتریس کهاد نامیده شده و با M_{ij} نشان داده می‌شود.

$$\begin{aligned} c_{\circ\circ} &= (-۱)^{\circ} M_{\circ\circ} = M_{\circ\circ}, \\ M_{\circ\circ} &= det(\gamma_{ij}) = \gamma, \end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

برای $g^{\circ\circ}$ داریم

$$g^{\circ\circ} = \frac{c_{\circ\circ}}{det(g_{\alpha\beta})} = \frac{c_{\circ\circ}}{g}, \tag{۱۳.۴}$$

که $g = det(g_{\alpha\beta})$ است. در نتیجه با جایگذاری (۱۲.۴) در g^{00} به‌دست می‌آوریم

$$g^{00} = \frac{\gamma}{g}, \tag{۱۴.۴}$$

در نهایت با استفاده از رابطه‌ی $g^{00} = -\frac{1}{N^2}$ و جایگذاری در (۱۴.۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g &= -N^2\gamma, \\ \sqrt{-g} &= \sqrt{N^2\gamma} = N\sqrt{\gamma}. \end{aligned} \tag{۱۵.۴}$$

با محاسبات بالا مولفه‌های متریک ۴ بعدی را به ۱ + ۳ بعدی تبدیل کردیم.

۴-۳ هندسه داخلی و خارجی

مشتق هموردای ۳ بعدی D_c را با رابطه‌ی زیر به مشتق هموردای ۴ بعدی $\bigtriangledown_f$ آن تبدیل می‌کنیم

$$D_c T^{a_1...a_k}_{b_1...b_l} \equiv (h^{a_1}_{d_1}...h^{a_k}_{d_k} h^{e_1}_{b_1}...h^{e_l}_{b_l}) h^f_c \bigtriangledown_f T^{d_1...d_k}_{e_1...e_l}. \tag{۱۶.۴}$$

تانسور انحنای داخلی فضای ۳ بعدی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$${}^3R^d_{abc}\omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c. \tag{۱۷.۴}$$

که در آن ω_d یک کمیت ۳ بعدی فضایی است. در تضاد با هندسه داخلی که روی یک سطح اعمال می‌شود و چگونگی قرار گرفتن در فضا-زمان مهم نیست، هندسه خارجی Σ به خمش Σ در همسایگی آن بستگی دارد و بطور کلی تغییراتی روی بردار میدان نرمال n^a در طول Σ اعمال می‌کند. تانسور انحنای خارجی ابرسطح Σ_t به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$K_{ab} = \nabla_\beta n_\alpha e^\alpha_a e^\beta_b. \tag{۱۸.۴}$$

نشان می‌دهیم تانسور انحنای خارجی متقارن است. با توجه به اینکه بردارهای e^α_a و n^α بر هم عمود هستند و همچنین برای بردارهای پایه داریم

$$\nabla_\beta e^\alpha_a e^\beta_b = \nabla_\beta e^\alpha_b e^\beta_a, \tag{۱۹.۴}$$

با استفاده از تعریف انحنای خارجی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \nabla_\beta n_\alpha e^\alpha_a e^\beta_b &= -n_\alpha \nabla_\beta e^\alpha_a e^\beta_b \\ &= -n_\alpha \nabla_\beta e^\alpha_b e^\beta_a \\ &= \nabla_\beta n_\alpha e^\alpha_b e^\beta_a, \end{aligned} \tag{۲۰.۴}$$

که به معنی تقارن انحنای خارجی، یعنی $K_{ab}=K_{ba}$ می‌باشد. با استفاده از این ویژگی تقارن، انحنای خارجی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم

$$K_{ab}=n_{(\alpha;\beta)}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}=\frac{۱}{۲}(\pounds_{n}g_{\alpha\beta})e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}. \tag{۲۱.۴}$$

اکنون به جای $\pounds_{n}g_{ab}$ از رابطه‌ی مشتق لی کمک گرفته و جایگزین می‌کنیم

$$\begin{aligned}K_{ab}&=\frac{۱}{۲}[n^{\mu}\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta}+h_{\mu b}\nabla_{\alpha}n^{\mu}+g_{a\mu}\nabla_{\beta}n^{\mu}]e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}\\&=\frac{۱}{۲N}[Nn^{\mu}\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta}+g_{\mu b}\nabla_{\alpha}(Nn^{\mu})-h_{\mu\beta}n^{\mu}\nabla_{\alpha}N\\&+g_{\alpha\mu}\nabla_{\beta}(Nn^{\mu})-g_{\alpha\mu}n^{\mu}\nabla_{\beta}N]e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b},\end{aligned} \tag{۲۲.۴}$$

که جملات $g_{\mu\beta}n^{\mu}\nabla_{\alpha}N$ و $g_{\alpha\mu}n^{\mu}\nabla_{\beta}N$ صفر هستند. با جایگذاری $t^{\alpha}=Nn^{\alpha}+e^{\alpha}_{a}N^{a}$ در رابطه‌ی (۲۲.۴) خواهیم داشت

$$K_{ab}=\frac{۱}{۲N}\Big[\pounds_{t}g_{\alpha\beta}-\pounds_{(N^{c}e^{a}_{c})}g_{\alpha\beta}\Big]e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}. \tag{۲۳.۴}$$

در نتیجه داریم

$$\pounds_{(N^{c}e^{a}_{c})}g_{\alpha\beta}=N^{a}\nabla_{a}g_{\alpha\beta}+g_{a\beta}\nabla_{\alpha}N^{a}+g_{\alpha a}\nabla_{\beta}N^{a}=D_{\alpha}N_{\beta}+D_{\beta}N_{\alpha}. \tag{۲۴.۴}$$

و در نهایت با جایگذاری رابطه‌ی (۲۴.۴) در (۲۳.۴) به‌دست می‌آوریم [۲۴]

$$\begin{aligned}K_{ab}&=\frac{۱}{۲N}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}\pounds_{t}g_{\alpha\beta}-\frac{۱}{۲N}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}(D_{\alpha}N_{\beta}+D_{\beta}N_{\alpha})\\&=\frac{۱}{۲N}(\dot{g}_{ab}-D_{a}N_{b}-D_{b}N_{b}).\end{aligned} \tag{۲۵.۴}$$

رابطه‌ی بالا انحنای خارجی برحسب مولفه‌های ۳ بعدی است.

۴-۴ معادلات گوس‌ـ کودازی

فرمول‌هایی که روابط دقیقی بین مولفه‌های انحنای فضای ۴ بعدی و سطح ۳ بعدی Σ را توصیف می‌کنند به عنوان معادلات گاوس‌ـ کودازی شناخته می‌شوند که آنها را به‌دست می‌آوریم.

اجزای $R^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$ را در بخش‌هایی از k_{ab} و ${}^{۳}R^{d}_{abc}$ تخمین خواهیم زد، این کار را با محاسبه‌ی زیر انجام می‌دهیم

$$D_{a}D_{b}\omega_{c}=D_{a}(h^{\mu}_{b}h^{\nu}_{c}\nabla_{\mu}\omega_{\nu}). \tag{۲۶.۴}$$

با استفاده از تعریف (۱۶.۴) داریم

$$D_a D_b \omega_c = h^\rho_a h^\sigma_b h^\lambda_c \nabla_\rho (h^\mu_\sigma h^\nu_\lambda \nabla_\mu \omega_\nu) \tag{۲۷.۴}$$
$$= h^\rho_a h^\sigma_b h^\lambda_c h^\mu_\sigma h^\nu_\lambda \nabla_\rho \nabla_\mu \omega_\nu$$
$$+ h^\rho_a h^\sigma_b h^\lambda_c h^\nu_\lambda \nabla_\rho (h^\mu_\sigma) \nabla_\mu \omega_\nu$$
$$+ h^\rho_a h^\sigma_b h^\lambda_c h^\mu_\sigma \nabla_\rho (h^\nu_\lambda) \nabla_\mu \omega_\nu.$$

در جمله‌ی دوم داریم

$$h^\rho_a h^\sigma_b \nabla_\rho (h^\mu_\sigma) = h^\rho_a h^\sigma_b \nabla_\rho (g^\mu_\sigma + n_\sigma n^\mu) \tag{۲۸.۴}$$
$$= h^\rho_a h^\sigma_b \nabla_\rho g^\mu_\sigma + h^\rho_a h^\sigma_b n^\mu \nabla_\rho n_\sigma \tag{۲۹.۴}$$
$$+ h^\rho_a h^\sigma_b n_\sigma \nabla_\rho n^\mu = n^\mu \nabla_a n_b = n^\mu K_{ab},$$

در جمله‌ی آخر داریم

$$h^\rho_\sigma h^\lambda_c \nabla_\rho h^\nu_\lambda = h^\rho_\sigma h^\lambda_c \nabla_\rho (g^\nu_\lambda + n_\lambda n^\nu) = n^\nu K_{ac}. \tag{۳۰.۴}$$

در نتیجه با استفاده از تعریف (۱۷.۴) خواهیم داشت

$$h^\rho_a h^\sigma_b h^\lambda_c R^d_{\rho\sigma\lambda} = {}^{۳}R^d_{abc} + K_{ac} K^d_b - K_{bc} K^d_a. \tag{۳۱.۴}$$

که به رابطه‌ی گاوس مشهور است.

برای رسیدن به رابطه‌ی کودازی با محاسبه‌ی زیر شروع می‌کنیم

$$h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda R_{abcd} n^d = h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) n_c \tag{۳۲.۴}$$
$$= h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda [\nabla_a (g^d_b \nabla_d n_c) - \nabla_b (g^d_a \nabla_d n_c)],$$

جمله‌ی اول رابطه‌ی (۳۲.۴) را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda \nabla_a [(h^d_b - n_b n^d) \nabla_d n_c] \tag{۳۳.۴}$$
$$= h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda \nabla_a (h^d_b \nabla_d n_c)$$
$$- h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda \nabla_a (n_b n^d \nabla_d n_c)$$
$$= \nabla_\rho K_{\sigma\lambda} - h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda \nabla_a (n_b n^d K_{dc}),$$

جمله‌ی دوم رابطه‌ی (۳۲.۴) را نیز به شکل زیر به‌دست می‌آوریم

$$h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda \nabla_b[(h^d_a - n_a n^d)\nabla_d n_c] = \nabla_\sigma K_{\rho\lambda} - h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda \nabla_b(n_a n^d K_{dc}), \qquad (۳۴.۴)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda R_{abcd} n^d = \qquad (۳۵.۴)$$
$$\nabla_\rho K_{\sigma\lambda} - \nabla_\sigma k_{\rho\lambda} - h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda[\nabla_a(n_b n^d K_{dc}) - \nabla_b(n_a n^d K_{dc})].$$

از تقارن $\bigtriangledown_a n_b$ استفاده کرده و به‌دست می‌آوریم

$$h^a_\rho h^b_\sigma h^c_\lambda R_{abcd} n^d = \nabla_\rho K_{\sigma\lambda} - \nabla_\sigma K_{\rho\lambda}, \qquad (۳۶.۴)$$

که معادله‌ی کودازی نامیده می‌شود. حال رابطه‌ی گاوس را روی مولفه‌های b و d تنجش می‌دهیم

$$^{۳}R^b_{abc} + K_{ac}K - K_{bc}K^b_a = h^\rho_a h^\sigma_b h^\lambda_c R^b_{\rho\sigma\lambda}. \qquad (۳۷.۴)$$

با ضرب در h^{ac}، یک بار دیگر رابطه‌ی (۳۷.۴) را تنجش می‌دهیم

$$\begin{aligned} ^{۳}R + k^{۲} - k^a_b k^b_a &= h^{ac} h^\rho_a h^\sigma_b h^\lambda_c R^b_{\rho\sigma\lambda} \qquad (۳۸.۴)\\ &= \ ^{۳}R + K^{۲} - K_{ab}K^{ab} = h^{\rho\lambda} h^\sigma_b R^b_{\rho\sigma\lambda} \\ &= (g^{\rho\lambda} + n^\rho n^\lambda)(g^{\sigma b} + n^\sigma n^b) R_{\rho\sigma\lambda b}. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$^{۴}R = \ ^{۳}R + K^{۲} - K_{ab}K^{ab} - ۲ n^a n^b R_{ab}. \qquad (۳۹.۴)$$

