

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



دانشگاه دامغان
دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد
فیزیک (گرایش فیزیک نجوم)

کیهان شناسی در نظریه دوگانه متریک- پالاتینی تعمیم یافته

توسط:

شیواکایدی

استاد راهنما:

دکتر شهاب الدین شهیدی شادکام

بهمن ۱۳۹۸

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

به نام خدا

کیهان شناسی در نظریه دوگانه متریک- پالاتینی

تعمیم یافته

توسط:

شیوا کایدی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

فیزیک (گرایش فیزیک نجوم)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر شهاب الدین شهیدی شادکام، استادیار رشته فیزیک، گرایش گرانش و کیهان‌شناسی، دانشکده
فیزیک، دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر زهرا حقانی، استادیار رشته فیزیک، گرایش گرانش و کیهان‌شناسی، دانشکده فیزیک، دانشگاه
دامغان (استاد داور)

دکتر لیلا شاهکرمی، استادیار رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان
(استاد داور)

دکتر لیلا شاهکرمی، استادیار رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان (نماینده
تحصیلات تکمیلی)

بهمن ۱۳۹۸

تقدیم به

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام است.

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پرمهر پدرم

به مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آن می‌دانم.

به برادران عزیزتر از جانم که نشانه لطف الهی در زندگی من هستند.

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره‌ای از دریای بی‌کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

سپاسگزاری

سپاسگزاری می‌کنم از کسانی که سرآغاز تولد من هستند. از یکی زاده می‌شوم و از دیگری جاودانه. استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویی از او بیای من سیاه نماند.

از استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکتر شهاب شهیدی که دانسته‌های خود را بی دریغ در اختیارم قرار دادند و وجودشان همیشه قوتی برای انجام کارهایم بوده است و بدون شک انجام این پژوهش بدون کمک و راهنمایی‌های ارزنده ایشان امکان پذیر نبوده است بی نهایت سپاسگذارم.

و همچنین از استاتید گرامی سرکار خانم دکتر زهرا حقانی و سرکار خانم دکتر لیلا شاهکرمی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

چکیده

کیهان شناسی در نظریه دوگانه متریک-پالاتینی تعمیم یافته

به وسیله‌ی:
شیوا کایدی

در این پایان نامه به بررسی کیهان‌شناسی مدل تعمیم‌یافته دوگانه متریک-پالاتینی خواهیم پرداخت. در ابتدا وردش گیری متریکی و پالاتینی را به صورت مفصل برای کنش اینشتین هیلبرت و کنش تعمیم یافته $f(R)$ بررسی می‌کنیم و حالت‌های خاص را برای تئوری‌های تعمیم یافته $f(R)$ مطالعه می‌کنیم. پس از آن سازگاری تئوری‌های تعمیم یافته $f(R)$ و $f(R, Q)$ با هر دو روش میدان‌های اسکالر و متریک کمکی برای بررسی کیهان‌شناسی را نشان می‌دهیم. سپس مدل انتخابی تشکیل شده از دو میدان مستقل متریک و هموستار را بررسی می‌کنیم. برای قسمت متریک کنش اینشتین هیلبرت و برای قسمت هموستار کنش اینشتین هیلبرت همراه با جمله تصحیحی $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ را در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه جهان از ماده باریونی با معادله حالت باروتروپیک پر شده باشد می‌توانیم معادلات تحول پارامتر هابل و چگال انرژی و پارامتر کندشوندگی را محاسبه کنیم. مشاهده می‌کنیم که این مدل با مشاهدات رصدی برای زمان‌های کنونی سازگار است. برای مقادیر مختلف α شعاع پارامتر هابل در زمان‌های اولیه متفاوت خواهد بود. برای مقادیر بزرگتر α شعاع جهان اولیه نسبت به مدل استاندارد بزرگتر خواهد بود.

فهرست مطالب

۵	فهرست مطالب
۱	قراردادها
۳	۱ مقدمه
۹	۱-۱ اصل کیهان‌شناسی
۱۰	۲-۱ انبساط کیهان
۱۱	۳-۱ نظریه گرانش $f(R)$
۱۳	۴-۱ معادلات میدان
۱۵	۲ کنش و معادلات میدان
۱۵	۱-۲ مقدمه
۱۵	۲-۲ وردش گیری نیوتونی
۱۸	۳-۲ وردش گیری متریکی
۲۰	۴-۲ وردش گیری پالاتینی
۲۲	۵-۲ وردش گیری متریکی $f(R)$
۲۸	۶-۲ وردش گیری $f(R)$ به روش پالاتینی
۳۳	۳ نظریه گرانش $f(R)$
۳۳	۱-۳ مقدمه
۳۴	۲-۳ نمایش اسکالر تانسوری از گرانش در متریک پالاتینی

۳۷	۳-۳	میدان ضعیف، کند تغییر
۴۱	۴-۳	انبساط کیهان در زمان‌های اخیر
۴۲	۵-۳	نظریه تعمیم یافته $f(\mathcal{R}, Q)$
۴۳	۶-۳	روش متریکی برای حل معادلات $f(\mathcal{R})$
۴۷	۷-۳	$f(\mathcal{R}, Q)$ با یک سیال کامل
۵۰	۸-۳	معادلات میدان و Λ_{eff}
۵۱	۹-۳	حل برای $Q = Q(\rho, \Pi)$ ، $R = \mathcal{R}(\rho, \Pi)$
۵۴	۱۰-۳	نتیجه گیری
۵۷	۴	گرانش دوگانه متریک پالاتینی $R + f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})$
۵۸	۱-۴	مدل
۶۰	۲-۴	تانسور انرژی تکانه موثر
۶۳	۳-۴	معادلات میدان
۶۵	۴-۴	تبدیلات هم‌مدیس
۶۷	۵-۴	انتخاب یک حالت خاص برای مقدار $f(\mathcal{R}, Q)$
۶۸	۶-۴	بدست آوردن معادلات میدان برای این حالت
۶۹	۷-۴	بدست آوردن متریک کمکی برای $R + \mathcal{R} + \alpha\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$
۷۰	۸-۴	حل و بدست آوردن معادلات اصلی
۷۶	۵	نتیجه گیری
۷۸		مراجع

قراردادها

نشانگان به کار رفته به صورت $(-+++)$ می باشد.

تانسور ریمان به شکل

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda},$$

و همچنین تانسور ریچی به صورت

$$R_{\beta\delta} = R_{\beta\alpha\delta}^{\alpha},$$

تعریف می شوند که در آنها

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}),$$

می باشد.

همچنین در این پایان نامه سرعت نور $c = 1$ و ثابت نیروی گرانشی $G = 1$ ، در نظر گرفته شده است.

همچنین در این پایان نامه $\square = \nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}$ می باشد.

پیشگفتار

یکی از هیجان انگیزترین مسائل کیهان‌شناسی که به صورت رصدی به اثبات رسیده است شتاب تندشونده انبساط کیهان می‌باشد. فیزیکدانان زیادی با روش‌های متفاوت سعی در توجیح شتاب تندشونده کیهان کردند. وجود ثابت کیهان‌شناسی یک مساله چالش برانگیز برای فیزیک نظری است که از زمان کشف شتاب کیهانی، توجه زیادی را به خود جلب کرده است. این روش با این که شتاب تندشونده کیهان را نتیجه می‌دهد اما مشکلات زیادی را به وجود می‌آورد که علم کیهان‌شناسی قادر به توجیح آن‌ها نمی‌باشد. یک سوال چالش برانگیز این است که آیا اضافه کردن ثابت کیهان‌شناسی تنها روش برای توصیف شتاب تندشونده کیهان می‌باشد یا خیر؟

یک روش که نظر فیزیکدانان زیادی را به خود جلب کرده است نظریه‌های $f(R)$ هستند. این نظریه‌ها شامل اضافه کردن مرتبه‌های بالاتر انحنا به کنش اینشتین هیلبرت می‌باشند. اساس این نظریه‌ها این است که به جای اضافه کردن ماده تاریک برای گرفتن شتاب تندشونده کیهان با تغییر قسمت هندسی کنش شتاب تندشونده کیهان را بدست آوریم. باید توجه کرد که در این روش هندسه عالم تغییر نمی‌کند و همچنان ریمانی باقی می‌ماند اما همانطور که گفتیم قسمت هندسی کنش تغییر می‌کند.

در این نظریه‌ها R اسکالر ریچی در کنش اینشتین هیلبرت به سمت یک تابع تعمیم یافته از R می‌رود که با نام‌های $f(R)$ شناخته می‌شوند. ما در این پایان نامه قصد داریم تا نظریه‌های $f(R)$ و $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ را مرور کرده و تلاش می‌کنیم تا با در نظر گرفتن تمام روش‌های ارائه شده مثل روش متریکی و روش وردش گیری پالاتینی به جنبه‌های وسیع و مهمی از نتایج این نظریه‌ها برسیم. همچنین قصد داریم تا بعضی از کاربردهای نظریه‌های تعمیم یافته $f(R)$ و $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ را در مورد کیهان‌شناسی بررسی کنیم.

فصل ۱

مقدمه

گالیله^۱ در گذشته چنین بیان کرده بود، که هیچ حالت سکون مطلقى وجود ندارد و تمام حرکات یکنواخت و نسبی هستند. به بیان دیگر هیچ چارچوب مرجعی وجود ندارد. این اصل به اصل نسبیت گالیله معروف است. آلبرت اینشتین^۲ این اصل را با اعمال سرعت ثابت برای نور تعمیم داد [۱]. او همچنین نشان داد که این اصل برای تمامی قوانین فیزیک که در آن زمان شامل قوانین الکترودینامیک و مکانیک بود صادق است [۲]. اینشتین در سال ۱۹۰۵ نظریه نسبیت خاص^۳ خود را ارائه کرد. در نسبیت خاص تصور این بود که حرکت چارچوب‌ها نسبت به هم با سرعت یکنواخت انجام می‌شود. یعنی در نسبیت خاص چارچوب‌های لخت فیزیکی بودند و سهم بسیاری از چارچوب‌ها نادیده گرفته شده بود. به همین دلیل اینشتین به فکر اضافه کردن گرانش و سهم‌های نادیده گرفته شده، در چارچوب‌های خود بود پس تصمیم به تعمیم نظریه نسبیت خاص خود گرفت. بنابراین او پس از اشتباهات و تلاش‌های فراوان بالاخره توانست در سال ۱۹۱۵ نظریه نسبیت عام^۴ خود را کامل کند و در سال بعد یعنی سال ۱۹۱۶ آن را منتشر کرد. هدف نظریه نسبیت عام یکپارچه کردن مفهوم فضا-زمان^۵ برای درک بهتر دنیای فیزیکی است. اینشتین معتقد بود که هندسه، فضا-زمان و علیت را ماده درون آن تعیین می‌کند.