جمله آخر رابطه‌ی (۳۹.۴) را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} R_{ab} n^a n^b = R^\alpha_{\alpha a b} n^a n^b &= n^a(\nabla_\alpha \nabla_a - \nabla_a \nabla_\alpha) n^\alpha \qquad (۴۰.۴)\\ &= n^a(\nabla_\alpha \nabla_a) n^\alpha - n^a(\nabla_a \nabla_\alpha) n^\alpha \\ &= -\nabla_\alpha n^a \nabla_a n^\alpha + \nabla_a n^a \nabla_\alpha n^\alpha + \nabla_\alpha(n^a \nabla_a n^\alpha) - \nabla_a(n^a \nabla_\alpha n^\alpha) \\ &= K^{۲} - K^{ab}K_{ab} + \nabla_\alpha(n^a \nabla_a n^\alpha) - \nabla_a(n^a \nabla_\alpha n^\alpha). \end{aligned}$$

دو جمله‌ی آخر در معادله‌ی (۴۰.۴) مشتقات کامل بوده و فقط بخش‌های مرزی انتگرال کنش را نتیجه می‌دهند، از این‌رو می‌توان این دو جمله را از معادله‌ی بالا حذف کرد

$$^{۴}R = \ ^{۳}R + K_{ab}K^{ab} - K^{۲}. \qquad (۴۱.۴)$$

حال لاگرانژی سیستم را به‌دست می‌آوریم

$$L_G = R\sqrt{-g} \tag{۴۲.۴}$$
$$L_G = N\sqrt{h}[\,{}^{۳}R + K_{ab}K^{ab} - K^{۲}].$$

توجه داشته باشید که رابطه‌ی لاگرانژی بالا شامل مشتقات زمانی متغیرهای N یا N^i نیست. بنابراین وردش‌گیری نسبت به این متغیرها به سرعت معادله قیدها را نتیجه می‌دهد. این حقیقت در فرمول‌بندی هامیلتونی که معرفی خواهیم کرد واضح‌تر خواهد بود [۲۵].

۴-۵ فرمول بندی هامیلتونی

فرض کنید لاگرانژی به‌صورت زیر داریم که q^A ها مختصات تعمیم یافته هستند

$$L = L(q^A, \dot{q}^A; t). \tag{۴۳.۴}$$

تکانه‌ی کانونی p_A و هامیلتونی را به‌صورت روابط (۱۴.۳) و (۱۵.۳) در فصل ۳ تعریف کردیم. H را تابعی از q^A و p_A و یک متغیر احتمالی زمان t در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q^A, p_A; t). \tag{۴۴.۴}$$

حال با شروع از لاگرانژی (۴۲.۴) این معادلات را در نسبیت عام اعمال می‌کنیم.

تکانه کانونی را تعریف می‌کنیم

$$\Pi^{ab} \equiv \frac{\partial L_G}{\partial \dot{h}_{ab}} \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}}[N\sqrt{h}({}^{۳}R + K_{ab}K^{ab} - K^{۲})], \tag{۴۵.۴}$$

که در آن

$$K_{ab} = \frac{۱}{۲N}(\dot{h}_{ab} - D_aN_b - D_bN_a), \tag{۴۶.۴}$$
$$K = h^{ab}K_{ab}.$$

است. پس از مشتق‌گیری به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\Pi^{ab} \equiv \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab}). \tag{۴۷.۴}$$

تکانه کانونی نسبت به N و N^a عینا صفر است

$$\pi^N \equiv \frac{\partial L_G}{\partial \dot{N}} \simeq ۰, \quad (۴۸.۴)$$

$$\pi^a \equiv \frac{\partial L_G}{\partial \dot{N}^a} \simeq ۰. \quad (۴۹.۴)$$

متغیرهای N و N^a باید به عنوان ضرایب لاگرانژ تفسیر شوند، بنابراین نمی‌توانند به عنوان متغیرهای دینامیکی واقعی در نظر گرفته شوند. تنها متغیر دینامیکی h_{ab} است.

همان طور که قبلا ذکر کردیم می‌توانیم توابع N و N^a را آزادانه انتخاب کنیم. آنها به یک انتخاب آزادانه از یک بردار زمانی مربوط هستند. بنابراین نمی‌توانند به‌عنوان متغیرهای دینامیکی در نظر گرفته شوند. این متغیرها می‌توانند به‌طور اختیاری انتخاب شوند، آنها انتخاب یک پیمانه را منعکس می‌کنند. N انتخاب آزاد تغییر مقیاس زمان را نشان می دهد و یک مولد برای تحول زمانی است. به طور مشابه بردار N^a هم یک مولد برای تبدیلات مختصات برای ابرسطح های فضایی Σ_t است.

۴-۶ چگالی هامیلتونی

انتگرال هامیلتونی به شکل زیر داده می‌شود:

$$H_G = \int_M \mathcal{H}_G \sqrt{-g} d^۴x, \quad (۵۰.۴)$$

که $\mathcal{H}_G$ چگالی هامیلتونی است

$$\mathcal{H}_G = \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - L_G, \quad (۵۱.۴)$$

برای به‌دست آوردن چگالی هامیلتونی، ابتدا با کمک گرفتن از رابطه‌ی (۴۷.۴) رابطه‌ای برای $\dot{h}$ به‌دست می‌آوریم، به این منظور ابتدا π اسکالر را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\pi^{ab} = \sqrt{h}\{\frac{۱}{۲N}(\dot{h}^{ab} - D^a N^b - D^b N^a) - \frac{h^{ab}}{۲N}(\dot{h} - ۲D_c N^c)\} \quad (۵۲.۴)$$
$$\pi = h_{ab}\pi^{ab} = \frac{\sqrt{h}}{N}(۲D_a N^a - \dot{h}),$$

سپس خواهیم داشت

$$\dot{h} = ۲D_a N^a - \frac{N}{\sqrt{h}}\pi. \quad (۵۳.۴)$$

حال با جای‌گذاری $\dot{h}$ در π^{ab}، $\dot{h}_{ab}$ را به‌دست می‌آوریم

$$\dot{h}_{ab} = \frac{۲N}{\sqrt{h}}\pi_{ab} + ۲K_{ab} - \frac{N\pi}{\sqrt{h}}h_{ab}. \tag{۵۴.۴}$$

از روابط زیر کمک می‌گیریم

$$\begin{aligned} K &= h^{ab}K_{ab} = -\frac{\pi}{۲\sqrt{h}}, \\ K_{ab} &= \frac{\pi_{ab}}{\sqrt{h}} - \frac{\pi}{۲\sqrt{h}}h_{ab}, \\ K_{ab}K^{ab} &= \frac{\pi_{ab}\pi^{ab}}{h} - \frac{\pi^۲}{۴h}. \end{aligned} \tag{۵۵.۴}$$

با استفاده از روابط به‌دست آمده و جای‌گذاری در فرمول (۵۱.۴)، چگالی هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم

$$\mathcal{H} = N\sqrt{h}\{-{}^۳R + h^{-۱}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{۱}{۲}\pi^۲)\} + ۲\frac{\sqrt{h}}{h}\pi_{ab}\pi^{ab}. \tag{۵۶.۴}$$

و داریم

$$\begin{aligned} \pi_{ab}\pi^{ab} &= h[D^aN^bD_aN_b + D_aN^aD_bN^b] \\ &= h[-D_aD^a(N^B)N_b - D_bD_a(N^aN^b)] \\ &= h[-N_bD_aK^{ab} - N^bD_bK]. \end{aligned} \tag{۵۷.۴}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\pi_{ab}\pi^{ab} = -N_ahD_bK^{ba}. \tag{۵۸.۴}$$

و برای چگالی هامیلتونی رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{H}_G = NA_G + N_aA_G^a. \tag{۵۹.۴}$$

که در آن A_G^a و A_G به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} A_G &= \sqrt{h}[-{}^۳R + h^{-۱}(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{۱}{۲}\pi^۲)], \\ A_G^a &= -۲\sqrt{h}D_b(h^{-\frac{۱}{۲}}\pi^{ba}). \end{aligned} \tag{۶۰.۴}$$

۷-۴ هامیلتونی کلی گرانش

$$H_{Gravity} = \int d^3x(NA_G + N_a A^a_G) + \int d^3x(\lambda\pi^N + \mu\pi^a). \qquad (۶۱.۴)$$

اکنون با استفاده از قیدهای اولیه، قیدهای ثانویه را به‌دست می‌آوریم

$$0 = \dot{\pi}^N = \{\pi^N, H_{grav}\} = \sqrt{h}\{-{}^3R + h^{-1}(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{\pi^2}{2})\} = A_G, \qquad (۶۲.۴)$$

$$0 = \dot{\pi}^a = -2\sqrt{h}D_b(h^{-\frac{1}{2}}\pi^{ba}) = A^G_a. \qquad (۶۳.۴)$$

عبارت‌های حاصل را قیدهای ثانویه می‌نامند. قید اول، قید هامیلتونی و قید دوم، قید تکانه می‌باشد. وجود این قیدها هموردایی عام نظریه را نشان می‌دهد. در هر حال نقشی که دو قید ایفا می‌کنند با یکدیگر متفاوت است، نقش اصلی بر عهده‌ی قید هامیلتونی است که دینامیک هندسه‌ی سه گانه را ایجاد می‌کند. قیدهای تکانه (دیفئومورفیسم) متریک سه‌گانه h_{ij} را ایجاد می‌کنند.

۸-۴ به دست آوردن معادلات حرکت

برای به‌دست آوردن معادله‌ی حرکت از H_G نسبت به h_{ab} وردش می‌گیریم. برای این کار هامیلتونی را جمع سه جمله در نظر گرفته و از هر جمله به طور جداگانه وردش می‌گیریم

$$H_G = H_1 + H_2 + H_3, \qquad (۶۴.۴)$$

که در آن داریم

$$\begin{aligned} H_1 &= N\sqrt{h}[h^{-1}(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{1}{2}\pi^2)], \qquad (۶۵.۴)\\ H_2 &= -2\sqrt{h}N_c D_d(h^{-\frac{1}{2}}\pi^{dc}),\\ H_3 &= -N\sqrt{h}\,{}^3R = -N\sqrt{h}h^{cd}\,{}^3R_{cd}. \end{aligned}$$

ابتدا از H_1 وردش می‌گیریم

$$\begin{aligned} \frac{\delta H_1}{\delta h_{ab}} &= \frac{N}{h}\frac{\delta\sqrt{h}}{\delta h_{ab}}(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{1}{2}\pi^2) \qquad (۶۶.۴)\\ &+ N\frac{\sqrt{h}}{h}[\pi^{cd}\pi^{ef}h_{ce}\frac{\delta h_{df}}{\delta h_{ab}} + \pi^{cd}\pi^{ef}h_{df}\frac{\delta h_{ce}}{\delta h_{ab}}\\ &- \frac{1}{2}\pi^{cd}\pi^{ef}h_{cd}\frac{\delta h_{ef}}{\delta h_{ab}} - \frac{1}{2}\pi^{cd}\pi^{ef}h_{ef}\frac{\delta h_{cd}}{\delta h_{ab}}]. \end{aligned}$$

از روابط زیر کمک می‌گیریم

$$\frac{\delta h_{df}}{\delta h_{ab}} = \frac{۱}{۲}(\delta_{ad}\delta_{bf} + \delta_{af}\delta_{bd}), \qquad (۶۷.۴)$$
$$\frac{\delta\sqrt{h}}{\delta h_{ab}} = -\frac{۱}{۲}\sqrt{h}h^{ab}.$$

با جای‌گذاری روابط (۶۷.۴) در (۶۶.۴) خواهیم داشت

$$\frac{\delta H_{۱}}{\delta h_{ab}} = -\frac{N}{۲}h^{-\frac{۱}{۲}}h^{ab}(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{۱}{۲}\pi^{۲}) + ۲Nh^{-\frac{۱}{۲}}[\pi^{b}_{c}\pi^{ca} - \frac{۱}{۲}\pi\pi^{ab}]. \qquad (۶۸.۴)$$