در نسبیت عام دو اصل، نقش بسیار تاثیر گذاری داشتند. این دو اصل شامل اصل هم ارزی^۶ و

^۱Galileo Galilei

^۲Albert Einstein

^۳Special Relativity (SR)

^۴General relativity (GR)

^۵Space Time

^۶equivalence principle

دیگری اصل ماخ^۶ هستند. اصل هم ارزی بیان می‌کند که حضور ماده مانع از وجود چارچوب‌های لخت گسترده می‌شود. این دو اصل با در نظر گرفتن سرعت ثابت برای نور، مسیرهای خمیده را برای نور و با در نظر گرفتن نیروی جاذبه بین مواد، ساختار فضا زمان را در عالم مشخص می‌کنند. معادلات میدان اینشتین به صورت کیفی بیان می‌کنند که چه رابطه‌ای بین ماده فضا-زمان با متریک وجود دارد. این معادلات بیان کننده این موضوع هستند که ماده موجود در فضا-زمان باعث خمیدگی فضا-زمان می‌شود و این خمیدگی به وجود آمده متریک فضا-زمان را تعیین می‌کند.

برنارد ریمان^۸ در سال ۱۸۵۴ مفهوم توپولوژی^۹ یک سطح ریمانی را با ابعاد بالاتر از ۳ بعد ارائه کرد. او بیان کرد که یک سطح مانند کره و یا یک زین می‌تواند دارای انحنا مثبت و یا انحنای منفی باشد ولی یک صفحه دارای انحنای صفر است. چند دهه بعد زمان به صورت یک بعد چهارم توسط مینکوفسکی^{۱۰} ارائه شد و مفهوم فضا-زمان را ارائه کرد. اینشتین با استفاده از مفهوم فضا-زمان و هندسه ریمانی ریاضیات نسبیت عام خود را کامل کرد.

مبنای نظری نوشتن این معادله برای نشان دادن جاذبه گرانشی این است که دلیل جذب اجرام کم‌جرم‌تر توسط اجسام پرجرم‌تر انحنایی است که به وسیله این اجرام در فضا زمان اطرافشان ایجاد می‌شود. نظریه نسبیت عام اینشتین به عنوان یک مدل استاندارد برای توضیح گرانش در عصر معاصر قابل قبول است. در این نظریه، گرانش دیگر به عنوان یک نیروی جداگانه محسوب نمی‌شود بلکه در اینجا توصیف می‌کنیم که گرانش به صورت فضا زمان ارائه می‌شود و دیگر یک نیرو وجود ندارد که اجسام را از مسیر حرکتشان دچار انحراف کند بلکه باعث خمیدگی فضا زمان اطراف آن جسم می‌شود. در نتیجه بیان می‌کنیم که نظریه نسبیت عام یک نظریه میدان می‌باشد که در آن نقش میدان را هندسه ایفا می‌کند [۳].

بعضی از پیش‌بینی‌های نسبیت عام در مقایسه با پیش‌بینی‌های فیزیک کلاسیک به مقدار قابل توجهی تفاوت دارند، به خصوص آن‌هایی که در ارتباط با هندسه فضا، گذر زمان، انتشار نور و حرکت اجسام در سقوط آزاد هستند. نمونه‌هایی از این تفاوت‌ها را می‌توان در پدیده‌های انتقال به سرخ^{۱۱} گرانشی نور که ناشی از کندتر گذشتن زمان در نزدیکی میدان‌های گرانشی قوی است، اتساع زمان^{۱۲} گرانشی که ناشی از وجود تفاوت واقعی بین مقدار مشاهده شده برای زمان سپری شده میان دو رویداد

^۶Mach's principle

^۸Bernard Riemann

^۹topology

^{۱۰}Minkowski

^{۱۱}red shift

^{۱۲}Time Dilation

از دید ناظرهای متفاوت با پتانسیل‌های گرانشی متفاوت است، لنز گرانشی^{۱۳} که به خمیده شدن مسیر نور در اثر وجود یک میدان گرانشی قوی در فضا اشاره دارد و حرکت تقدیمی مدار سیارات مشاهده کرد. همچنین در نسبیت عام تعریف جرم به سادگی فیزیک کلاسیک و یا حتی نسبیت خاص نیست، در واقع در نسبیت عام نمی‌توان برای جرم یک تعریف کلی ارائه داد و تعریف‌های گوناگونی همچون جرم کُمار^{۱۴}، جرم ای‌دی‌ام^{۱۵} و جرم پوندی^{۱۶} پدید آمده‌اند. به صورت مثال خمیده شدن مسیر نور به صورت تجربی به تایید رسیده است. پرتوهای نور که از ستارگان دور تابش می‌شوند در هنگام گذر از کنار خورشید به دلیل انحنایی که در فضا-زمان اطراف خورشید، که به واسطه گرانشش ایجاد می‌شود از مسیر حرکت مستقیم خود خارج شده و دارای انحراف می‌شوند. اولین کسی که توانست این را به تایید برساند ادینگتون^{۱۷} بود. او توانست در سال ۱۹۲۳ در هنگام خورشید گرفتگی میزان خمش نور را محاسبه کند [۴].

نظریه اینشتین در اختر فیزیک نیز جنبه‌های مهمی دارد. به طور مثال این نظریه وجود سیاه‌چاله‌ها^{۱۸} را به‌عنوان آخرین وضعیت از پایان عمر ستاره‌های بزرگ پیش‌بینی می‌کند. شواهد زیادی وجود دارد که بیان می‌کند تابش بسیار زیاد منتشر شده از برخی اجسام اختر فیزیکی ناشی از وجود سیاه‌چاله‌ها می‌باشد. مثلاً هسته‌های فعال کهکشانی و ریزاخترش‌ها، به ترتیب نتیجه‌ی وجود سیاه‌چاله‌های پر جرم در مرکز کهکشان‌ها و دیگری وجود سیاه‌چاله در ستاره‌گان دوتایی یا چندتایی هستند. خم شدن نور به دلیل وجود گرانش قوی می‌تواند منجر به پدیده همگرایی گرانشی شود که بر اثر وجود این پدیده چندین تصویر از یک جسم اختر فیزیکی از فاصله دور در آسمان مشاهده می‌شود. همچنین وجود امواج گرانشی^{۱۹} که برای اولین بار در سال ۲۰۱۶ به کمک تاسیسات لایگو^{۲۰} صورت پذیرفت در گذشته توسط نظریه نسبیت عام پیش‌بینی شده بود هرچند به طور غیر مستقیم وجود امواج گرانشی مورد تایید قرار گرفته بود. پروژه‌هایی همچون لایگو و پروژه لیسای^{۲۱} ناسا با هدف مشاهده مستقیم این امواج گرانشی راه‌اندازی شده‌اند [۵].

در نسبیت عام بالاترین سرعت مربوط به سرعت نور می‌باشد. این محدودیت در ساختار فضا-

^{۱۳} Gravitational Lensing

^{۱۴} Komar mass

^{۱۵} ADM

^{۱۶} Bondi mass

^{۱۷} Eddington

^{۱۸} Black Hole

^{۱۹} Gravitational wave

^{۲۰} Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO)

^{۲۱} Laser Interferometer Space Antenna(LISA)

زمان محدودیتی‌هایی را در بر دارد. در نتیجه هیچ موج و یا انتقال داده‌ای نمی‌تواند با سرعتی بیشتر از سرعت نور حرکت کند. کیهانی^{۲۲} که ما به عنوان کیهان کنونی می‌شناسیم محدود به داده‌هایی هستند که از گذشته و یا آینده به ما می‌رسند. طبق نظریه انفجار بزرگ^{۲۳} تمام اطلاعات کیهان در اختیار ما قرار نمی‌گیرد و در ساختار فضا زمان محدودیت‌هایی در مرز بندی آن وجود دارد، این مرز بندی‌ها در ساختار کیهان را افق^{۲۴} می‌نامند. ما دارای دو افق، افق رویداد^{۲۵} و افق ذره^{۲۶} هستیم. کیهان دارای یک کران بالا می‌باشد که با گذشت زمان این کران تغییر می‌کند. یعنی به عبارت دیگر دورترین فاصله‌ای که اطلاعات از آن به ما می‌رسد را افق ذره می‌گوییم [۶]. همچنین اطلاعاتی درباره ساختار فضا-زمان که از گذشته کیهان به ما می‌رسد را نیز افق رویداد می‌گوییم [۷]. بنابراین برخی از نواحی گذشته و آینده را برای ما غیر قابل دسترس می‌کند.

با توجه به رصدهای اختر فیزیکی و اندازه گیری‌های ادوین هابل^{۲۷} نتیجه گیری شد که کیهان در حال انبساط است. میزان انبساط کیهان در زمان حال با H نمایش داده می‌شود. همچنین رصد انبساط هابلی و کشف تابش زمینه کیهان، مدل انفجار بزرگ را به مدلی استاندارد در جامعه کیهان‌شناسی تبدیل کرد. پیش بینی درست از میزان فراوانی عناصر سبک در دوران کیهان اولیه و تطابق عالی منحنی طیف تابش زمینه کیهان با طیف تابش جسم سیاه باعث شد که مدل انفجار بزرگ به عنوان یک مدل استاندارد کیهان‌شناسی معرفی گردد. شکل کامل نظریه انفجار بزرگ^{۲۸} (مهبانگ) بیان می‌کند که حدود ۱۴ میلیارد سال پیش انفجار بزرگی رخ داده است. این مدل با تمام موفقیت‌هایی که تا کنون داشته است دارای مشکلات اساسی نیز می‌باشد که مربوط به مشکل افق^{۲۹}، مشکل تخت بودن کیهان و تک قطبی‌های مغناطیسی می‌باشد. کیهان در مقیاس‌های بزرگ، بیش از حد تصور همگن است. یک شگفتی در کیهان که توسط ماهواره $COBE$ ثبت شد و توسط داده‌های زمینی تایید شده‌اند نشان داد که تابش زمینه کیهانی در همه جهات با دقت بسیار بالایی دمای یکسان دارد. کیهان در ابتدا به دلیل دمای بسیار بالایی که داشته است فقط از گازهای یونیزه تشکیل شده بود، فضا مملو از پلاسمای کدری بود که فوتون‌ها نمی‌توانستند در آن حرکت کنند. بعد از حدود $10^5 \times 4$ سال کیهان آنقدر سرد شد که پلاسمای به یک گاز شفاف متشکل از اتم‌های خنثی تبدیل شد. فوتون‌های زمینه