$H_{۲}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_{۲} = ۲\pi^{dc}h_{ce}(\partial_{d}N^{e} + \Gamma^{e}_{df}N^{f}). \qquad (۶۹.۴)$$

حال از $H_{۲}$ وردش می‌گیریم

$$\frac{\delta H_{۲}}{\delta h_{ab}} = ۲\pi^{dc}\frac{\delta h_{ce}}{\delta h_{ab}}D_{d}N^{e} + ۲\pi^{dc}h_{ce}N^{f}\frac{\delta\Gamma^{e}_{df}}{\delta h_{ab}}. \qquad (۷۰.۴)$$

وردش هموستار به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\delta\Gamma^{e}_{df} = \frac{۱}{۲}h^{eg}[D_{d}\delta h_{fg} + D_{f}\delta h_{dg} - D_{g}\delta h_{df}] \qquad (۷۱.۴)$$
$$+ \frac{۱}{۲}\delta h^{eg}[D_{d}h_{fg}D_{f}h_{dg} - D_{g}h_{df}].$$

جمله‌ی دوم رابطه‌ی بالا به دلیل متناسب بودن با هموستار صفر است. باید توجه داشت که در مختصات ژئودزیک هموستار صفر است اما مشتق آن صفر نیست.

$$\frac{\delta H_{۲}}{\delta h_{ab}} = \pi^{d(a}D_{d}N^{b)} - \sqrt{h}D_{f}(\frac{\pi^{ab}N^{f}}{\sqrt{h}}). \qquad (۷۲.۴)$$

اکنون از $H_{۳}$ وردش می‌گیریم

$$\frac{\delta H_{۳}}{\delta h_{ab}} = -N\frac{\delta\sqrt{h}}{\delta h_{ab}}h^{cd}\ {}^{۳}R_{cd} - N\sqrt{h}\frac{\delta h_{cd}}{\delta h_{ab}}\ {}^{۳}R^{cd} - N\sqrt{h}h^{cd}\frac{\delta\ {}^{۳}R_{cd}}{\delta h_{ab}} \qquad (۷۳.۴)$$
$$= \frac{۱}{۲}N\sqrt{h}h^{ab}\ {}^{۳}R - N\sqrt{h}\ {}^{۳}R^{ab} - N\sqrt{h}h^{cd}\frac{\delta\ {}^{۳}R_{cd}}{\delta h_{ab}}.$$

حال می‌خواهیم $\delta R_{\nu\sigma}$ را به‌دست بیاوریم. ابتدا تانسور ریمان را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}. \qquad (۷۴.۴)$$

همان‌طور که ذکر شد در مختصات ژئودزیک هموستار صفر است، در نتیجه داریم

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}. \tag{۷۵.۴}$$

برای به‌دست آوردن $R_{\nu\sigma}$ اندیس‌های μ و ρ را تنجش می‌دهیم

$$R_{\nu\sigma} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}. \tag{۷۶.۴}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\delta R_{\nu\sigma} = \partial_{\mu}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}. \tag{۷۷.۴}$$

در رابطه‌ی (۷۷.۴) مشتق جزئی را به مشتق هموردا تبدیل می‌کنیم

$$\begin{aligned} h^{\nu\sigma}\delta R_{\nu\sigma} &= \nabla_{\mu}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} \\ &= h^{\nu\sigma}\nabla^{\lambda}\nabla_{\nu}\delta h_{\sigma\lambda} - h^{\nu\sigma}\nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}\delta h_{\nu\sigma} \\ &= \nabla^{\lambda}(\nabla_{\nu}\delta h_{\sigma\lambda} - \nabla_{\lambda}\delta h_{\nu\sigma})h^{\nu\sigma}. \end{aligned} \tag{۷۸.۴}$$

در نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\delta H_3}{\delta h_{ab}} = \frac{1}{2}N\sqrt{h}h^{ab}\ {}^{3}R - N\sqrt{h}\ {}^{3}R^{ab} + \sqrt{h}(h^{ab}D_eD^eN - D^aD^bN). \tag{۷۹.۴}$$

با قرار دادن روابط به‌دست آمده در δH_G معادله‌ی حرکت را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ab} = -\frac{\delta H_G}{\delta h_{ab}} &= -N\sqrt{h}({}^{3}R^{ab} - \frac{1}{2}\ {}^{3}Rh^{ab}) + \frac{1}{2}Nh^{-\frac{1}{2}}h^{ab}(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{1}{2}\pi^{2}) \\ &- 2Nh^{-\frac{1}{2}}(\pi^{ac}\pi^{b}_{c} - \frac{1}{2}\pi\pi^{ab}) + h^{\frac{1}{2}}(D^aD^bN - h^{ab}D^cD_cN) \\ &+ h^{\frac{1}{2}}D_c(h^{-\frac{1}{2}}N^c\pi^{ab}) - \pi^{c(a}D_cN^{b)}. \end{aligned} \tag{۸۰.۴}$$

و در نهایت $\dot{h}_{ab}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_G}{\delta\pi^{ab}} = \frac{\delta H_1}{\delta\pi^{ab}} + \frac{\delta H_2}{\delta\pi^{ab}} + \frac{\delta H_3}{\delta\pi^{ab}}. \tag{۸۱.۴}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\dot{h}_{ab} = 2N\sqrt{h}(\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi h_{ab}) + D_{(a}N_{b)}. \tag{۸۲.۴}$$

تانسور متقارن $g_{\mu\nu}$ در ۴ بعد، ۱۰ مولفه‌ی مستقل دارد که به عنوان درجه‌های آزادی میدان گرانش در حالت عام تلقی می‌شود. تعداد مولفه‌های میدان اینشتین نیز ۱۰ تا است. از اصل هموردایی عام می‌دانیم که هر تبدیل مختصاتی مجاز است. این آزادی اجازه می‌دهد ۴ مولفه از $g_{\mu\nu}$ را به دلخواه انتخاب کنیم. بنابراین تعداد مولفه‌های مستقل میدان ۶ می‌شود. در نتیجه نسبیت‌عام در فضای فاز دارای ۱۲ درجه‌ی آزادی می‌باشد. با استفاده از تجزیه‌ی ADM در این نظریه ۴ قید به‌دست آمد که همه نوع اول هستند. این ۴ قید نوع اول، ۸ درجه از درجات آزادی سیستم کم می‌کنند، درنتیجه فضای فازی ۴ بعدی خواهیم داشت که به معنی نظریه‌ای با ۲ درجه‌ی آزادی فیزیکی خواهد بود.

فصل ۵

ساختار هامیلتونی نظریه های اسکالر تانسوری

عمومی‌ترین نظریه‌ی اسکالر تانسوری با سه درجه‌ی آزادی و معادلات حرکت مرتبه دوم توسط هورندسکی در سال ۱۹۷۴ ارائه شد. در این نظریه درحالی‌که هر بخش از کنش می‌تواند به‌طور کلی شامل بیش از دو مشتق باشد معادلات حرکت مستقل از مشتقات مراتب بالاتر از دو خواهند بود. برای چارچوب‌هایی که گرادیان میدان اسکالر زمان‌گونه است، این نظریه‌ها می‌توانند از طریق تجزیه‌ی ADM به شکل ساده‌ای فرمول‌بندی شوند.

مجموعه ای از نظریه های اسکالر تانسوری گرانش که نظریه هورندسکی را تعمیم داده اند، مانند $GLPV$[۱]، ادعا میکنند تعداد درجات آزادی آنها مانند نظریه‌ی هورندسکی باقی می‌ماند. هدف ما شمارش تعداد درجات آزادی نظریه $GLPV$ با استفاده از بررسی هامیلتونی است.

۵-۱ نظریه‌ی $GLPV$

مدل‌های تعمیم یافته‌ی هورندسکی که توسط $GLPV$ معرفی شدند با اضافه کردن جملات اضافی به لاگرانژی گالیلئون، هورندسکی را تعمیم می‌دهند و مشتقات فضایی مراتب بالاتر در معادلات میدان ایجاد می‌کنند. این معادلات میدان از مرتبه‌ی دوم زمانی باقی می‌مانند. لاگرانژی این نظریه با جملات

[۱] Gleyzes-Langlois-Piazza-Vernizzi

زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned}
L_۲^\phi &= G_۲(\phi, X) \\
L_۳^\phi &= G_۳(\phi, X)\Box\phi \\
L_۴^\phi &= G_۴(\phi, X)\ {}^{(۴)}R - ۲G_{۴,X}(\phi, X)(\Box\phi^۲ - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}) \\
&\quad + F_۴(\phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho}_{\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'}, \\
L_۵^\phi &= G_۵(\phi, X)\ {}^{(۴)}G_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{۱}{۳}G_۵(\phi, X)(\Box\phi^۳ - ۳\Box\phi\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + ۲\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\sigma}\phi^{\nu}_{\sigma}) \\
&\quad + F_۵(\phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi\phi\phi_{\rho\rho'}\phi_{\sigma\sigma'}
\end{aligned} \tag{۱.۵}$$

که به میدان اسکالر ϕ و مشتقات آن وابسته است $(\phi_\mu \equiv \nabla_\mu\phi, \phi_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu\nabla_\nu\phi)$. همچنین در روابط بالا $X \equiv g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu$ است و $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ماتریس پادمتقارن لوی چویتا است. علامت ویرگول نیز نشان دهنده‌ی مشتقات فضایی است.

۵-۲ کنش پیمانه یکانی

تا زمانی که مشتق یک میدان اسکالر $\partial_\mu\phi$، زمان گونه است می‌توان مختصه‌ی زمان t را به‌گونه‌ای انتخاب کرد که رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$\phi = \phi(t). \tag{۲.۵}$$

به این انتخاب مختصه‌ی زمان اغلب پیمانه‌ی یکانی[۲] گفته می‌شود. با اتخاذ تجزیه‌ی ADM داریم

$$ds^۲ = -N^۲dt^۲ + h_{ij}(dx^i + N^idt)(dx^j + N^jdt), \tag{۳.۵}$$

کنش نظریه‌ی $GLPV$ در پیمانه یکانی به شکل زیر است

$$S = \int d^۳xdtN\sqrt{h}\sum_{n=۲}^{۵} L_n, \tag{۴.۵}$$

[۲] unitary gauge

جایی‌که لاگرانژی از جمع چهار جمله‌ی زیر بدست می‌آید

$$L_{۲} = A_{۲}(t, N),$$
$$L_{۳} = A_{۳}(t, N)K,$$
$$L_{۴} = A_{۴}(t, N)K_{۲} + B_{۴}(t, N)R,$$
$$L_{۵} = A_{۵}(t, N)K_{۳} + B_{۵}(t, N)K^{ij}G_{ij}. \qquad (۵.۵)$$

در روابط فوق از تعاریف زیر استفاده شده است

$$K = K^i_i,$$
$$K_{۲} = K^{۲} - K^i_j K^j_i,$$
$$K_{۳} = K^{۳} - ۳KK^{ij}K_{ij} + ۲K^i_j K^j_K K^K_i. \qquad (۶.۵)$$

A_i نیز کمیتی بر حسب t و N می‌باشد. در اینجا، R و G_{ij}، اسکالر ریچی و تانسور اینشتین متریک فضایی سه‌بعدی h_{ij} هستند. علاوه براین انحنای خارجی با رابطه‌ی

$$K_{ij} = \frac{۱}{۲N}(\partial_t h_{ij} - D_i N_j - D_j N_i) \qquad (۷.۵)$$

داده می‌شود. اندیس های فضایی با h_{ij} و h^{ij} پایین و بالا برده می‌شوند.

۵-۳ بررسی قیدها

لاگرانژی را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$L = N\sqrt{h}(L_{۲} + L_{۳} + L_{۴} + L_{۵}). \qquad (۸.۵)$$

کنش شامل مشتقات زمانی N و N^i نیست و بنابراین قیدهای اولیه داریم

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i} = ۰, \qquad \pi_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = ۰. \qquad (۹.۵)$$

تکانه‌ی کانونی مزدوج با h_{ij} با رابطه‌ی

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}}. \qquad (۱۰.۵)$$

معرفی شده و به‌صورت زیر آن را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\pi_{۲}^{ij} &= ۰, \\
\pi_{۳}^{ij} &= \frac{\partial L_{۳}}{\partial \dot{h}_{ij}} = A_{۳}\frac{h^{ij}}{۲N}, \\
\pi_{۴}^{ij} &= \frac{\partial L_{۴}}{\partial \dot{h}_{ij}} = A_{۴}(K\frac{h^{ij}}{N} - \frac{K^{ij}}{N}), \\
\pi_{۵}^{ij} &= \frac{\partial L_{۵}}{\partial \dot{h}_{ij}} = A_{۵}\Big[\frac{۳h^{ij}}{۲N}(K^{۲} - K^{ij}K_{ij}), \\
&\quad - \frac{۳}{۲N}(۲KK_{ij} - ۲K_{k}^{j}K^{ik})\Big] + B_{۵}G_{ij}\frac{۱}{۲N}.
\end{aligned} \tag{۱۱.۵}$$

به این ترتیب برای Π^{ij} داریم

$$\begin{aligned}
\Pi^{ij} &= \sum_{۲}^{۵}\pi_{n}^{ij} = \frac{\sqrt{h}}{۲}\{A_{۳}h^{ij} + ۲A_{۴}(Kh^{ij} - K^{ij}) \\
&+ ۳A_{۵}[h^{ij}(K^{۲} - K^{ij}K_{ij}) \\
&+ ۲(K_{k}^{j}K^{ik} - KK_{ij})] + B_{۵}G_{ij}\},
\end{aligned} \tag{۱۲.۵}$$

و در نتیجه هامیلتونی به‌صورت زیر خواهد بود

$$H = \int d^{۳}x \left(\Pi^{ij}\partial_{t}h_{ij} - N\sqrt{h}\sum_{n=۲}^{۵}L_{n} + \lambda^{i}\pi_{i} + \lambda_{N}\pi_{N}\right), \tag{۱۳.۵}$$

در رابطه‌ی بالا λ_N و λ^i ضرایب لاگرانژ مربوط به قیدهای اولیه هستند.

برای آسانتر شدن محاسبات از این به بعد $A_{۵}$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت

$$\Pi^{ij} = \frac{\sqrt{h}}{۲}\left[A_{۳}h^{ij} + ۲A_{۴}(h^{ij}K - K^{ij}) + B_{۵}G^{ij}\right]. \tag{۱۴.۵}$$

اکنون رابطه‌ای برای K^{ij} بر اساس Π و Π^{ij} به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا K را با استفاده از Π به‌دست می‌آوریم. برای به‌دست آوردن رد Π از معادله‌ی (۱۴.۵) استفاده می‌کنیم

$$\Pi = h_{ij}\pi^{ij} = \sqrt{h}\Big\{\frac{۳}{۲}A_{۳} + ۲A_{۴}K - \frac{۱}{۴}B_{۵}R\Big\}, \tag{۱۵.۵}$$

با استفاده از این معادله، رد تانسور انحنای خارجی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$K = \frac{\pi}{۲A_{۴}\sqrt{h}} - \frac{۳A_{۳}}{۴A_{۴}} + \frac{B_{۵}R}{۸A_{۴}}. \tag{۱۶.۵}$$

در نتیجه با جای‌گذاری K در رابطه‌ی (۱۴.۵) خواهیم داشت

$$K_{ij}=-\frac{۱}{A_۴}\Big[\frac{۱}{\sqrt{h}}\Big(\pi_{ij}-\frac{۱}{۲}h_{ij}\pi\Big)+\frac{A_۳}{۴}h_{ij}-\frac{B_۵}{۲}(R_{ij}-\frac{۱}{۴}Rh_{ij})\Big]. \qquad (۱۷.۵)$$

اکنون هامیلتونی را بر اساس ضرایب لاگرانژ می‌نویسیم. برای این کار رابطه‌ی زیر را محاسبه می‌کنیم

$$H=\pi^{ij}\dot{h}_{ij}-L. \qquad (۱۸.۵)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۴.۵) و جایگذاری K و K_{ij} در آن خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Pi^{ij}=&\frac{۱}{۲N}\sqrt{h}A_۴\dot{h}h^{ij}-\frac{۱}{N}\sqrt{h}A_۴D_lN^lh^{ij} \qquad (۱۹.۵)\\ &+\frac{۱}{۲}\sqrt{h}A_۳h^{ij}-\frac{۱}{۲N}\sqrt{h}A_۴\dot{h}^{ij}+\frac{۱}{۲N}\sqrt{h}A_۴D^iN^j\\ &+\frac{۱}{۲N}\sqrt{h}A_۴D^jN^i+\frac{۱}{۲}\sqrt{h}B_۵G^{ij}.\end{aligned}$$

رد تانسور Π_{ij} را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\Pi=h_{ij}\pi^{ij}=&\frac{۱}{N}\sqrt{h}A_۴\dot{h}-\frac{۲}{N}\sqrt{h}A_۴D_iN^i \qquad (۲۰.۵)\\ &+\frac{۳}{۲}\sqrt{h}A_۳+\frac{۱}{۲}\sqrt{h}B_۵R-\frac{۳}{۴}\sqrt{h}RB_۵.\end{aligned}$$

از رابطه به دست امده برای Π، $\dot{h}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\dot{h}=\frac{N\pi}{\sqrt{h}A_۴}+۲D_iN^i-\frac{۳A_۳}{۲A_۴}N+\frac{B_۵}{۴A_۴}NR. \qquad (۲۱.۵)$$

رابطه‌ی (۲۱.۵) را در (۱۹.۵) گذاشته و $\dot{h}^{ij}$ را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\dot{h}^{ij}=&-\frac{NA_۳}{A_۴}h^{ij}-\frac{NB_۵R}{۴A_۴}h^{ij}+\frac{N\pi}{\sqrt{h}A_۴}h^{ij} \qquad (۲۲.۵)\\ &+D^iN^j+D^jN^i+\frac{NB_۵}{A_۴}R^{ij}-۲\frac{N}{\sqrt{h}A_۴}\pi^{ij}.\end{aligned}$$

اکنون با استفاده از (۲۲.۵) و جایگذاری آن در (۱۸.۵) هامیلتونی به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}H=&-N\sqrt{h}\Big[\frac{۱}{A_۴}\Big(\frac{\pi_{ij}\pi^{ij}}{h}-\frac{\pi^۲}{۲h}\Big)+\frac{\pi A_۳}{۲\sqrt{h}A_۴}-\frac{۳A_۳^۲}{۸A_۴}+A_۲+B_۴R \qquad (۲۳.۵)\\ &-\frac{B_۵}{\sqrt{h}A_۴}\Big(\pi^{ij}R_{ij}-\frac{۱}{۴}\pi R\Big)+\frac{A_۳B_۵}{۸A_۴}R+\frac{B_۵^۲}{۴A_۴}\Big(R^{ij}R_{ij}-\frac{۳}{۸}R^۲\Big)\Big]\\ &+۲\pi_{ij}D^jN^i.\end{aligned}$$

جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا به شکل زیر خواهد بود

$$2\pi_{ij}D^jN^i=-2\sqrt{h}N^iD_j(\frac{\pi_i^j}{\sqrt{h}}), \tag{۲۴.۵}$$

و در نهایت هامیلتونی را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$H=N^i\mathcal{H}_i+N\mathcal{H}_0. \tag{۲۵.۵}$$

که $\mathcal{H}_i$ و $\mathcal{H}_0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathcal{H}_i=-2\sqrt{h}D_j(\frac{\pi_i^j}{\sqrt{h}}), \tag{۲۶.۵}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0=-\sqrt{h}\Big[&\frac{1}{A_4}\Big(\frac{\pi_{ij}\pi^{ij}}{h}-\frac{\pi^2}{2h}\Big)+\frac{\pi A_3}{2\sqrt{h}A_4}-\frac{3A_3^2}{8A_4}+A_2+B_4R\\ &-\frac{B_5}{\sqrt{h}A_4}\Big(\pi^{ij}R_{ij}-\frac{1}{4}\pi R\Big)+\frac{A_3B_5}{8A_4}R+\frac{B_5^2}{4A_4}\Big(R^{ij}R_{ij}-\frac{3}{8}R^2\Big)\Big].\end{aligned} \tag{۲۷.۵}$$

همان طور که در رابطه‌ی (۹.۵) دیدیم دو قید اولیه داریم. برای بررسی وجود یا عدم وجود قیدهای ثانویه، با استفاده از رابطه‌ی (۲۵.۵) به‌صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi_i(x)&\approx\{\pi_i(x),H\}\approx-\frac{\partial H}{\partial N^i}\approx-\mathcal{H}_i,\\ \frac{d}{dt}\pi_N(x)&\approx\{\pi_N(x),H\}\approx-\frac{\partial}{\partial N}(N\mathcal{H}_0)=C.\end{aligned} \tag{۲۸.۵}$$

قیدهای ثانویه‌ی متناظر به شکل زیر هستند

$$\mathcal{H}_i\approx 0,\qquad c\approx 0. \tag{۲۹.۵}$$

C را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$C=-\frac{\partial H}{\partial N}=-\frac{\partial}{\partial N}(N^i\mathcal{H}_i+N\mathcal{H}_0)=-\frac{\partial}{\partial N}(N\mathcal{H}_0), \tag{۳۰.۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
C =&\sqrt{h}\Big[\frac{1}{A_4}\Big(\frac{\pi_{ij}\pi^{ij}}{h}-\frac{\pi^2}{2h}\Big)+\frac{\pi A_3}{2\sqrt{h}A_4}-\frac{3A_3^2}{8A_4}+A_2+B_4R\\
&-\frac{B_5}{\sqrt{h}A_4}\Big(\pi^{ij}R_{ij}-\frac{1}{4}\pi R\Big)+\frac{A_3B_5}{8A_4}R+\frac{B_5^2}{4A_4}\Big(R^{ij}R_{ij}-\frac{3}{8}R^2\Big)\Big]\\
&+N\sqrt{h}\Big[-\frac{1}{A_4^2}\Big(\frac{\pi_{ij}\pi^{ij}}{h}-\frac{\pi^2}{2h}\Big)\frac{\partial A_4}{\partial N}+\frac{1}{2\sqrt{h}A_4^2}\Big(\pi A_4\frac{\partial A_3}{\partial N}-\pi A_3\frac{\partial A_4}{\partial N}\Big)\\
&-\frac{1}{16A_4^2}\Big(12A_3A_4\frac{\partial A_3}{\partial N}-6A_3^2\frac{\partial A_4}{\partial N}\Big)+\frac{\partial A_2}{\partial N}+R\frac{\partial B_4}{\partial N}\\
&-\frac{1}{\sqrt{h}A_4^2}\Big(\pi^{ij}R_{ij}-\frac{1}{4}\pi R\Big)\Big(A_4\frac{\partial B_5}{\partial N}-B_5\frac{\partial A_4}{\partial N}\Big)\\
&+\frac{1}{8A_4^2}\Big(RA_4B_5\frac{\partial A_3}{\partial N}+RA_3A_4\frac{\partial B_5}{\partial N}-RA_3B_5\frac{\partial A_4}{\partial N}\Big)\\
&+\frac{1}{4A_4^2}\Big(R^{ij}R_{ij}-\frac{3}{8}R^2\Big)\Big(2A_4B_5\frac{\partial B_5}{\partial N}-B_5^2\frac{\partial A_4}{\partial N}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{۳۱.۵}$$