^{۲۲}Cosmology

^{۲۳}big ban

^{۲۴}Horizon

^{۲۵}Event horizon

^{۲۶}Magnifying Horizon

^{۲۷}Edwin Powell Hubble

^{۲۸}Big Bang Theory

^{۲۹}Horizon problem

کیهان از اینجا شروع به انتشار روی خطوط مستقیم کردند. در واقع فوتون‌های تابش زمینه اکنون به ما تصویری از کیهان در سن $10^5 \times 4$ سالگی می‌دهند. هر چیزی اگر به مدت کافی به حال خود گذاشته شود می‌تواند به دمای یکنواخت خواهد رسید. در شکل قدیمی نظریه مهبانگ، کیهان انقدر سریع تحول می‌یابد که هیچ فرستی برای تثبیت یکنواختی وجود ندارد. محاسبات نشان می‌دهند که انرژی و اطلاعات مجبور بودند با سرعتی بیش از صد برابر سرعت نور منتقل شوند تا کیهان بتواند $10^5 \times 4$ سال بعد از مهبانگ به همگنی برسد که این ناسازگاری اشکار است. این مشکل به مشکل به مشکل افق معروف است. مشکل تخت بودن کیهان یک مساله دیگر است که در نظریه انفجار بزرگ وجود دارد. طبق نظریه نسبیت عام فضا-زمان بر اساس میزان چگالی دچار انحنای می‌شود. اگر بپذیریم که کیهان همسانگرد^{۳۰} و همگن^{۳۱} است سه حالت برای کیهان پیش می‌آید. مشاهدات دلالت بر این موضوع دارند که کیهان در زمان انفجار به شدت تخت بوده است که این دارای تناقض است با ایجاد انحنای توسط چگالی بنابراین به این مشکل، مشکل تخت بودن می‌گوییم. در نهایت نظریه انفجار بزرگ بیان می‌کند که کیهان باید از تعداد زیادی ذرات فوق سنگین با بار مغناطیسی پر شده باشد. تک قطبی‌های مغناطیسی دارای جرمی حدود 10^{16} برابر جرم پروتون‌ها هستند که برابر با این نظریه باید با فراوانی پروتون‌ها برابر باشند اما اینگونه نیست. به این مشکل، مشکل تک قطبی‌های مغناطیسی می‌گویند. مدل انفجار بزرگ دارای مشکلاتی است که ما را مجبور می‌کند به دنبال مدل‌های کامل‌تری برای شناخت کیهان باشیم [۸].

در نسبیت عام یکی از ویژگی‌های ابهام برانگیز تکنیکی‌ها^{۳۲} هستند که در آن‌ها هیچ تعریفی از هندسه فضا-زمان نشده است. بعضی از پاسخ‌های معادلات میدان اینشتین، مثل حل شوارتزشیلد^{۳۳} و حل کر^{۳۴} تکنیکی‌های سیاهچاله‌ها (تکنیکی‌های آینده) و بعضی دیگر مثل حل $FLRW$ ^{۳۵} برای تکنیکی مهبانگ (تکنیکی گذشته) را مشخص می‌کنند. ماهیت تکنیکی‌ها همچنان در هاله‌ای از ابهامات قرار دارد، هر چند که تلاش‌هایی در زمینه توصیف ساختار آن‌ها صورت گرفته است.

همانطور که گفته شد در سال‌های اخیر تناقض‌های زیادی در نظریه اینشتین ظاهر شده است که فیزیکدانان را با این چالش روبرو کرده است که آیا نسبیت عام تنها نظریه‌ای است که می‌توان با آن برهمکنش‌های گرانشی را توضیح داد و به مطالعه کیهان پرداخت یا خیر؟ این تناقض‌ها از

^{۳۰} Isotropic

^{۳۱} Homogenous

^{۳۲} Singularity

^{۳۳} Karl Schwarzschild

^{۳۴} Kerr

^{۳۵} Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)

کیهان‌شناسی و نظریه کوانتومی نشات می‌گیرد. برای رفع مشکلات موجود در کیهان‌شناسی استاندارد از نظریات گرانش اصلاح شده و تعمیم یافته به جای گرانش نسبت عام استفاده می‌کنیم نظریات گرانش تعمیم یافته (ETG)^{۳۶} یکی از پربارترین روشها، تئوری‌های گرانش گسترش یافته در مطالعه برهم‌کنش‌های گرانشی است. که بر اساس بسط‌ها و اصلاحات نظریه اینشتین بنا شده است یکی از بهترین تقریب‌ها هستند که به الگوهای در برهم‌کنش‌های گرانشی تبدیل شده‌اند. در اصل این الگوها ترکیبی از ناوردایی‌های انحنای مرتبه بالا، یا میدان‌های اسکالر کمینه یا غیر کمینه گرانشی که با دینامیک جفت شده است تشکیل می‌شوند. این اصلاحات از کنش موثر کوانتومی ناشی شده‌اند [۹، ۱۰]. یکی از بیشترین و رایج‌ترین گرانش اصلاح شده که جایگزین مناسبی برای نظریه گرانش اینشتین می‌باشد مربوط به نظریه اسکالر تانسوری^{۳۷} است. همچنان پیشنهادات متعددی برای گرانش وجود دارد، به صورت مثال DGP ^{۳۸}، اسکالر تانسور برداری^{۳۹}، تئوری اتر اینشتین^{۴۰} و تئوری $f(R)$ نمونه‌هایی از گرانش تعمیم یافته هستند. سایر انگیزه‌ها جهت اصلاح نسبت عام گرانش از موضوع اصلاح کامل اصل ماخ می‌آید. که منجر به در نظر گرفتن جفت شدگی گرانشی نیوتنی متغیر می‌شود. اصل ماخ بیان می‌کند که چارچوب لخت موضعی بوسیله میانگین حرکت اجسام نجومی دور تعیین می‌شود. این واقعیت اشاره می‌کند که جفت شدگی گرانشی می‌تواند وابسته به مقیاس و تا حدودی مربوط به میدان اسکالر باشد. در نتیجه، می‌بایستی در مفهوم لخت و اصل هم ارزی تجدید نظر شود.

به عنوان مثال، نظریه برنز-دیکی^{۴۱}، یک اقدام جدی برای تعریف تئوری جایگزین گرانش اینشتین است و جفت شدگی گرانشی نیوتنی متغیر را یادآوری می‌کند که دینامیک آن تحت کنترل یک میدان اسکالر است. میدانی که به طور غیر کمینه با هندسه جفت شده است [۱۱]. در این پایان‌نامه ما به بررسی تئوری‌های $f(R)$ در دو قالب متریک و پالاتینی می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم که تئوری $f(R)$ چگونه به یک میدان اسکالر تبدیل می‌شود و کیهان‌شناسی آن را بررسی می‌کنیم.

^{۳۶}Extended Theories of Gravity

^{۳۷}scalar tensor

^{۳۸}Dvali Gabadadze Porrati

^{۳۹}Tensor Vector Scalar

^{۴۰}Einstein Aether theory

^{۴۱}Brans-Dicke

۱-۱ اصل کیهان‌شناسی

بسیاری از انسان‌ها تصور می‌کردند که مرکز عالم زمین است. پس از نظریات کوپرنیکی^{۴۲} و کشف تلسکوپ، تصورات و تفکرات قدیمی گذشته از پایه با تغییراتی مواجه شد. دیگر نه تنها زمین بلکه خورشید هم در مرکز عالم قرار نداشت، و شاهد ستارگان زیادی همچون خورشید شدند. بعد از آن حدس زدند که منظومه شمسی در کهکشان راه شیری قرار دارد که یکی از کهکشان‌های موجود در کیهان است. با پیشرفت علم و کشف تلسکوپ‌های بزرگ امکان دیدن فواصل دور در حد چندین میلیون سال نوری برای ما امکان پذیر شد. مشاهده این حجم عظیم از کیهان به ما نشان داد که توزیع ماده درون کیهان شبیه به توزیع تصادفی ذرات درون یک حجم گازی است. در نتیجه نه تنها کهکشان راه شیری، هیچ جسم کیهانی دیگری را نمی‌توان به عنوان مرکز کیهان در نظر گرفت.

کیهان‌شناسی مدرن بر این اساس بنا شده است که هیچ مکانی در کیهان به صورت خاص نیست و مرکزی برای کیهان وجود ندارد. کیهان در مقیاس‌های بزرگتر از $10^4 MP$ به صورت همسانگرد و همگن است. این خاصیت کیهان به صورت اصل کیهان‌شناسی در نظر گرفته می‌شود [۱۲]. منظور از همسانگرد این است که با تغییر در جهت‌های مختلف کیهان را به صورت یکسان مشاهده می‌کنیم و همچنین منظور از همگنی یعنی این که توزیع چگالی به صورت یکنواخت، یا به عبارت دیگر می‌توان گفت که مقدار چگالی، دما و غیره در همه نقاط کیهان یکسان و مستقل از مکان اندازه‌گیری است. یکی از مهمترین دلایل برای پذیرش این دو فرض، مشاهدات مربوط به تابش زمینه‌ی کیهانی $(CMB)^{۴۴}$ [۱۳، ۱۴] می‌باشد. این موج همان موج اولیه از انفجار ابتدای عالم است که در عالم منتشر شده است. با داده‌هایی که از ماهواره $COBE^{۴۵}$ بدست آمد می‌دانیم که طیف CMB با دقت بسیار زیادی با طیف تابشی از یک جسم سیاه مطابقت دارد، که دلیلی برای توضیح تکینگی با فشار و دما بسیار بالا است. جسمی که تمامی تابش‌های دریافتی را جذب می‌کند را جسم سیاه می‌نامیم. در طیف جسم سیاه هر طول موج دارای شدت خاصی است، که این شدت در طول موج‌های مختلف تابع دمای جسم است. ستاره‌شناسان با اندازه‌گیری و بررسی شدت تابش در طول موج‌های متفاوت می‌توانند نتیجه بگیرند که این تابش آیا با تابش یک جسم سیاه برابر است یا خیر؟ تمام مشاهدات تایید می‌کنند که تابش پس زمینه کیهان با تابش یک جسم سیاه برابر است. این تابش نشان دهنده طرحی از افت و خیزهای چگالی بر روی آخرین سطح پراکندگی است.