حال از روابط زیر برای محاسبه C استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)&=\frac{1}{A_4^2}\Big(A_4-N\frac{\partial A_4}{\partial N}\Big),\\
\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3}{A_4}\Big)&=\frac{A_3}{A_4}+\frac{N}{A_4^2}\Big(A_4\frac{\partial A_3}{\partial N}-A_3\frac{\partial A_4}{\partial N}\Big),\\
\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3^2}{A_4}\Big)&=\frac{A_3^2}{A_4}+\frac{2NA_3}{A_4}\frac{\partial A_3}{\partial N}-\frac{NA_3^2}{A_4^2}\frac{\partial A_4}{\partial N},\\
\frac{\partial}{\partial N}(NA_2)&=A_2+N\frac{\partial A_2}{\partial N},\\
R\frac{\partial}{\partial N}(NB_4)&=R\Big(B_4+N\frac{\partial B_4}{\partial N}\Big),\\
\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)&=\frac{B_5}{A_4}+\frac{N}{A_4}\frac{\partial B_5}{\partial N}-\frac{NB_5}{A_4^2}\frac{\partial A_4}{\partial N}.
\end{aligned} \tag{۳۲.۵}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
C=\sqrt{h}\Big\{&\Big(\frac{\pi_{ij}\pi^{ij}}{h}-\frac{\pi^2}{2h}\Big)\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)+\frac{\pi}{2\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3}{A_4}\Big)-\frac{3}{8}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3^2}{A_4}\Big)\\
&+\frac{\partial}{\partial N}(NA_2)+R\frac{\partial}{\partial N}(NB_4)-\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)\Big(\pi^{ij}R_{ij}-\frac{1}{4}\pi R\Big)\\
&+R\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3B_5}{8A_4}\Big)+\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5^2}{4A_4}\Big)\Big(R^{ij}R_{ij}-\frac{3}{8}R^2\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{۳۳.۵}$$

از آنجایی‌که $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$ و $B_۴$ و $B_۵$ وابسته به N هستند، c نیز به N بستگی خواهد داشت. با استفاده از قید $c \approx ۰$ می‌توانیم N را تعیین کنیم به شرطی‌که رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$\frac{\partial^۲ H}{\partial N^۲} \neq ۰. \qquad (۳۴.۵)$$

می‌توانیم به راحتی نشان دهیم که رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\{\bar{\mathcal{H}}[f], \bar{\mathcal{H}}[g]\}_p \approx \bar{\mathcal{H}}[[f,g]] \approx ۰, \qquad for\ {}^\forall f^i, {}^\forall g^i. \qquad (۳۵.۵)$$

برای ادامه کار و اثبات رابطه‌ی (۳۵.۵) نیاز به استفاده از روابط کاربردی زیر داریم

$$\bar{\mathcal{H}}[f] \equiv \int d^۳x f^i(x)\mathcal{H}_i(x), \qquad [f,g]^i \equiv f^j\partial_j g^i - g^j\partial_j f^i. \qquad (۳۶.۵)$$

$\bar{\mathcal{H}}$ ترکیبی خطی از قیدهای $\mathcal{H}_i$ است.

$$\frac{\delta\bar{\mathcal{H}}[f]}{\delta h_{ij}(z)} \approx \sqrt{h}\Big[\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_l f^j + \frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_l f^i - D_l(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})\Big], \qquad (۳۷.۵)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\bar{\mathcal{H}}[f]}{\delta \pi^{ij}(z)} &\approx \int d^۳x\Big[-۲\sqrt{h}\Big(f_i(x)h^{il}D^j(\frac{۱}{\sqrt{h}}\frac{\delta\pi_{lj}}{\delta\pi_{km}})\Big)\Big] \\ &= \int d^۳x\Big[۲\sqrt{h}\Big(۲\frac{۱}{\sqrt{h}}(\delta^l_k\delta^j_m + \delta^l_m\delta^j_k)D^j(f_i(x)h^{il})\Big)\Big] \\ &\approx D_i f_j + D_j f_i,\end{aligned} \qquad (۳۸.۵)$$

در روابط بالا f^i و g^i توابع اختیاری فضایی می‌باشند. $\bar{C}$ نیز ترکیبی خطی از C به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\bar{C}[\varphi] = \int d^۳x\varphi(x)C(x), \qquad f\partial\varphi \equiv f^i\partial_i\varphi. \qquad (۳۹.۵)$$

در نتیجه محاسبه می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\bar{C}[\varphi]}{\delta h_{ij}(z)} \approx\ & \frac{۱}{۲}\varphi C h^{ij} \\
& + \sqrt{h}\Big\{\varphi\frac{\pi^{۲}h^{ij} - ۲\pi_{mn}\pi^{mn}h^{ij} - ۲\pi\pi^{ij} + ۴\pi^{i}_{l}\pi^{lj}}{۲h}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_{۴}})\Big\} \\
& + \sqrt{h}\Big\{\varphi\frac{۲\pi^{ij} - \pi h^{ij}}{۴\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_{۳}}{A_{۴}}) - \varphi R^{ij}\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴} + \frac{NA_{۳}B_{۵}}{۸A_{۴}})\Big\} \\
& + \sqrt{h}\Big\{\varphi\frac{۲\pi^{ij}R - ۲\pi R^{ij} + ۴\pi^{mn}R_{mn}h^{ij} - \pi R h^{ij}}{۸\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_{۵}}{A_{۴}})\Big\} \\
& + \sqrt{h}\Big\{-\frac{\varphi}{۲}\Big(R^{i}_{l}R^{jl} - \frac{۳}{۸}RR^{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_{۵}^{۲}}{A_{۴}})\Big\} \\
& + \sqrt{h}\Big\{\Big(D^{i}D^{j} - h^{ij}D^{۲}\Big)\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴} + \frac{NA_{۳}B_{۵}}{۸A_{۴}})\Big]\Big\} \\
& + \sqrt{h}\Big\{\frac{۱}{۴}\Big[\delta^{l}_{k}\Big(D^{i}D^{j} - h^{ij}D^{۲}\Big) + ۲\Big(\delta^{i}_{k}h^{jl}D^{۲} + h^{ij}D_{k}D^{l} - \delta^{i}_{k}D^{l}D^{j} \\
& - \delta^{j}_{k}D^{l}D^{i}\Big)\Big]\Big\} \times \Big[\varphi\frac{\pi^{k}_{l}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_{۵}}{A_{۴}}) - \frac{\varphi}{۲}G^{k}_{l}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_{۵}^{۲}}{A_{۴}})\Big],
\end{aligned}
\tag{۴۰.۵}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\bar{C}[\varphi]}{\delta\pi^{ij}(z)} \approx\ & \varphi(x)\sqrt{h}\Big[\Big(\frac{۲\pi_{ml}}{h}\frac{\delta\pi^{ml}}{\delta\pi^{ij}} - \frac{\pi h_{ml}}{h}\frac{\delta\pi^{ml}}{\delta\pi^{ij}}\Big)\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_{۴}}) \\
& + \frac{۱}{۲\sqrt{h}}h_{ml}\frac{\delta\pi^{ml}}{\delta\pi^{ij}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_{۳}}{A_{۴}}) \\
& - \frac{۱}{\sqrt{h}}\Big(R_{ml}\frac{\delta\pi^{ml}}{\delta\pi^{ij}} - \frac{۱}{۴}Rh_{ml}\frac{\delta\pi^{ml}}{\delta\pi^{ij}}\Big)\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_{۵}}{A_{۴}})\Big] \\
\approx\ & \varphi\Big\{\frac{۲\pi_{ij} - \pi h_{ij}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_{۴}}) + \frac{۱}{۲}h_{ij}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_{۳}}{A_{۴}}) \\
& - (G_{ij} + \frac{۱}{۴}Rh_{ij})\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_{۵}}{A_{۴}}\Big)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{۴۱.۵}
$$

اکنون رابطه (۳۵.۵) رااثبات می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\mathcal{H}}[f],\bar{\mathcal{H}}[g]\} \approx{}& \sqrt{h}\Big[\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lf^j+\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_lf^i-D_l(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})\Big]\Big(D_ig_j+D_jg_i\Big)\\
&-\sqrt{h}\Big[\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lg^j+\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_lg^i-D_l(g^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})\Big]\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\\
={}&\sqrt{h}\Big\{\frac{pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lf^jD_ig_j+\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lf^jD_jg_i+\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_lf^iD_ig_j\\
&+\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_lf^iD_jg_i-D_l(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})D_ig_j-D_l(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})D_jg_i\\
&-\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lg^jD_if_j-\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lg^jD_jf_i-\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_lg^iD_if_j\\
&-\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_lg^iD_jf_i+D_l(g^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})D_if_j+D_l(g^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})D_jf_i\Big\}\\
={}&۲\sqrt{h}\Big\{\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lf^jD_jg_i-\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lg^jD_jf_i+f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}D_lD_ig_j\\
&-g^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}D_lD_if_j\Big\}.
\end{aligned}
\tag{۴۲.۵}
$$

دو جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا به‌صورت زیر ساده می‌شوند

$$
\begin{aligned}
f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}D_lD_ig_j &= D_i(f^lD_lg_j\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})-D_iF^lD_lg_j\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}-f^lD_lg_jD_i(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})\\
-g^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}D_lD_if_j &= -D_i(g^lD_lf_j\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})+D_ig^lD_lf_j\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}+g^lD_lf_jD_i(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}),
\end{aligned}
$$

در نتیجه به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\mathcal{H}}[f],\bar{\mathcal{H}}[g]\}\approx ۲\sqrt{h}\Big\{&D_i\Big[\Big(f^lD_lg_j-g^lD_lf_j\Big)\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\Big]\\
&-D_i(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})\Big(f^lD_lg_j-g^lD_lf_j\Big)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{۴۳.۵}
$$

جمله‌ی اول رابطه بالا به دلیل مشتق کامل بودن صفر است و در نتیجه داریم

$$\{\bar{\mathcal{H}}[f],\bar{\mathcal{H}}[g]\}\approx\bar{\mathcal{H}}[[f,g]]\approx ۰. \tag{۴۴.۵}$$

رابطه‌ی زیر را نیز می‌توانیم به‌سادگی با استفاده از تعاریف بالا اثبات کنیم

$$\{\bar{\mathcal{H}}[f],\bar{C}[\varphi]\}_p\approx\bar{C}[f\partial\varphi]-\int d^۳x\frac{\partial^۲\mathcal{H}}{\partial N^۲}\varphi f^i\partial_iN. \tag{۴۵.۵}$$

با کمک گرفتن از از روابط (۳۷.۵) تا (۴۱.۵) می‌خواهیم رابطه‌ی (۴۵.۵) را محاسبه می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\mathcal{H}}[f],\bar{C}[\varphi]\}_p \approx{}& \sqrt{h}\Big[\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_l f^j+\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_l f^i-D_l(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}})\Big] \\
&\times\varphi\Big[\frac{2\pi_{ij}-\pi h_{ij}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_4}) \\
&+\frac{1}{2}h_{ij}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_3}{A_4})-\Big(G_{ij}+\frac{1}{4}Rh_{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_5}{A_4})\Big] \\
&-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\Big\{\frac{1}{2}\varphi Ch^{ij} \\
&+\sqrt{h}\Big[\varphi\frac{\pi^2h^{ij}-2\pi_{mn}\pi^{mn}h^{ij}-2\pi\pi^{ij}+4\pi^i_l\pi^{lj}}{2h}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_4})\Big] \\
&+\sqrt{h}\varphi\frac{2\pi^{ij}-\pi h^{ij}}{4\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_3}{A_4})-\sqrt{h}\varphi R^{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_4+\frac{NA_3B_5}{8A_4}\Big) \\
&+\sqrt{h}\varphi\frac{2\pi^{ij}R-2\pi R^{ij}+4\pi^{mn}R_{mn}h^{ij}-\pi Rh^{ij}}{8\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_5}{A_4}) \\
&-\sqrt{h}\frac{\varphi}{2}\Big(R^i_lR^{jl}-\frac{3}{8}RR^{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_5^2}{A_4}) \\
&+\sqrt{h}\Big(D^iD^j-h^{ij}D^2\Big)\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_4+\frac{NA_3B_5}{8A_4})\Big] \\
&+\sqrt{h}\frac{1}{4}\Big[\delta^l_k\Big(D^iD^j-h^{ij}D^2\Big)+2\Big(\delta^i_kh^{jl}D^2+h^{ij}D_kD^l-\delta^i_kD^lD^j \\
&-\delta^j_kD^lD^i\Big)\Big]\times\Big[\varphi\frac{\pi^k_l}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_5}{A_4})-\frac{\varphi}{2}G^k_l\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_5^2}{A_4})\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{۴۶.۵}
$$

برای ساده کردن رابطه‌ی بالا، جملات مربوط به هر مشتق جزئی را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

ابتدا به ساده کردن جملات مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_4})$ می‌پردازیم

$$\begin{aligned}
&2\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_l f^j\varphi\frac{\pi_{ij}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)-\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_l f^j\varphi\frac{\pi h_{ij}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)\\
&+2\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_l f^i\varphi\frac{\pi_{ij}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)-\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_l f^i\varphi\frac{\pi h_{ij}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)\\
&-\Big(D_i f_j+D_j f_i\Big)\varphi\frac{\pi^2 h^{ij}}{2h}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)+\Big(D_i f_j+D_j f_i\Big)\varphi\frac{\pi_{mn}\pi^{mn}h^{ij}}{h}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)\\
&+\Big(D_i f_j+D_j f_i\Big)\varphi\frac{\pi\pi^{ij}}{h}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)-2\Big(D_i f_j+D_j f_i\Big)\varphi\frac{\pi^i_l\pi^{lj}}{h}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)\\
&-\Big(D_i f_j+D_j f_i\Big)\frac{1}{2}\varphi h^{ij}\Big(\frac{\pi_{mn}\pi^{mn}}{h}-\frac{\pi^2}{2h}\Big)\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)\\
&-2D_l\Big(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\Big)\frac{\pi_{ij}}{\sqrt{h}}\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)+\varphi D_l\Big(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\Big)\frac{\pi h_{ij}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big),
\end{aligned}\tag{۴۷.۵}$$

در رابطه‌ی بالا جملات خط‌های اول و دوم و چهارم با هم ساده می‌شوند.

جمله‌ی اول خط سوم رابطه‌ی (۴۷.۵) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$f^i D_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_4})\Big]\frac{\pi^2}{h}+f^i\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)D_i\Big(\frac{\pi^2}{h}\Big).\tag{۴۸.۵}$$

جمله‌ی دوم خط سوم رابطه‌ی (۴۷.۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$-2f^i D_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)\Big]\frac{\pi_{mn}\pi^{mn}}{h}-2f^i\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)D_i\Big(\frac{\pi_{mn}\pi^{mn}}{h}\Big).\tag{۴۹.۵}$$

خط پنجم رابطه‌ی (۴۷.۵) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$f^i D_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_4})\Big]\Big(\frac{\pi_{mn}\pi^{mn}}{h}-\frac{\pi^2}{2h}\Big)+f^i\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)D_i\Big(\frac{\pi_{mn}\pi^{mn}}{h}-\frac{\pi^2}{2h}\Big).\tag{۵۰.۵}$$

جمله‌ی اول خط آخر رابطه‌ی (۴۷.۵) را به شکل زیر می‌نویسیم

$$2f^i D_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_4})\Big]\frac{\pi_{mn}\pi^{mn}}{h}+2f^i\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)D_i\Big(\frac{\pi_{ij}}{\sqrt{h}}\Big),\tag{۵۱.۵}$$

و در نهایت جمله‌ی آخر رابطه‌ی (۴۷.۵) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$-2f^i D_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)\Big]\frac{\pi^2}{2h}-2f^i\varphi\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)D_i\Big(\frac{\pi h_{ij}}{2\sqrt{h}}\Big).\tag{۵۲.۵}$$

در نتیجه جمله‌ی مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N}{A_۴})$ به شکل زیر است

$$f^i D_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_۴}\Big)\Big]\Big(\frac{\pi_{mn}\pi^{mn}}{h}-\frac{\pi^۲}{۲h}\Big). \tag{۵۳.۵}$$

اکنون جمله‌ی مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_۳}{A_۴})$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{۲}\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_l f^j\varphi h_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_۳}{A_۴}\Big)+\frac{۱}{۲}\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_l f^i\varphi h_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_۳}{A_۴}\Big)\\&-\frac{۱}{۲}\varphi D_l\Big(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\Big)h_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_۳}{A_۴}\Big)-\Big(D_if_j+D_jF_i\Big)\varphi\frac{\pi^{ij}}{۲\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_۳}{A_۴}\Big)\\&+\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\varphi\frac{\pi h^{ij}}{۴\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_۳}{A_۴}\Big)-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\frac{۱}{۲}\varphi h^{ij}\frac{\pi}{۲\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_۳}{A_۴}\Big)\end{aligned} \tag{۵۴.۵}$$

که پس از ساده کردن به جمله‌ی زیر می‌رسیم

$$\frac{\pi}{۲\sqrt{h}}f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_۳}{A_۴})\Big] \tag{۵۵.۵}$$

حال جمله‌ی مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_۳^۲}{A_۴})$ را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}&\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\frac{۱}{۲}\varphi\frac{۳}{۸}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_۳^۲}{A_۴}\Big)\\&=-\frac{۳}{۸}f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_۳^۲}{A_۴}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{۵۶.۵}$$

در زیر به بررسی جمله‌ی مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(NA_۲)$ می‌پردازیم

$$\begin{aligned}&-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\frac{۱}{۲}\varphi h^{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(NA_۲\Big)\\&=f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NA_۲)\Big]\end{aligned} \tag{۵۷.۵}$$

اکنون جمله‌ی مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(NB_۴)$ را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}&\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\varphi R^{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_۴\Big)\\&-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\Big(D^iD^j-h^{ij}D^۲\Big)\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_۴)\Big]\\&-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\frac{۱}{۲}\varphi h^{ij}R\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_۴\Big)\end{aligned} \tag{۵۸.۵}$$

جمله‌ی دوم رابطه‌ی (۵۸.۵) را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
&-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\Big(D^iD^j-h^{ij}D^{۲}\Big)\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big]\\
&=D^k\big(D_if_j+D_jf_i\big)\Big(D^jh^i_k-h^{ij}D_k\Big)\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big]\\
&=-D^lD^k\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\Big(h^j_lh^i_k-h^{ij}h_{lk}\Big)\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big]\\
&=-D^lD^K\Big(D_kf_l+D_lf_k\Big)\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big]+۲D_kD^kD^jf_j\\
&\times\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_{۴}\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{۵۹.۵}
$$

از روابط زیر برای ساده کردن (۵۹.۵) استفاده می‌کنیم

$$
۲D_kD^kD^jf_j\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big]=۲D_k\Big[D^jD^kf_j+R^a{}_j{}^{jk}f_a\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big],
\tag{۶۰.۵}
$$

$$
\begin{aligned}
-D^lD^kD_lf_k\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big]=&-D^kD^lD_lf_k\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big]\\
&-R^a{}_k{}^{kl}D_lf_a\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big]\\
&-R^a{}_l{}^{kl}D_af_k\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big],
\end{aligned}
\tag{۶۱.۵}
$$

$$
D_kD^jD^kf_j=D^jD_kD^kf_j+R^a{}_j{}^j{}_kD^kf_a+R^{akj}{}_kD_af_j.
\tag{۶۲.۵}
$$

با استفاده از روابط تعریف شده، (۵۹.۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$
\Big[-۲f_aD_kR^{ak}-۲R^{ak}D_kf_a\Big]\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_{۴}\Big)\Big].
\tag{۶۳.۵}
$$

در نتیجه برای جمله‌ی مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})$ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&-۲f_aD_kR^{ak}\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_{۴}\Big)\Big]\\
&+f^i\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_{۴}\Big)D_iR\\
&+Rf^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_{۴}\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{۶۴.۵}
$$

جمع دو جمله‌ی اول برابر اتحاد بیانکی تنجش داده شده است. در نتیجه مساوی صفر می‌باشد. در نهایت (۶۴.۵) برابر خواهد بود با

$$
Rf^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(NB_{۴})\Big].
\tag{۶۵.۵}
$$

حال جمله‌ی مربوط به $\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_5}{A_4})$ را محاسبه می‌نماییم

$$\sqrt{h}\Big[\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_l f^j+\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_l f^i-D_l\Big(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\Big)\Big]\varphi \times\Big[-\Big(G_{ij}+\frac{1}{4}Rh_{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)\Big]-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\frac{1}{2}\varphi Ch^{ij} -\sqrt{h}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\varphi\frac{2\pi^{ij}R-2\pi R^{ij}+4\pi^{mn}R_{mn}h^{ij}-\pi Rh^{ij}}{8\sqrt{h}} \times\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)-\frac{\sqrt{h}}{4}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\delta^l_k\Big(D^iD^j-h^{ij}D^2\Big) \times\Big[\varphi\frac{\pi^k_l}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)\Big]-\frac{1}{2}\sqrt{h}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\Big(\delta^i_kh^{jl}D^2+h^{ij}D_kD^l -\delta^i_kD^lD^j-\delta^j_kD^lD^i\Big)\times\Big[\varphi\frac{\pi^k_l}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)\Big], \tag{۶۶.۵}$$

که برابر خواهد بود با

$$-\sqrt{h}\Big[\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lf^j\varphi R_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)+\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_lf^i\varphi R_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big) -D_l\Big(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\Big)\varphi R_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)-\frac{1}{4}\frac{\pi^{il}}{\sqrt{h}}D_lf^j\varphi Rh_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big) -\frac{1}{4}\frac{\pi^{jl}}{\sqrt{h}}D_lf^i\varphi Rh_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)+\frac{1}{4}D_l\Big(f^l\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\Big)\varphi Rh_{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big) -\frac{1}{2\sqrt{h}}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\varphi h^{ij}\Big(\pi^{mn}R_{mn}-\frac{1}{4}\pi R\Big)\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big) +\frac{1}{4\sqrt{h}}\Big(D_if_j+D_gf_i\Big)\varphi\pi^{ij}R\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)-\frac{1}{4\sqrt{h}}\Big(D_if_j+D_gf_i\Big) \times\varphi\pi R^{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)+\frac{1}{2\sqrt{h}}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\varphi\pi^{mn}R_{mn}h^{ij} -\frac{1}{8\sqrt{h}}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\times\varphi\pi Rh^{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)+\frac{1}{4}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big) \times\Big(D^iD^j-h^{ij}D^2\Big)\Big[\varphi\frac{\pi}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)\Big]+\frac{1}{2}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big) \times\Big(\delta^i_kh^{jl}D^2+h^{ij}D_kD^l-\delta^i_kD^lD^j-\delta^j_kD^lD^i\Big)\Big(\varphi\frac{\pi^k_l}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)\Big)\Big]. \tag{۶۷.۵}$$

پس از ساده کردن به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$-f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NB_5}{A_4})\Big]\frac{\pi^{mn}R_{mn}-\frac{1}{4}\pi R}{\sqrt{h}}. \tag{۶۸.۵}$$

جمله‌ی مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(\frac{NA_3B_5}{8A_4})$ را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\varphi R^{ij}\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3B_5}{8A_4}\Big)\\
&-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\Big(D^iD^j-H^{ij}D^2\Big)\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3B_5}{8A_4}\Big)\\
&-\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\frac{1}{2}\varphi R\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3B_5}{8A_4}\Big)
\end{aligned}\tag{۶۹.۵}$$

پس از ساده کردن به جمله‌ی زیر می‌رسیم

$$Rf^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3B_5}{8A_4}\Big)\Big].\tag{۷۰.۵}$$

اکنون به بررسی جمله‌ی مربوط به مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial N}(\frac{N\mathcal{N}B_5^2}{A_4})$ می‌پردازیم

$$\begin{aligned}
&\Big(R^{mn}R_{mn}-\frac{3}{8}R^2\Big)F^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5^2}{A_4}\Big)\Big]+f^i\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5^2}{A_4}\Big)\\
&\times D_i\Big[R^{mn}R_{mn}-\frac{3}{8}R^2\Big]+\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\frac{\varphi}{2}\Big(R^i_lR^{jl}-\frac{3}{8}RR^{ij}\Big)\\
&\times\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5^2}{A_4}\Big)+\frac{1}{4}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\delta^l_k\Big(D^iD^j-h^{ij}D^2\Big)\\
&\times\Big[\frac{\varphi}{2}G^k_l\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5^2}{A_4}\Big)\Big]+\frac{1}{2}\Big(D_if_j+D_jf_i\Big)\Big(\delta^i_kh^{jl}D^2+h^{ij}D_kD^l\\
&-\delta^i_kD^lD^j-\delta^j_kD^lD^i\Big)\times\Big[\frac{\varphi}{2}G^k_l\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5^2}{A_4}\Big)\Big].
\end{aligned}\tag{۷۱.۵}$$