^{۴۲}Copernicus

^{۴۴}Cosmic Microwave Background Radiation

^{۴۵}COsmic Background Explorer

۲-۱ انبساط کیهان

در سال ۱۹۲۴ تا ۱۹۲۹ ادوین هابل^{۴۶} با اندازه گیری طیف کهکشان‌های مختلف و مشاهده قرمز گرایی (انتقال به سرخ) این طیف‌ها متوجه شد که اجسام در حال دور شدن از یکدیگر هستند و کیهان در حال انبساط است. این قرمزگرایی طول موج‌های دریافتی از ستارگان به دلیل اثر دوپلری است. مشاهدات رصدی نیز این دورشدگی را تایید می‌کند [۱۵].

انبساط کیهان را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌توان این گونه بیان کرد که اگر یک بادکنک خالی از باد داشته باشیم و روی آن نقاطی را مشخص کنیم هنگامی که این بادکنک را باد کنیم می‌بینیم که هر چه حجم بادکنک افزایش یابد فاصله نقاط از یکدیگر دورتر می‌شوند. این مفهوم کیهان در حال انبساط است. انبساط کیهان به معنی زیاد شدن فاصله متریک بین اجسام کیهان با گذشت زمان است. انبساط کیهان درونی است، این به آن معناست که به فاصله نسبی بین اجزای کیهان برمیگردد، و به معنی حرکت اجسام به سمت فضای بیرون نیست. انبساط کیهان یکی از ویژگی‌های مهم برای کیهان‌شناسی مهبانگ است که با متریک $FLRW$ و نظریه میدان اسکالر برای نشان دادن فرم شتابدار آن استفاده می‌شود.

بخشی از انبساط کیهان به دلیل اثر ماند^{۴۷} (اینرسی) است (یعنی دلیل انبساط کنونی به این خاطر است که کیهان در گذشته منبسط می‌شده است). بخش دیگر آن به خاطر نیروی رانش ناشناخته‌ای می‌باشد که ممکن است از انرژی تاریک^{۴۸} یا یک ثابت کیهان‌شناسی ناشی شده باشد. بخش اول در ابتدای عالم نقش مهمتری داشته است، و مدل Λ CDM پیش بینی می‌کند که در آینده نقش انرژی تاریک یا ثابت کیهان‌شناسی مهم‌تر باشد. در عالم کنونی هر دو اثر تقریباً با هم برابر هستند.

به صورت کلی سه مدل را برای کیهان در حال انبساط معرفی می‌کنیم. اولین مدل جهانی را بیان می‌کند که جهان باز است. این مدل طی یک دوره زمانی نامحدود و تا ابد منبسط می‌شود. دومین مدل جهانی را بیان می‌کند که مسطح است. در این جهان که تا بی‌نهایت منبسط می‌شود، اما سرعت انبساط آن به صفر میل می‌کند. و در نهایت سومین مدل جهانی را بیان می‌کند که جهان بسته است. در این مدل انبساط جهان در مدت زمانی محدودی ادامه دارد و پس از تمام شدن این مدت جهان شروع به منقبض شدن و جمع شدن در خودش می‌کند و احتمالاً پس از منقبض شدن کامل آماده انفجار بزرگ دیگری می‌شود.

انبساط کیهان مدت‌ها است که به اثبات رسیده است. مستقل از قرمز گرایی کهکشان‌ها مشکلی

^{۴۶} Edwin Powell Hubble

^{۴۷} Inertia

^{۴۸} dark matter

که در اندازه گیری فاصله آن‌ها وجود دارد به اندازه‌ای است که تعیین اندازه کنونی انبساط، ثابت هابل، به یک فرایند طولانی و طاقت فرسا در ۵۰ سال اخیر تبدیل شده است. با این وجود، تلاش‌های زیادی شامل پروژه تلسکوپ فضایی هابل، و به صورت کلی‌تر، ترکیب مجموعه زیادی از شواهد که به وسیله آن‌ها مدل استاندارد کیهان‌شناسی را پشتیبانی می‌کنند، به نظر می‌رسد که توانسته‌ایم با خطایی کمتر از ۲۵٪ و با اطمینان ۹۵٪ اعتقاد داشت که $h \simeq ۰/۷$ است.

در دو دهه گذشته یکی از بزرگترین نتایج بدست آمده از مشاهدات اختر فیزیکی شتابدار بودن انبساط کیهان است. دو تیم تحقیقاتی با نام‌های "تیم تحقیقاتی ابرنواختر با انتقال به سرخ بالا"^{۴۹} و "پروژه کیهان ابرنواختر"^{۵۰} با کار کردن بر روی ابرنواخترهای نوع Ia در سال ۱۹۹۸ متوجه شدند که کیهان دارای انبساطی تندشونده است. مهم‌ترین مشاهده رصدی برای رسیدن به این نتیجه فوق‌العاده اندازه گیری فاصله درخشندگی در ابرنواخترهای نوع Ia به عنوان یک شکل استاندارد می‌باشد [۱۶].

۳-۱ نظریه گرانش $f(R)$

در چند سال اخیر نقص‌های زیادی در نظریه اینشتین ظاهر شده است. مساله قابل توجه این است که آیا نسبیت عام تنها نظریه اساسی برای توضیح برهم‌کنش‌های گرانشی است یا خیر؟ چنین چالش‌هایی معمولاً از نظریه میدان‌های کوانتومی و کیهان‌شناسی ناشی می‌شود.

یکی از روش‌های جایگزین شده برای توضیح انبساط تندشونده کیهان و تصحیح نسبیت عام در مقیاس‌های بزرگ استفاده از همین روش گرانش اصلاح شده $f(R)$ است. در نظریات گرانشی اصلاح شده $f(R)$ اسکالر ریچی R در کنش اینشتین هیلبرت با یک تابع دلخواه R جایگزین می‌شود. گروهی از فیزیکدانان که جز طرفداران این روش هستند، معتقدند که جهان تنها شامل همین موادی هستند که دیده می‌شوند و چیزی به نام انرژی تاریک که دارای فشار منفی است وجود ندارد و لازم نیست که سمت راست معادله اینشتین را اصلاح کنیم در واقع باید سمت چپ معادله میدان اینشتین که شامل هندسه می‌شود را با اضافه کردن هندسه تاریک اصلاح کرد.

اولین بار نظریه اسکالر تانسوری توسط جردن در سال ۱۹۵۰ ارائه شد و سپس توسط برنز و دیکی در سال‌های بعد ادامه داده شد. کنش گرانشی برنز و دیکی در نظریه اسکالر تانسوری در مقایسه با نسبیت عام اینشتین جدا از متریک فضا-زمان $g_{\mu\nu}$ ، یک میدان اسکالر نیز دارد که بخشی از گرانش را توصیف می‌کند. به صورتی که میدان اسکالر با گرانش زمینه جفت می‌شود. نظریه برانز دیکی یک مثال ساده از نظریه‌های اسکالر تانسوری می‌باشد [۱۷].

^{۴۹}High-z SuperNovae search team

^{۵۰}SuperNovae cosmology project

نظریه گرانشی $f(R)$ این امکان را به ما می‌دهد که هیچ نوعی از میدان اسکالر مادی را به عنوان انرژی تاریک به کنش گرانشی اضافه نکنیم. این روش را می‌توان در گرانش $f(R)$ ، مدل‌های الهام گرفته از نظریه ریسمان^{۵۱}، نظریات اسکالر تانسوری و جهان شامه‌ای^{۵۲} بررسی کرد. با استفاده از نظریه گرانشی $f(R)$ به صورت مستقیم می‌توان کمیت‌های مهم کیهان‌شناسی نظیر معادله حالت انرژی تاریک ω_{DE} ، ثابت گرانشی موثر G_{eff} و پارامتر کندشوندگی q را برای مدل پیشنهاد شده گرانشی $f(R)$ پیش بینی کرد. نظریه $f(R)$ در توصیف کردن ماده تاریک و شتاب کیهان بسیار توانمند است [۱۸]. به طور مثال:

۱- نظریه $f(R)$ برای انرژی تاریک راه حل‌های گرانشی ارائه می‌دهد [۱۹، ۲۰].

انبساط شتابدار کیهان به صورت ساده و به ساده ترین شکل ممکن با در نظر گرفتن گسترش کیهان در مواقعی که در انحنای کوچک جملاتی مثل $\frac{1}{R}$ خودشان را نشان می‌دهند توضیح داده می‌شود [۲۰].

۲- نظریه‌های $f(R)$ به خوبی می‌توانند شتاب کنونی کیهان و تورم اولیه کیهان را توصیف کنند. با در نظر گرفتن جملاتی از $f(R)$ که در انحنای بزرگ و یا کوچک خود نمایی می‌کنند، این امر به خوبی امکان پذیر است. قابل ذکر است که نظریه ریسمان تعداد زیادی از مدل‌های $f(R)$ را پیش بینی می‌کند [۲۱، ۲۲، ۲۳].

۳- نظریه $f(R)$ به خوبی می‌تواند تحول کیهان را بررسی کند و یک کیهان با شتاب منفی را می‌تواند به یک کیهان با شتاب مثبت تبدیل و توصیف کند [۲۴، ۲۵، ۲۶].

۴- نظریه $f(R)$ می‌تواند به عنوان یک پایه برای توصیف یگانه‌ای از ماده تاریک و انرژی تاریک در نظر گرفته شود. برخی پدیده‌های کیهان‌شناسی مثل منحنی چرخش کهکشان‌ها می‌تواند در نظریه‌های $f(R)$ توصیف شوند [۲۷، ۲۸].

۵- برخی از مدل‌های $f(R)$ هستند که برای منظومه شمسی پاسخ‌های درستی را ارائه می‌کنند و با مدل استاندارد گرانش برای منظومه شمسی رقابت می‌کنند. در واقع برای آزمون‌های بسیار دقیق از داده‌های مشاهده شده برای این مدل استفاده می‌کنند. در [منبع [۲۹]] این ویژگی از تئوری $f(R)$ بیشتر مورد بررسی قرار گرفته و به آن پرداخته شده است.

۶- انتظار داریم که گرانش $f(R)$ در انرژی‌های بالا مفید واقع شود.