در نهایت رابطه‌ی (۴۶.۵) با توجه به محاسبات بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}
\{\bar{\mathcal{H}}[f],\bar{C}[\varphi]\}\approx\int d^3x\sqrt{h}\Big\{&\Big(\frac{\pi^{ij}\pi_{ij}}{h}-\frac{\pi^2}{2h}\Big)f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{N}{A_4}\Big)\Big]\\
&-\frac{3}{8}f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3^2}{A_4}\Big)\Big]+f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(NA_2\Big)\Big]\\
&+Rf^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(NB_4\Big)\Big]-\frac{\pi^{ij}R_{ij}-\frac{1}{4}\pi R}{\sqrt{h}}f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_5}{A_4}\Big)\Big]\\
&+Rf^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3B_5}{8A_4}\Big)\Big]+\Big(R^{mn}R_{mn}-\frac{3}{8}R^2\Big)f^i\\
&\times D_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NB_{5^2}}{4A_4}\Big)\Big]+\frac{\pi}{2\sqrt{h}}f^iD_i\Big[\varphi\frac{\partial}{\partial N}\Big(\frac{NA_3}{A_4}\Big)\Big]\Big\}.
\end{aligned}\tag{۷۲.۵}$$

می‌توانیم رابطه (۷۲.۵) را به‌صورت زیر خلاصه کنیم

$$\{\bar{\mathcal{H}}[f],\bar{C}[\varphi]\}\approx\int d^3x\Big(Cf^iD_i\varphi+\varphi f^iD_iN\frac{\partial}{\partial N}C\Big).\tag{۷۳.۵}$$

جمله‌ی اول رابطه‌ی بالا روی سطح با تعریف $C = ۰$ حذف می شود، اما جمله‌ی دوم باقی می‌ماند. در در نتیجه می‌توانیم H_i را به‌صورت زیر تبدیل به قید نوع اول کنیم

$$\mathcal{H}_i^{tot} \equiv \mathcal{H}_i + \pi_N \partial_N N. \qquad (۷۴.۵)$$

ترکیبی خطی از این قید نوع اول و قید نکانه به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\bar{\mathcal{H}}_{tot}[f] \equiv \int d^۳x f^i(x)\mathcal{H}_i^{tot}(x), \qquad \bar{\pi}_N[\varphi] \equiv \int d^۳x \varphi(x)\pi_N(x). \qquad (۷۵.۵)$$

سپس کروشه‌ی پواسون $\bar{\mathcal{H}}_{tot}$ را با سایر قیود بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathcal{H}}_{tot}[f], \bar{\pi}_N[\varphi]\}_p &\approx \bar{\pi}_N[f\partial\varphi] \approx ۰, \\ \{\bar{\mathcal{H}}_{tot}[f], \bar{C}_N[\varphi]\}_p &\approx \bar{C}[f\partial\varphi] \approx ۰, \\ \{\bar{\mathcal{H}}_{tot}[f], \bar{\mathcal{H}}_{tot}[g]\}_p &\approx \bar{\mathcal{H}}_{tot}[[f,g]] \approx ۰. \end{aligned} \qquad (۷۶.۵)$$

همچنین طبق تعریف داریم

$$\begin{aligned} \{\pi_i(x), \pi_j(y)\}_p &= ۰, \\ \{\pi_i(x), \pi_N(y)\}_p &= ۰, \\ \{\pi_i(x), C(y)\}_p &= ۰ \\ \{\pi_x, \mathcal{H}_j^{tot}(y)\}_p &= ۰. \end{aligned} \qquad (۷۷.۵)$$

بنابراین مشتق زمانی $\bar{\mathcal{H}}_{tot}[f]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathcal{H}}_{tot}[f] \approx \{\bar{\mathcal{H}}_{tot}[f], H\}_p \approx \bar{\mathcal{H}}[[f,N]] + \bar{\pi}_N[f\partial\lambda_N] \approx ۰, \qquad (۷۸.۵)$$

پس نتیجه می‌شود که قیود

$$\mathcal{H}_i^{tot} \approx ۰, \qquad (i = ۱,۲,۳),$$

و

$$\pi_i \approx ۰,$$

نوع اول هستند و قید ثانویه‌ی اضافی مرتبط با آن‌ها وجود ندارد. اکنون کروشه‌ی پواسون قید π_N را با سایر قیود بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \{\pi_N(x), \pi_N(y)\} &= ۰, \\ \{C(x), \pi_N(y)\} &= -\frac{\partial^۲\mathcal{H}}{\partial N^۲}\delta^۳(x-y). \end{aligned} \qquad (۷۹.۵)$$

به‌شرط برقراری رابطه‌ی (۳۴.۵) دترمینان زیر به‌طور ضعیف صفر نخواهد بود

$$det\begin{pmatrix} \{\pi_N(x),\pi_N(y)\}_p & \{\pi_N(x),C(y)\}_p \\ \{C(x),\pi_N(y)\}_p & \{C(x),C(y)\}_p \end{pmatrix} \neq 0, \qquad (۸۰.۵)$$

به این معنی‌که مجموعه‌ی قیود $\pi_N \approx 0$ و $C \approx 0$ قیود نوع دوم هستند. در نتیجه هامیلتونی کلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} H_{tot} &= \int d^3x[\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i + n^i\mathcal{H}_i^{tot} + \lambda^i\pi_i + \lambda_N\pi_N + \lambda_c C] \\ &= \int d^3x[\mathcal{H} + (N^i+n^i)\mathcal{H}_i + \lambda^i\pi_i + (\lambda_N + n^i\partial_i N)\pi_N + \lambda_c C]. \end{aligned} \qquad (۸۱.۵)$$

به‌دلیل این‌که $\pi_N \approx 0$ و $C \approx 0$ قیود نوع دوم هستند از رابطه‌ی مشتق زمانی زیر قید ثانویه‌ی اضافی به‌دست نمی‌آید بلکه ضرایب لاگرانژ λ_c و λ_N تعیین می‌شوند

$$\frac{d}{dt}\pi_N(x) \approx \{\pi_N(x),H_{tot}\} \approx 0, \qquad \frac{d}{dt}C(x) \approx \frac{\partial}{\partial t}C(x) + \{C(x),H_{tot}\} \approx 0. \qquad (۸۲.۵)$$

۵-۴ شمارش درجات آزادی

برای شمارش درجات آزادی ابتدا تثبیت پیمانه انجام می‌دهیم. برای یک تثبیت پیمانه‌ی کامل باید تعداد شرایط پیمانه‌ای مستقل برابر با تعداد قیود نوع اول باشد. در این مساله ما دو قید نوع اول داریم و دو شرط پیمانه‌ای به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C^i(x) \approx 0, \qquad \mathcal{F}^i(x) \approx 0, \qquad (i = 1,2,3), \qquad (۸۳.۵)$$

بنابراین کروشه‌ی پواسون شرایط پیمانه‌ای با قیود نوع اول تشکیل یک ماتریس مربعی می‌دهند

$$det\begin{pmatrix} \frac{\delta C^j(y)}{\delta N^i(x)} & \frac{\delta \mathcal{F}^j(y)}{\delta N^i(x)} \\ \{\mathcal{H}_i^{tot}(x),C^j(y)\}_p & \{\mathcal{H}_i^{tot}(x),\mathcal{F}^j(y)\}_p \end{pmatrix}, \qquad (۸۴.۵)$$

p نشاندهنده‌ی کروشه‌ی پواسون است. این ماتریس معکوس‌پذیر و مخالف صفر است. با تثبیت پیمانه می‌خواهیم آزادی‌های پیمانه‌ای را از بین ببریم، پس منطقی است که تمام قیدهای نوع اول پس از تثبیت پیمانه از بین می‌روند.

با در نظر گرفتن شرایط پیمانه‌ای مجموعه‌ای از ۱۴ قید نوع دوم به‌صورت زیر خواهیم داشت

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_i^{tot} \approx 0, \qquad \pi_i \approx 0, \qquad C^i(x) \approx 0, \qquad \mathcal{F}^i(x) \approx 0 \\ \pi_N \approx 0, \qquad C \approx 0, \qquad (i = 1,2,3). \end{gathered} \qquad (۸۵.۵)$$

بعد از تثبیت پیمانه هامیلتونی کلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} H'_{tot} &= \int d^{3}x\Big[\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i + n^i\mathcal{H}_i^{tot} \\ &+ \lambda^i\pi_i + \lambda_i^C C^i + \lambda_i^{\mathcal{F}}\mathcal{F}^i + \lambda_N\pi_N + \lambda_c C\Big] \\ &= \int d^{3}x\Big[\mathcal{H} + \Big(N^i + n^i\Big)\mathcal{H}_i + \lambda^i\pi_i \\ &+ \Big(\lambda_N + n^i\partial_i N\Big)\pi_N + \lambda_c C + +\lambda_i^C C^i + \lambda_i^{\mathcal{F}}\mathcal{F}^i\Big]. \end{aligned} \tag{۸۶.۵}$$

در رابطه‌ی بالا $\lambda_i^{\mathcal{F}}$ و λ_i^C ضرایب لاگرانژ هستند. به‌طور معمول با داشتن قیدهای نوع دوم، مجموعه‌ی ضرایب لاگرانژ به‌طور کامل با روابط زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_i(x), H'_{tot}\}_p &\approx 0, \\ \{\pi_i(x), H'_{tot}\}_p &\approx 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}C^i(x) + \{C^i(x), H'_{tot}\}_p &\approx 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}^i(x) + \{\mathcal{F}^i(x), H'_{tot}\}_p &\approx 0, \\ \{\pi_N(x), H'_{tot}\}_p &\approx 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}C(x) + \{C(x), H'_{tot}\}_p &\approx 0. \end{aligned} \tag{۸۷.۵}$$

در ابتدا با فضای فاز ۲۰ بعدی شروع کردیم و در نهایت با کم کردن ۱۴ قید نوع دوم، به فضای فاز فیزیکی ۶ بعدی رسیدیم. بنابراین ۳ درجه‌ی آزادی داریم [۲۸].

استدلال‌های بالا مانع از حضور درجات آزادی اضافی در نظریه‌ی می‌شدند، اکنون باید بررسی کنیم که درجات آزادی باقیمانده شبح نباشند. بنابراین به محاسبه‌ی یک کنش درجه‌ی دوم برای بررسی اختلالات انتشار درجات آزادی می‌پردازیم و همچنین باید اطمینان حاصل کنیم که بخش‌های انرژی جنبشی دارای علامت درست هستند.

برای انجام این بررسی در کیهان‌شناسی، متریک $FLRW$[۳] را انتخاب می‌کنیم. با شروع از کنش اینشتین_هیلبرت و تعمیم آن، به لاگرانژی درجه‌ی دومی به‌صورت زیر دست پیدا می‌کنیم

$$L^{(2)} = \alpha\dot{\mathcal{G}}^{2} - \beta\frac{(\partial_i\mathcal{G})^{2}}{a^{2}} + \frac{1}{4}\Big[-\mathcal{A}_4\dot{\gamma}_{ij}^{2} - \mathcal{B}_4\frac{(\partial_k\gamma_{ij})^{2}}{a^{2}}\Big], \tag{۸۸.۵}$$

که طبق انتظار ما شامل مشتقات زمانی مراتب بالا نیست و همچنین به‌ازای مثبت بودن ضرایب α و $-\mathcal{A}_4$ ، می‌توان تضمین کرد که درجات آزادی شبح در نظریه وجود ندارند [۲۷].

[۳] Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

۵-۵ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه به بررسی نظریه‌ی هورندسکی به‌عنوان یک نظریه‌ی تانسور اسکالر برای تعمیم گرانش پرداختیم. در این روند ابتدا گالیلئون‌ها را به‌عنوان مثالی از این نظریه مورد مطالعه قرار دادیم و به طبیعت مرتبه دوم آن‌ها، یعنی داشتن معادلات حرکتی حداکثر از مرتبه دوم پی بردیم که این امر مانع از ایجاد ناپایداری در نظریه می‌شد. سیستم‌های هامیلتونی مقید، قیدهای اولیه و ثانویه و همچنین قیدهای نوع اول و نوع دوم را معرفی کردیم و با استفاده از آنها به بررسی ساختار هامیلتونی و شمارش درجات آزادی نظریه‌ی $GLPV$، که تعمیمی از نظریه‌ی هورندسکی است پرداختیم. مشاهده کردیم که طبق فرض دیراک تمامی قیدهای نوع اول اعم از اولیه و ثانویه مولدهای تبدیل پیمانه‌ای هستند. دریافتیم که قیدهای نوع اول هر کدام یک درجه و قیدهای نوع دوم هر کدام دو درجه از درجات آزادی سیستم کم می‌کنند. به این‌ترتیب با شمارش این قیدها و کم کردن از تعداد کل متغیرهای مساله، درجات آزادی سیستم را مورد مطالعه قرار دادیم. همچنین برای ساده‌سازی محاسبات، فرمول‌بندی ADM را به‌کار گرفتیم. در این روش فضا را به ابرسطح‌هایی فضایی که در راستای مولفه‌ی زمان در حال پیشروی هستند تجزیه کردیم و در نهایت معادلات رادر سه بعد فضایی نوشتیم. در روند اعمال این روش از معادلات گوس_کودازی استفاده کردیم. در آخر با کمک گرفتن از فرمول‌بندی ADM و سیستم‌های هامیلتونی مقید و تعریف قیدها، ساختار هامیلتونی نظریه‌ی $GLPV$ را مورد مطالعه قرار داده و سه درجه آزادی به‌دست آوردیم.

مراجع

[1] D. Polarski, “Dark Energy”, AIP Conf. Proc. 1514, 111 (2013).

[2] Z. Haghani, T. Harko, H. Sepangi, and S. Shahidi , “Vector dark energy models with quadratic terms in the Maxwel l tensor derivatives”, arXiv:1604.04837v2 [gr-qc] 6 Jul 2016.

[3] K. Bamba, and S. D. Odintsov, “Inflationary cosmology in modified gravity theories”, arXiv:1503.00442v1 [hep-th] 2 Mar 2015.

[4] A. Nicolas, R. Rattazzi, and E. Trincherini, “Galileon as a local modification of gravity”, physical review D 79, 064036(2009).

[5] C. Germani, “On the Covariant Galileon and a consistent self-accelerating Universe”, arXiv:1207.6414 [hep-th], 5 Nov 2012.

[6] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman, “Covariant Galileons”, Phys. Rev. D 79 (2009) 084003.

[7] H. Motohashi, “Third order equations of motion and the Ostrogradsky instability”, arXiv:1411.3721 [physics.class-ph] 15 Apr 2015.

[8] R. P. Woodard , “The Theorem of Ostrogradsky”, arXiv:1506.02210v2 [hep-th] 9 Aug 2015.

[9] S. S. Seahra , “The Classical and Quantum Mechanics of Systems with Constraints”, Department of Physics University of Waterloo, May 23, 2002.

[10] C. Deffayet, “Cosmology on a Brane in Minkowski Bulk”, Phys. Lett. B 502, 199 (2001) [arXiv:hep-th/0010186].

[11] D. Momeni, and R. Myrzakulov, “Noether symmetry in Horndeski Lagrangian”, arXiv:1410.1520 [gr-qc] .

[12] K. Koyama, G. Niz, and G. Tasinato1, “Effective theory for the Vainshtein mechanism from the Horndeski action”, PHYSICAL REVIEW D 88, 021502(R) (2013).

[13] C. Burrage, “Galileon Fifth Forces”, Journal of Physics: Conference Series 259 (2010) 012045.

[14] A. De Felice and S. Tsujikawa , “Generalized Galileon cosmology”, PHYSICAL REVIEW D 84, 124029 (2011).

[15] M. Trodden, K. Hinterbichler , “Generalizing Galileons”, arXiv:1104.2088v1 [hep-th] 11 Apr 2011.

[16] R. Dick, “Standard Cosmology in the DGP Brane Model”, arXiv:hep-th/0110162v2, 19 Oct 2001.

[17] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, “4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Spaces”, Phys. Lett. B485: 208-214, 2000.

[18] M. A. Luty, M. Porrati, and R. Rattazzi “Strong interactions and stability in the DGP model”, Institute of Physics Publishing for SISSA/ISAS, September 12, 2003.

[19] C. Charmousis “From Lovelock to Horndeski’s Generalized Scalar Tensor Theory ”, arXiv:1405.1612 [gr-qc].

[20] J. Ben Achour, M. Crisostomi, K. Koyama, D. Langlois, K. Noui, and G. Tasinato “Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Hor ndeski up to cubic order ”, arXiv:1608.08135v1 [hep-th] 29 Aug 2016.

[۲۱] حیدری، لیلا(۱۳۹۰). ” بررسی تقارن‌های ریسمان پولیاکوف در فرمول‌بندی هامیلتونی“. پایان نامه ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان.

[22] M. Henneaux and C. Teitelboim, “Quantization of gauge system”, Princeton university press, 1992.

[23] P. Dirac, “lectures on quantum mechanics” Dover publishing company, 1964.

[24] Y. Tavakoli, “Lecture II: Hamiltonian formulation of general relativity”, December 16, 2014.

[25] E. Gourgoulhon, “3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity”, arXiv:gr-qc/0703035

[26] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. misner, “Dynamical structure and definition of energy in general relativity”, Phys. Rev. 116 (1959) 1322.

[27] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, “Healthy theories beyond Horndeski”, Phys. Rev. Lett. 114. 211101 (2015).

[28] C. Lin, Sh. Mukohyama, R. Namba, and R. Saitou, “Hamiltonian structure of scalar-tensor theories beyond Horndeski”, Doi: 10. 1088/1475-7516/2014/10/074.

[29] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and D. A. Steer, “couting the degrees of freedom of generalized Galileons”, Phys. Rev. D 92, 084013 (2015).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اتحاد ژاکوبی	Jocobi identity
اختلال	Perturbation
انبساط شتاب‌دار	Accelerating expansion
انحنای خارجی	Extrinsic curvature
انحنای داخلی	Intrinsic curvature
انرژی تاریک	Dark energy
بردار انتقال	Shift vector
پایدار	Stable
پیمانه یکانی	Unitary gauge
تابع گذر	Lapse function
تانسور انرژی تکانه	Energy momentum tensor
تبدیل پیمانه‌ای	Gauge transformation
تثبیت پیمانه	Gauge fixing
تحول زمانی	Time evolution
تکینگی ذاتی	Inherent singularity
تورم	Inflation
جفت‌شدگی غیرکمینه	Nonminimal coupling
درجه آزادی	Degree of freedom
سرعت بیشتر از نور	Superluminality
سرعت کمتر از نور	Subluminality
سیستم‌های مقید	Constraint systems

شتاب خودبه‌خودی	Self accelerating
ضرایب لاگرانژ	Lagrange multipliers
فضای دوسیته	Desitter space
قیدهای اولیه	Primary constraints
قیدهای ثانویه	Secondary constraints
قیدهای نوع اول	First class constraints
قیدهای نوع دوم	Second class constraints
کروشه‌ی پواسون	Poisson bracket
کنش	First class constraints
گالیلئون هموردا	Covariant galileon
گرانش جرم‌دار	Massive gravity
معادله‌ی حرکت	Equation of motion
منابع چگال	Compact sources
میدان اسکالر	Scalar field
نسبیت عام	General relativity
نظریه میدان	Field theory
هموردایی عام	General covariance

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accelerating expansion .... انبساط شتاب‌دار

Action .... کنش

Compact sources .... منابع چگال

Constraint systems .... سیستم‌های مقید

Covariant galileon .... گالیلئون هموردا

Dark energy .... انرژی تاریک

Degree of freedom .... درجه آزادی

Desitter space .... فضای دوسیته

Energy momentum tensor .... تانسور انرژی تکانه

Equation of motion .... معادله حرکت

Extrinsic curvature .... انحنای خارجی

Field theory .... نظریه میدان

First class constraints .... قیدهای نوع اول

Gauge fixing .... تثبیت پیمانه

Gauge transformation .... تبدیل پیمانه‌ای

General covariance .... هموردایی عام

General relativity .... نسبیت عام

Inflation .... تورم

Inherent singularity .... تکینگی ذاتی

Intrinsic curvature .... انحنای داخلی

Jocobi identity .... اتحاد ژاکوبی

Lagrange multipliers	ضرایب لاگرانژ
Lapse function	تابع گذر
Massive gravity	گرانش جرم‌دار
Nonminimal coupling	جفت‌شدگی غیرکمینه
Perturbation	اختلال
Poisson bracket	کروشه‌ی پواسون
Primary constraints	قیدهای اولیه
Scalar field	میدان اسکالر
Secondary constraints	قیدهای ثانویه
Second class constraints	قیدهای نوع دوم
Self accelerating	شتاب خودبه‌خودی
Shift vector	بردار انتقال
Stable	پایدار
Subluminality	سرعت کمتر از نور
Superluminality	سرعت بیشتر از نور
Time evolution	تحول زمانی
Unitary gauge	پیمانه یکانی

ABSTRACT

Degrees of freedom analysis of scalar tensor theory of gravity

By:

Hoda Ghaffarian

General relativity is the geometric theory of gravity that exhibits general covariance and correctly describes what we observe at the scale of the solar system. The problems arise when one looks at the universe at very small or very large scales. Recent observations have shown that the universe is in a phase of accelerated expansion. General relativity cannot explain this acceleration. So, we need to modify the gravity at least at large scales.

By using a scalar-tensor theory known as the Horndeski theory, we try to modify general relativity. Its equations of motion are of second order, while its Lagrangian can have higher than second order derivatives. This property avoids the theory to have ghosts and instabilities. As an example of this theory, we will study the Galileons and found that in curved space time, one can formulate the theory in such a way that the equations of motion be second order in time derivatives by sacrificing the Galileon symmetry. We will count the dynamical degrees of freedom of the Horndeski theory in the unitary gauge and show that the theory has three dynamical degrees of freedom; one for the scalar field and the rest for the gravitational wave.

Ministry of Science, Research, and Technology

Damghan University
School of physics

M.Sc. Thesis
In Physics (Gravitation and cosmology)

Degrees of freedom analysis of scalar tensor theory of gravity

By:
Hoda Ghaffarian

Supervisor:
Shahab Shahidi

Advisor:
Zahra Haghani

January 2017

In The Name of God

Degrees of freedom analysis of scalar tensor theory of gravity

By:

Hoda Ghaffarian

THESIS

SUBMITTED TO THE SCHOOL OF GRADUATE STUDIES IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

In

Physics (Gravitation and cosmology)

DAMGHAN UNIVERSITY

DAMGHAN, ISLAMIC REPUBLIC OF IRAN

EVALUATED AND APPROVED BY THE THESIS COMMITTEE AS:

Shahab Shahidi, Ph.D., ASSISTANT PROF. IN PHYSICS,GRAVITATION AND COSMOLOGY, DAMGHAN UNIVERSITY (SUPERVISOR)

Zahra Haghani, Ph.D., ASSISTANT PROF.IN PHYSICS,GRAVITATION AND COSMOLOGY, OF DAMGHAN UNIVERSITY (ADVISOR)

Leila Shahkarami, Ph.D., ASSISTANT PROF. OF DAMGHAN UNIVERSITY (EXAMINER)

Davood Mahdavian Yekta, Ph.D., ASSOCIATE PROF. OF Hakim Sabzevari (EXAMINER)

Leila Shahkarami , Ph.D., ASSISTANT PROF. OF DAMGHAN UNIVERSITY (Representative of the Graduate Studies)

January 2017