^{۵۱}String theory

^{۵۲}Brane Cosmology

۴-۱ معادلات میدان

چون تانسور ریچی $R_{\mu\nu}$ نماد انحنای در فضا-زمان و تانسور انرژي تکانه $T_{\mu\nu}$ نماد ماده (انرژی) در محاسبات تانسوری است ساده ترین راه این است که رابطه خطی میان این دو برقرار باشد، اما چون مشتق هموردای $T_{\mu\nu}$ صفر است، مشتق هموردای طرف دیگر تساوی نیز باید صفر باشد که برای $R_{\mu\nu}$ اینچنین نیست لذا اینشتین جهت برطرف نمودن این مشکل ترکیبی از تانسور ریچی و اسکالر ریچی R را از طریق اتحاد بیانکی بدست آورد که مشتق هموردای آن صفر می باشد که به تانسور اینشتین معروف است

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

یک روش مرسوم برای بدست آوردن معادلات میدان اینشتین در نسبت عام روش وردش گیری است. به طوری کلی وردش گیری را برای بدست آوردن معادلات میدان می توان به سه بخش تقسیم کرد. این سه بخش عبارتند از وردش گیری متریکی^{۵۳}، وردش گیری پالاتینی^{۵۴} و وردش گیری متریک آفین^{۵۵} که در فصل دوم به صورت مفصل به وردش گیری و وردش گیری در قالب متریک و پالاتینی می پردازیم.

۱-۴-۱ وردش گیری متریکی

در این روش برای رسیدن به معادلات میدان وردش گیری تنها به وردش گرفتن از متریک فضا-زمان $g_{\mu\nu}$ محدود می شود چرا که $g_{\mu\nu}$ را تنها متغییر مستقل در نظر می گیریم. باید توجه داشته باشیم که در این حالت نمادهای آفین $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ به $g_{\mu\nu}$ وابسته هستند، بنابراین هموستار^{۵۶} ما $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ همان هموستار لیوی چویوتا^{۵۷} متریک $g_{\mu\nu}$ خواهد بود. خمینه ای^{۵۸} که محاسبات را روی آن انجام می دهیم یک خمینه ریمانی در نظر می گیریم. بنابراین در این روش نظریه هایی از گرانش $f(R)$ که روی یک خمینه ریمانی تعریف شده هستند یا به عبارتی بدون پیچش^{۵۹} هستند مورد توجه قرار گرفتند. می دانیم که پیچش به صورت $T_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ است پس نظریه هایی که در خمینه ریمانی تعریف شده اند بدون پیچش

^{۵۳} Metric formalism

^{۵۴} Palatini formalism

^{۵۵} Metric-affine formalism

^{۵۶} connection

^{۵۷} Levi-Civita

^{۵۸} manifold

^{۵۹} torsion

هستند. یعنی نظریه‌های گرانشی $f(R)$ بدون پیچش نظریه‌هایی هستند که در آن‌ها هموستار دارای تقارن باشد (یعنی $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$) در نتیجه در این حالت پیچش صفر خواهد بود. هر میدان دیگری بجز متریک را در بخش مادی کنش قرار می‌دهیم. یعنی یک طرف معادلات تنها به متریک وابسته هستند و طرف دیگر معادلات وابسته به میدان‌های مادی هستند. در این روش هر لاگرانژی که در نظر می‌گیریم باید شرط قیدی $\nabla_{\alpha}g^{\mu\nu} = 0$ را برآورده کند [۳۰].

۲-۴-۱ وردش گیری پالاتینی

آتلیو پالاتینی^{۶۰} یک ریاضی‌دان ایتالیایی بود که دکترای خود را از دانشگاه پادوا^{۶۱} دریافت کرد. اگر چه وردش گیری با مستقل در نظر گرفتن متریک و هموستار به طور کلی به پالاتینی نسبت داده می‌شود ولی فراریس^{۶۲} و همکاران در سال ۱۹۸۲ استدلال کردند که این رویکرد پالاتینی همانطور که ما آن را می‌دانیم در واقع توسط اینشتین^{۶۳} در سال ۱۹۲۵ بدست آمده است. در این روش متریک فضا-زمان $g_{\mu\nu}$ و هموستار $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ به عنوان متغیرهای مستقل عمل می‌کنند. در وردش گیری به روش پالاتینی دو سری معادلات خواهیم داشت که یکی از وردش گیری نسبت به متریک $g_{\mu\nu}$ و دیگری از وردش گیری نسبت به هموستار $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ حاصل می‌شود. این روش را روش پالاتینی یا روش مرتبه اول می‌نامند. در اینجا کنش ما همان چگالی لاگرانژی است ولی این بار تانسور ریچی را به عنوان تابعی از هموستار در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که لاگرانژی ماده هیچ وابستگی به هموستار ندارد و وردش کنش نسبت به هر دو متغیر مستقل انجام شود. در این روش هموستار $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ دیگر هموستار لیوی چویوتا نیست و ارتباط آن با تانسور متریک بعد از حل معادلات مشخص می‌شود [۳۱].

۳-۴-۱ وردش گیری متریک آفین

در این روش وردش گیری به قسمت مادی کنش هم وابسته است و نسبت به هموستار از آن وردش می‌گیریم. در اینجا هم از روش پالاتینی استفاده می‌کنیم. اگر فرض‌های زیادی را در نظر بگیریم این روش نیز به روش پالاتینی و یا متریکی ساده می‌شود. یکی از عام‌ترین روش‌ها نظریه‌های $f(R)$ وردش گیری به روش متریک آفین می‌باشد [۳۲].

^{۶۰} Attilio Palatini

^{۶۱} Padova

^{۶۲} ferraris

^{۶۳} Einstein

فصل ۲

کنش و معادلات میدان

۱-۲ مقدمه

معادلات میدان در علم فیزیک عبارات ریاضی هستند که چگونگی اندرکنش‌های نیروهای بنیادی با ماده و انرژی را بیان می‌کند. همانطور که در فصل یک گفتیم از کنش می‌توانیم معادلات میدان را بدست آوریم. یکی از راه‌های بدست آوردن معادلات میدان وردش گیری می‌باشد. وردش گیری از کنش را می‌توان به سه روش متریکی، پالاتینی و متریک آفین انجام داد. در این فصل ابتدا ما به صورت مفصل به وردش گیری نیوتونی می‌پردازیم سپس وردش گیری در قالب متریکی و پالاتینی از کنش اینشتین هیلبرت را توضیح می‌دهیم و در انتها نظریه‌های $f(R)$ را در هر دو قالب پالاتینی و متریکی بررسی می‌کنیم.

۲-۲ وردش گیری نیوتونی

برای بدست آوردن معادله حرکت یک سیستم ابتدا باید کنش آن سیستم را مشخص کنیم. در مکانیک تحلیلی یک روش، نوشتن معادلات نیوتن و حل آنها است

$$f = m\ddot{x}. \quad (1.2)$$

روش دیگر نوشتن یک کنش برای سیستم به صورت

$$S = \int L dt, \quad (2.2)$$

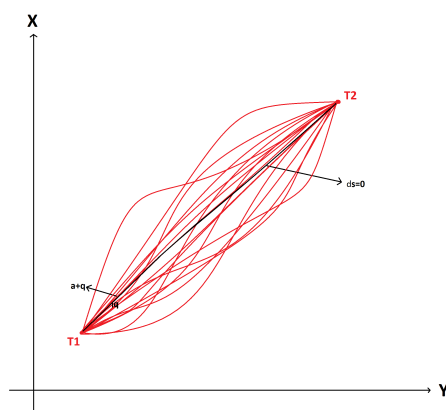
است که در آن L لاگرانژی ذره نامیده می‌شود. وردش گرفتن از S معادله حرکت را تولید می‌کند. لاگرانژی تابعی از مختصات تعمیم یافته و مشتقات آن و احیاناً زمان است. مختصات تعمیم یافته که با q نمایش داده می‌شود می‌تواند هر چیزی باشد. مانند: مکان، زاویه و ... $q = (x, y, \theta, \phi, \dots)$. سرعت \dot{q}^a مولد تغییرات در جهت q^a است. تکانه‌های مزدوج برای x, y, z تکانه خطی نام دارند و برای θ, ϕ تکانه زاویه‌ای، به طور مثال تکانه در جهت x باعث حرکت در جهت x می‌شود.

لاگرانژی به صورت

$$L = T - V, \quad (3.2)$$

تعریف می‌شود. در اینجا T انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل است. این روش برای نیروهایی مناسب است که پایستار باشند و همه نیروهای آن از پتانسیل بدست بیاید. این روش برای نیروهای اصطکاکی و ... مناسب نمی‌باشد.

از کنش وردش می‌گیریم تا به معادله حرکت برسیم. باید کنش ایستا باشد یعنی اگر ما یک فضا داشته باشیم که در آن دو نقطه وجود دارد برای اتصال این دو نقطه به یکدیگر بی‌نهایت مسیر وجود دارد که فرق تمامی این مسیرها در مختصات آنها می‌باشد یعنی با حرکت روی مسیرها همانطور که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است مقدار q تغییر می‌کند. باید توجه داشت که q را در یک لحظه خاص تغییر می‌دهیم یعنی زمان تمام آنها یکی باشد ولی مکان آنها تغییر کند. تغییرات کنش ناشی از تغییرات لاگرانژی می‌باشد و تغییرات لاگرانژی نیز ناشی از تغییر مختصات می‌باشد. از نظر فیزیکی همیشه کنش فرینه است، یعنی مسیر حرکت ذره کمینه می‌باشد. مختصات را به صورت زیر تغییر



شکل ۱-۲: مسیر حرکت ذره

دهیم

$$q^a(t) \rightarrow q^a(t) + \delta q^a(t). \quad (4.2)$$

وردش از کنش بصورت زیر خواهد بود

$$\delta S = \int \delta L dt, \quad (5.2)$$

که با باز کردن وردش L بدست می‌آوریم

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta \dot{q}^a \right) dt. \quad (6.2)$$

در اینجا داریم که $\delta \dot{q}^a = \delta \frac{d}{dt} q^a = \frac{d}{dt} \delta q^a$ حال با جایگذاری در فرمول (۶.۲) و فاکتور گیری از δq^a داریم که:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a dt. \quad (7.2)$$

برای بدست آوردن معادله حرکت وردش کنش را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\delta S = 0. \quad (8.2)$$

معادله حرکت به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = 0. \quad (9.2)$$

به این معادله، معادله اوایلر لاگرانژ می‌گوییم. معادله اوایلر لاگرانژ یک معادله مشتق مرتبه دوم نسبت به زمان است. اگر برای ذره آزاد لاگرانژ را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x), \quad (10.2)$$

معادله نیوتن بدست می‌آید

$$m \ddot{x} = - \frac{dV}{dx}. \quad (11.2)$$

اکنون مسیر حرکت ذره را کنش تعیین می‌کند یعنی در مسیر حرکت ذره کنش خودش ثابت است. ما در اینجا چند فرض را در نظر گرفتیم در ابتدا این که لاگرانژی فقط تابع خودش و مختصات و مشتق مرتبه اول باشد. اگر لاگرانژی تابع تمام مختصاتها و مشتقات آن باشد تابع لاگرانژی به صورت زیر است

$$L = L(q^a, \dot{q}^a, \ddot{q}^a, \dots). \quad (12.2)$$

معادله حرکت اوایلر لاگرانژ متناظر با آن به صورت زیر است

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^a} - \dots = 0. \quad (13.2)$$

از نظر فیزیکی همیشه مسیر کمینه انتخاب می‌شود. هدف ما پیدا کردن ایده‌آل ترین معادله خط است. ما در اینجا به بررسی دو نوع از روش‌های وردش گیری می‌پردازیم [۳].

۳-۲ وردش گیری متریکی

کنش اینشتین هیلبرت به صورت زیر است

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (14.2)$$

در اینجا $\frac{1}{16\pi G}$ به خاطر هماهنگی معادله اینشتین با معادله نیوتن در حدهای گرانشی ضعیف است که به این صورت نوشته شده است. می‌خواهیم از این کنش بدست آمده وردش بگیریم. در روش وردش گیری متریکی ما هموستار را بر حسب متریک بیان می‌کنیم، برای این کار فرض کنید که فضا سازگار با متریک است. یعنی $\nabla_\mu g^{\rho\sigma} = 0$ با این فرض هموستار بر حسب متریک به صورت زیر در می‌آید

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}). \quad (15.2)$$

حال وردش را فقط نسبت به متریک انجام می‌دهیم

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left(\delta\sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta R \right). \quad (16.2)$$

در اینجا وردش گیری به دو جمله تبدیل می‌شود. یکی وردش گیری از $\sqrt{-g}$ و دیگری وردش گیری از R است. وردش از دترمینال متریک بصورت زیر است

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (17.2)$$

که می‌توان آن را به وردش از $\sqrt{-g}$ تعمیم داد:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (-g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (18.2)$$

بعد از ساده سازی بدست می‌آوریم

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (19.2)$$

از قبل می‌دانیم که

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (20.2)$$

با وردش گرفتن از این معادله بدست می‌آید

$$g^{\alpha\nu} \delta g_{\mu\alpha} = -g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu}. \quad (21.2)$$

معادله را در $g_{\nu\rho}$ ضرب می‌کنیم

$$\delta g_{\mu\rho} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\rho}\delta g^{\alpha\nu}. \quad (22.2)$$

با جایگذاری در معادله (۱۹.۲) خواهیم داشت

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{4}\sqrt{-g}g_{\rho\alpha}\delta g^{\rho\alpha}. \quad (23.2)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۱۶.۲) و فاکتور گیری از $\delta g^{\mu\nu}$ به معادله زیر می‌رسیم

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} + \underbrace{\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}}_{\delta S_1}. \quad (24.2)$$

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم انتگرال δS_1 برابر با صفر است یعنی $\delta R_{\mu\nu}$ مشتق کامل است در نتیجه انتگرال آن برابر جمله مرزی خواهد شد که در بی‌نهایت قابل صرف‌نظر کردن است

$$\int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (25.2)$$

با وردش گرفتن از تانسور ریمان خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} &= \partial_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \partial_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \\ &+ \delta\Gamma_{\rho\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} \\ &- \delta\Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu}\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (26.2)$$

با ساده سازی معادله بالا خواهیم داشت

$$\delta R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \nabla_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}. \quad (27.2)$$

وردش تانسور ریچی به صورت زیر است

$$\delta R_{\nu\sigma} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\mu}. \quad (28.2)$$

با جایگذاری معادله (۲۸.۲) در معادله (۲۵.۲) خواهیم داشت:

$$\delta S_1 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\nabla_{\rho}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\rho}). \quad (29.2)$$

اکنون $g_{\mu\nu}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم

$$\delta S_1 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_{\rho}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\mu}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\rho})). \quad (30.2)$$

می‌دانیم که

$$\sqrt{-g}\nabla_{\rho}V^{\rho} = \partial_{\rho}(\sqrt{-g}V^{\rho}), \quad (31.2)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (30.2) خواهیم داشت

$$\delta S_1 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \partial_{\rho}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\rho}) = 0, \quad (32.2)$$

که هر دو جمله مشتق کامل هستند، در نتیجه اگر فرض کنیم میدان گرانشی در بینهایت صفر می‌شود می‌توان از این دو جمله صرف نظر کرد. با جایگذاری این نتیجه در معادله (24.2) و همچنین برای بدست آوردن معادله حرکت سیستم باید $\delta S = 0$ باشد بنابراین خواهیم داشت

$$(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (33.2)$$

$$\Rightarrow G_{\mu\nu} = 0.$$

در نتیجه وردش گیری از کنش اینشتین هیلبرت به ما معادله اینشتین را می‌دهد. در روش وردش گیری متریکی هموستار به متریک وابسته است و فقط وردش را محدود به قسمت متریکی می‌کنیم و از بخش متریکی آن وردش می‌گیریم [3].

۴-۲ وردش گیری پالاتینی

روش دیگر برای بدست آوردن معادله حرکت فرمولبندی پالاتینی می‌باشد. فرمولبندی پالاتینی یک روش جایگزین و اصلاح شده برای دینامیک گرانش است. ایده اصلی این است که فرض کنیم ساختارهای متریک وابسته، مستقل از نظریه هموستار و مستقل از متریک باشد. در این روش وردش گیری نسبت به متریک و هموستار معادله‌های متفاوتی را می‌دهند.

در فرمولبندی پالاتینی این که متریک و هموستار را مستقل در نظر می‌گیریم تاثیر به سزایی در شکل گیری این فرمولبندی دارد.

در روش پالاتینی فرض می‌کنیم که

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} \neq 0, \quad (34.2)$$

و از آنجا که هموستار و متریک سازگار نیستند هموستار بویسله نمادهای کریستوفل ارائه نخواهد شد. علاوه بر این تانسور انحنای تمام تقارن‌های تانسور ریمان را ندارد.

اکنون به روش پالاتینی با مستقل در نظر گرفتن هموستار و متریک وردش گیری را آغاز می‌کنیم. از کنش نسبت به متریک وردش می‌گیریم

$$\delta S_g = \int d^f x (\delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}). \quad (35.2)$$

همانطور که در بخش قبل نشان دادیم می‌دانیم که

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (36.2)$$

در نهایت معادله حرکت نسبت به متریک به شکل زیر است

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} = 0. \quad (37.2)$$

که این برابر است با

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (38.2)$$

توجه کنید که $R_{\mu\nu}$ شامل متریک نیست و فقط شامل هموستار می‌باشد. وردش گیری به روش پالاتینی از کنش اینشتین هیلبرت نسبت به متریک به صورت بخش قبل بدست می‌آید و با آن برابر است. اکنون از کنش نسبت به هموستار وردش می‌گیریم

$$\delta S_\Gamma = \int d^f x (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}), \quad (39.2)$$

با استفاده از معادله (28.2) داریم

$$\delta S_\Gamma = \int d^f x \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) - \partial_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma)] \right), \quad (40.2)$$

با باز کردن معادله فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta S_\Gamma = & \int d^f x \partial_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu) \sqrt{-g} \\ & + \int d^f x [(\partial_\rho g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - (\partial_\nu g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho] \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (41.2)$$

دو عبارت اول در معادله مشتق کامل می‌باشد و در معادله حرکت سهمی ندارد

$$\delta S_\Gamma = \int d^f x [(\delta_\rho^\nu \nabla_\sigma g^{\mu\sigma} - \nabla_\rho g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho] \sqrt{-g}, \quad (42.2)$$

و معادله حرکت هموستار بصورت زیر بدست می‌آید

$$\nabla_\rho g^{\rho\mu} \delta_\sigma^\nu + \nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0. \quad (43.2)$$

با رد گرفتن از معادله بالا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} 4\nabla_{\rho}g^{\rho\mu} + \nabla_{\nu}g^{\mu\nu} &= 0, \\ \nabla_{\rho}g^{\rho\mu} &= 0, \\ \nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (44.2)$$

این شرط متریک است که از آن هموستار را بدست می‌آوریم. بنابراین هموستار که در تانسور ریمان ظاهر می‌شود دیگر متریک سازگار خواهد شد. در فرمول‌بندی پالاتینی متریک و هموستار به عنوان دو متغیر مستقل دینامیکی در نظر گرفته می‌شوند که دو مجموعه معادلات اویلر لاگرانژ را تولید می‌کند. در فرمول‌بندی پالاتینی یک مجموعه از معادلات همان معادله اینشتین است و مجموعه دیگر معادلات تضمین می‌کند که هموستار متریک سازگار است بنابراین با هموستار لوی چویتا برابر است. کنش اینشتین هیلبرت فقط تابعی از متریک است اما در پالاتینی کنش اینشتین هیلبرت تابعی از متریک و هموستار مستقل است. از سوی دیگر هنگامی که ما محاسبات را با توجه به هموستار مستقل انجام می‌دهیم معادلات اینشتین را بدست می‌آوریم. برای فرمول‌بندی پالاتینی فرض بر این است که زمانی که می‌خواهیم شروع کنیم از آنجا که هموستار متریک سازگار نیست اجزای آن توسط نمادهای کریستوفل ارائه نشده است [۳].

۵-۲ وردش گیری متریکی $f(R)$

در این بخش ما وردش گیری از نظریه $f(R)$ را بررسی می‌کنیم. در اینجا معادله حرکت را فقط محدود به متریک کرده و از آن فقط نسبت به متریک وردش می‌گیریم. کنش $f(R)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \underbrace{\sqrt{-g}f(R)}_{\delta S_1} + \underbrace{S_m(g_{\mu\nu}, \Psi)}_{\delta S_2}. \quad (45.2)$$

در اینجا S_m کنش ماده و $\kappa^2 = \frac{1}{8\pi G}$ و $f(R)$ برابر با تابع تعمیم یافته است که تابعی غیر خطی از R است. برای پیدا کردن معادله میدان به روش متریکی ابتدا از بخش δS_1 کنش بالا وردش می‌گیریم

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x (\delta\sqrt{-g}f(R)) + (\sqrt{-g}\delta f(R)). \quad (46.2)$$

اکنون برای وردش $\sqrt{-g}$ با توجه به معادله (۳۶.۲) می‌دانیم که برابر با

$$\delta\sqrt{-g}f(R) = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}f(R). \quad (47.2)$$

است. باید توجه داشت که

$$\delta f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \delta R = f'(R) \delta R, \quad (48.2)$$

می‌دانیم که

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \quad (49.2)$$

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (50.2)$$

اکنون $\delta R_{\mu\nu}$ به فرم زیر است در نتیجه

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\mu \delta \Gamma_{\nu\rho}^\rho), \quad (51.2)$$

باید توجه داشت که ما محاسبات را در دستگاه مختصات ژئودزیک انجام می‌دهیم که $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0$ است، اما مشتقات آن صفر نمی‌باشد در نتیجه مشتقات جزئی به مشتقات هموردا تبدیل می‌شوند. مقدار $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} g^{\rho\alpha} (\nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} (g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \delta g^{\rho\alpha} + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \delta g^{\rho\alpha} - \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (52.2)$$

برای مولفه اول معادله (51.2) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \nabla_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} (g^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} \nabla_\rho \nabla_\mu \delta g^{\rho\alpha} + g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} \nabla_\rho \nabla_\nu \delta g^{\rho\alpha} \\ &\quad - g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu}) \\ &= (-\nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{\sqrt{|g|}} g^{\mu\nu} \square) \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (53.2) \quad (54.2)$$

به همین صورت برای $\delta \Gamma_{\nu\rho}^\rho$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\rho\nu}^\rho &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} g^{\rho\alpha} (\nabla_\rho \delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\rho\alpha} - \nabla_\alpha \delta g_{\rho\nu}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} (g_{\alpha\rho} \nabla_\nu \delta g^{\rho\alpha}), \end{aligned} \quad (55.2)$$

با جایگذاری در معادله (51.2) برای مولفه دوم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta \Gamma_{\rho\nu}^\rho &= -g^{\mu\nu} \nabla_\mu \frac{1}{\sqrt{|g|}} (g_{\alpha\rho} \nabla_\nu \delta g^{\rho\alpha}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (56.2) \quad (57.2)$$

در نهایت با جایگذاری معادله (۵۷.۲) و (۵۴.۲) در معادله (۵۱.۲) به فرم زیر می‌رسیم

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (-\nabla_\mu \nabla_\nu + g^{\mu\nu} \square) \delta g^{\mu\nu}, \quad (۵۸.۲)$$

معادله فوق را در معادله (۵۰.۲) جایگذاری می‌کنیم

$$\delta R = (R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + g^{\mu\nu} \square) \delta g^{\mu\nu}. \quad (۵۹.۲)$$

اکنون برای وردش گرفتن از δS_{r} به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$S_{\text{r}} = \int d^4x \sqrt{-g} L_M(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (۶۰.۲)$$

از معادله فوق وردش می‌گیریم

$$\delta S_{\text{r}} = \int d^4x \delta[\sqrt{-g} L_M(g_{\mu\nu}, \Psi)], \quad (۶۱.۲)$$

$$\delta S_{\text{r}} = \int d^4x \underbrace{\delta\sqrt{-g} L_M}_a + \underbrace{\sqrt{-g} \delta L_M}_b. \quad (۶۲.۲)$$

برای a با توجه به معادله (۱۹.۲) می‌دانیم که

$$\delta\sqrt{-g} L_M = -\frac{1}{2} L_M g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (۶۳.۲)$$

همچنین برای بخش b داریم

$$\sqrt{-g} \delta L_M = \frac{\partial L_M}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \quad (۶۴.۲)$$

اکنون با جایگذاری معادله (۶۴.۲) و (۶۳.۲) در معادله (۶۲.۲) خواهیم داشت

$$\delta S_{\text{r}} = \left(\frac{\partial L_M}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} L_M g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}, \quad (۶۵.۲)$$

که در نهایت تانسور انرژی تکانه به شکل زیر است

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (۶۶.۲)$$

در نتیجه معادله (۴۷.۲)، (۵۹.۲) و (۶۶.۲) در معادله (۴۸.۲) جایگذاری می‌کنیم و چون δS باید صفر شود در نتیجه

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f'(R) g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (۶۷.۲)$$

باید توجه کرد که در اینجا دیفرانسیل گیری از متغیر مورد نظر را با پریم نمایش داده ایم. مشتق هموردا $\nabla_{\mu\nu}$ وابسته به هموستار لویی چویتا از متریک R می باشد و $\square \equiv \nabla_{\mu}\nabla^{\mu}$ است [۳۳]. به این دلیل که R شامل مشتقات مرتبه دوم متریک می باشد. در نتیجه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه چهارم در معادله حرکت دیده می شود. اگر کنشی داشته باشیم که در آن R به صورت خطی باشد جملات مرتبه چهارم یعنی دوتای آخر در سمت چپ معادله برابر صفر می شوند و تئوری تعمیم یافته به معادله نسیت عام کاهش می یابد در نتیجه به معادله کلی اینشتین می رسیم

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (68.2)$$

از معادله (۶۷.۲) رد می گیریم

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f' = \kappa T. \quad (69.2)$$

در اینجا $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ می باشد. ارتباط R و T به صورت جبری نیست بلکه به صورت دیفرانسیلی با هم مرتبط می شوند. به عنوان مثال در نسیت عام $R = -\kappa^2 T$ می باشد. رابطه بین R و T نشان می دهد که معادلات میدان از نظریه های $f(R)$ دارای حل های متنوع تری نسبت به نظریه اینشتین هستند. برای مثال قضیه جوسن-بیخوف^۱ بیان می کند که در خلا حل با تقارن کروی از معادلات میدان گرانشی (۶۷.۲) یکتا نیست [۳۴] در اینجا متذکر می شویم که $T = 0$ دیگر به $R = 0$ یا R ثابت دلالت نمی کند. معادله (۶۹.۲) در بررسی جنبه های مختلف از نظریه گرانشی $f(R)$ برای حد میدان های ضعیف و نیز پایداری آنها بسیار مفید است.

اگر R ثابت باشد و $T_{\mu\nu} = 0$ باشد پس معادله (۶۹.۲) به صورت زیر می شود

$$f'(R)R - 2f(R) = 0. \quad (70.2)$$

که برای یک f مشخص، معادله فوق یک معادله جبری از R می باشد.

۱- اگر $R = 0$ یک ریشه ی معادله (۷۰.۲) باشد با جایگذاری در معادله (۶۷.۲) داریم

$$f'(0)R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}f(0)g_{\mu\nu} - [\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square]f'(0) = 0. \quad (71.2)$$

در اینجا $R = 0$ و $f(0) = 0$ هستند. در نتیجه مشتق های مرتبه بالاتر R نیز برابر صفر هستند. برای این که معادله صدق کند نتیجه می گیریم که $R_{\mu\nu} = 0$ باید باشد. در نهایت معادله (۶۷.۲) به $R_{\mu\nu} = 0$ کاهش می یابد.

^۱Jevsen- Bikhoff

۲- اگر $R = C$ یک ریشه معادله (۷۰.۲) باشد که در آن C یک عدد ثابت باشد. می‌دانیم که باید ریشه یک معادله در خود معادله صدق کند. پس ابتدا مقدار C را از معادله (۷۲.۲) با جایگذاری $R = C$ بدست می‌آوریم

$$f'(C)C - 2f(C) = 0. \quad (72.2)$$

می‌دانیم که $f'(C) = 1$ در نتیجه مقدار C را به شکل زیر بدست می‌آوریم

$$f(C) = \frac{C}{2}, \quad (73.2)$$

اکنون جواب بدست آمده فوق را در معادله (۶۷.۲) جایگذاری می‌کنیم

$$f'(C)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(C)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu}\square]f'(C) = 0, \quad (74.2)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\frac{C}{2}g_{\mu\nu} - 0 = 0.$$

آنگاه معادله (۶۷.۲) بصورت زیر تبدیل می‌شود

$$R_{\mu\nu} = \frac{C}{4}g_{\mu\nu}. \quad (75.2)$$

در اینجا اگر جواب حداکثر متقارن باشد با توجه به علامت C به فضای دوسپته ($C > 0$) و یا آنتی دوسپته ($C < 0$) تبدیل می‌شود درست به همان صورت که در نسبت عام یک (Λ) ثابت کیهان‌شناسی داشتیم.

بقای انرژی موضوع دیگری است که آن را بررسی می‌کنیم. در نظریه‌های $f(R)$ متریک به صورت کمینه و حداقلی با ماده جفت شده است. با انجام یک محاسبه ساده معلوم می‌شود که سمت چپ معادله (۶۷.۲) بدون واگرایی می‌باشد که به $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ اشاره می‌کند [۳۵]. در نهایت توجه می‌کنیم که نوشتن معادلات میدان در فرمی از معادلات اینشتین با تانسور انرژی تکانه موثر ترکیب شده از جملات انحنايي که در طرف راست معادله حرکت است ممکن می‌باشد. در این روش گرانش تانسور اسکالر مفید است [۳۶]. به طور خاص معادله (۶۷.۲) می‌تواند به شکل زیر هم نوشته شود

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R) = \kappa^\nu T_m, \quad (76.2)$$

$$\begin{aligned} f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{f'(R)}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{f'(R)}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{f(R)}{2}g_{\mu\nu} \\ = \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R) + \kappa^\nu T_m. \end{aligned}$$

به صورت زیر فاکتور می‌گیریم

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu}R + \left[\frac{f'(R) - f(R)}{2}\right]g_{\mu\nu} \quad (77.2)$$

$$= [\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + \kappa^* T_m].$$

معادله را به شکل زیر مرتب می‌کنیم

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'(R)g_{\mu\nu}R \quad (78.2)$$

$$= \left[\frac{f'(R) - f(R)}{2}\right]g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + \kappa^* T_m.$$

می‌دانیم که

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (79.2)$$

$$= \frac{\kappa T_{\mu\nu}'}{f'(R)} + g_{\mu\nu} \frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \frac{[\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R)]}{f'(R)},$$

در نهایت با نامگذاری خواهیم داشت

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (80.2)$$

$$= \frac{\kappa}{f'(R)}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(eff)}),$$

در اینجا کمیت $G_{\mu\nu} \equiv \frac{G}{f'(R)}$ را می‌توان به عنوان نیروی جفت شدگی گرانشی موثر مورد توجه قرار داد، البته در مقایسه با کاری که در گرانش اسکالر تانسوری انجام می‌شود مثبت بودن G_{eff} (یعنی گرانش شبیح نیست) تحمیل می‌کند که $f'(R) > 0$ است. از طرف دیگر داریم

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} \equiv \frac{1}{\kappa} \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) \right], \quad (81.2)$$

تانسور انرژی تکانه موثر که در مشتقات اول میدان‌های $f'(R)$ شکل استاندارد ندارد، اما دارای عبارات خطی در مشتقات مرتبه دوم است. چگالی انرژی موثر ناشی شده از آن مثبت معین نیست. و هیچ یک از شرایط انرژی را حفظ نمی‌کند. دوباره این حالت با اتفاقی که در گرانش تانسور اسکالر می‌افتد قابل مقایسه است. تانسور انرژی تکانه موثر معادله (81.2) می‌تواند به شکل تانسور انرژی تکانه یک شماره کامل نوشته شود. تانسور انرژی تکانه موثر برای یک شماره کامل به شکل

$$T_{\nu}^{(eff)\mu} = \begin{pmatrix} -\rho^{(eff)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p^{(eff)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & p^{(eff)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & p^{(eff)} \end{pmatrix}, \quad (82.2)$$

در اینجا ρ_{eff} چگالی موثر برابر است با

$$\rho_{(eff)} = \frac{Rf' - f}{2f'} - \frac{3HR\dot{R}f''}{f'}, \quad (83.2)$$

و $p_{(eff)}$ فشار موثر برابر با

$$p_{(eff)} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{f'}, \quad (84.2)$$

است [۳۷].

۶-۲ وردش گیری $f(R)$ به روش پالاتینی

ما قبلا به صورت کامل بیان کردیم که معادلات میدان اینشتین از کنش اینشتین هیلبرت را می توان به روش پالاتینی با مستقل در نظر گرفتن هموستار و متریک به عنوان میدان های جداگانه بدست آورد. در هر دو حالت به نظر دارای یک کنش یکسان هستیم اما در این حالت تانسور ریچی و تانسور ریمان با هموستارهای مستقل ساخته شده اند. برای نشان دادن این حالت که در آن تانسور ریچی به صورت مستقل می باشد از \mathcal{R} استفاده می کنیم و اسکالر ریچی متناظر را با $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ نشان می دهیم. کنش ما به صورت زیر است

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi). \quad (85.2)$$

باید توجه کرد که در جایی که $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ باشد دوباره به همان گرانش اینشتین تبدیل می شود. در اینجا فرض شده است که کنش ماده S_m تنها به میدان های ماده و متریک بستگی دارد و به هموستار مستقل وابسته نیست. این فرض محکمی برای بدست آوردن معادلات اینشتین از حالت خطی کنش معادله (۸۵.۲) است و همچنین مشخصه اصلی فرمول بندی پالاتینی می باشد [۳۸، ۳۹، ۴۰]. یک هموستار آفین معمولا مشتق هموردا و انتقال های موازی را تعریف می کند. از طرفی فرض می کنیم که کنش ماده S_m عموما یک اسکالر هموردای عام است که مشتقات میدان های ماده را نیز شامل می شود. در نتیجه برای یک میدان ماده عمومی این مشتقات باید هموردا باشند. البته موارد خاصی نیز وجود دارند. مثلا یک میدان اسکالر، در این حالت یک مشتق جزئی و مشتق هموردا بر هم منطبق شدند و یا میدان های الکترومغناطیسی، که در این حالت می شود بدون استفاده کردن از مشتق هموردا یک کنش هموردا را نوشت [۴۰] تمام میدان های ممکن را S_m باید شامل شود. بنابراین فرضی که در آن بیان کردیم S_m باید مستقل از هموستار باشد می تواند به یکی از این دو مورد را شامل شود [۳۹]: یا به صورت کلی فرض می کنیم که واقعا انتقال های موازی از طریق هموستار لوی

چویتا از متریک تعریف می‌شوند و یا ما خودمان را محدود به یک سری میدان‌های خاص می‌کنیم. در نتیجه برای حالت اول هموستار مستقل $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ مشتقات هموردا و انتقال موازی را تعریف نمی‌کنند و هندسه ما تقریباً شبیه ریمانی است را کنار می‌گذاریم چرا که با اعمال و انتخاب حالت دوم محدود به یک نظریه گرانشی می‌شویم. در نتیجه مشتقات هموردا واقعا از طریق هموستار لویی چویتا از متریک $\{\lambda_{\mu\nu}\}$ تعیین شده است.

در نظریه گرانش $f(\mathcal{R})$ پالاتینی فرض می‌کنیم که ماده با هیچ میدانی جفت نشده است و تنها به صورت حداقلی و مینیمال با متریک دارای جفت شدگی است. دوباره می‌توانیم به همان شکل که در نسبت عام و یا گرانش $f(\mathcal{R})$ متریکی با استفاده از تغییر ناپذیری دیفیوژورسم نشان بدهیم که تانسور انرژی تکانه که به وسیله مشتق هموردا که با هموستار لویی چویتا از متریک تعریف شده پایستار است $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ اما $(\bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} \neq 0)$.

همچنین نشان داده شده است و اگرایی $T_{\mu\nu}$ نسبت به هموستار لویی چویتا از متریک با استفاده از معادلات میدان صفر خواهد شد [۴۱، ۴۲]. بنابراین بسیار واضح است که گرانش $f(\mathcal{R})$ پالاتینی یک تئوری متریکی است. در نتیجه می‌توان گفت که از بقای هموردا از تانسور انرژی تکانه برای حرکت ماده ذرات آزمون باید در ژئودزیک های مشخص بدست آمده از متریک در گرانش $f(\mathcal{R})$ حرکت کنند (این محاسبات با در نظر گرفتن یک شماره $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$ که از گرد و غبار می‌باشد و معادله بقای $\nabla^\beta T_{\mu\beta}$ بر روی چهار بردار u^β است). به همین شکل تئوری‌هایی که اصل هم‌ارزی اینشتین را ارضا می‌کنند شرط اصلی متریک را نیز ارضا می‌کنند. اکنون با استفاده از فرمول زیر

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\lambda \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (۸۶.۲)$$

که مشتق هموردا $\bar{\nabla}_\lambda$ با هموستار مستقل است. از کشش نسبت به متریک و هموستار وردش می‌گیریم که به صورت زیر است

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \Lambda\pi GT_{\mu\nu}, \quad (۸۷.۲)$$

$$-\bar{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}) + \bar{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\sigma(\mu})\delta_\lambda^{\nu)}) = 0, \quad (۸۸.۲)$$

در اینجا $T_{\mu\nu}$ از معادله (۶۶.۲) مشخص است و مشتق هموردا $\bar{\nabla}_\mu$ با هموستار مستقل $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ است و $[\mu\nu]$ و $(\mu\nu)$ بر پاد متقارن و متقارن بودن روی اندیس‌های μ و ν اشاره می‌کند. اکنون از معادله (۸۸.۲) رد می‌گیریم و به راحتی نشان می‌دهیم که

$$\bar{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\sigma\mu}) = 0, \quad (۸۹.۲)$$

می‌توانیم معادلات میدان را به شکل زیر بنویسیم

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \kappa GT_{\mu\nu}, \quad (90.2)$$

$$\bar{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}) = 0, \quad (91.2)$$

اگر $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ باشد فرمولبندی پالاتینی به نسبت عام تبدیل می‌شود. در این حالت $f'(\mathcal{R}) = 1$ است و معادله (91.2) به معادله اولیه از هموستار لویی چی وی تا برای هموستار مستقل $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ تبدیل می‌شود. بنابراین با اعمال $\mathcal{R} = R$ و $\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ معادله (88.2) به معادلات اینشتین تبدیل می‌شود. باید توجه کرد که در فرمولبندی پالاتینی برای نسبت عام هموستار در واقع هموستار لویی چویتا است و دارای یک ویژگی دینامیکی است.

نظریه‌های تعمیم یافته که کنش آن‌ها شامل یک تابه عمومی از \mathcal{R} می‌باشد در فرمولبندی پالاتینی مشابه با تعمیم کنش اینشتین هیلبرت در فرمولبندی متریکی است. بنابراین با این وجود که هر دو فرمولبندی جواب‌های مشابه‌ای را برای کنش‌های خطی می‌دهند اما برای کنش‌های عمومی‌تر نتایج متفاوتی را ارائه می‌دهند.

اکنون یک سری از ویژگی‌های معادلات (88.2) را بیان می‌کنیم. از معادله (88.2) رد می‌گیریم

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R} - 2f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = 8\pi GT, \quad (92.2)$$

اگر f یک تابع معین از معادله جبری در R باشد. برای تمامی مواردی که $T = 0$ باشد، که برای حالت‌های خلا الکتریکی و خلا است. R یک ثابت می‌باشد و یک ریشه معادله به صورت زیر خواهد بود

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R} - 2f(\mathcal{R}) = 0. \quad (93.2)$$

حالت‌هایی را که در آن معادله (93.2) دارای ریشه نباشند را بررسی نمی‌کنیم به این دلیل که می‌توان نشان داد که معادلات میدان متناقض هستند. بنابراین در اینجا از حالت‌هایی از f که این ویژگی‌ها را دارند اجتناب می‌کنیم. به طور مثال معادله (93.2) که در آن $f(\mathcal{R}) \propto R^2$ انتخاب شده باشد را ارضا می‌کند. و از معادله (92.2) مشخص است که اگر $f(\mathcal{R}) \propto R^2$ باشد برای این که دقیقا $T = 0$ باشد فقط ماده ناوردای همدیس داریم که ممکن است با گرانش جفت شده باشد. با این وجود که ماده ناوردای همدیس نیست بنابراین این انتخاب خاص از تئوری f که با انرژی پایین از گرانشی مناسب نیست. بنابراین ما این بخش را باز نمی‌کنیم.

با توجه به معادله (91.2) یک متریک همدیس برای $g_{\mu\nu}$ پیدا می‌کنیم.

$$h_{\mu\nu} \equiv f'(\mathcal{R})g_{\mu\nu}, \quad (94.2)$$

در نتیجه می‌توانیم نشان دهیم که

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}, \quad (95.2)$$

با در نظر گرفتن معادله (94.2) معادله (91.2) را می‌توانیم حل کنیم و هموستار مستقل را به صورت زیر نشان دهیم (معادله (91.2) تعریفی از هموستار لوی چویتا از $h_{\mu\nu}$ می‌شود)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{4}h^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\mu\nu}), \quad (96.2)$$

و یا هم ارز با $g_{\mu\nu}$ به صورت

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{f'(\mathcal{R})}g^{\lambda\sigma}[(\partial_{\mu}f'(\mathcal{R})g_{\nu\sigma}) + (\partial_{\nu}f'(\mathcal{R})g_{\mu\sigma}) - (\partial_{\sigma}f'(\mathcal{R})g_{\mu\nu})], \quad (97.2)$$

اکنون که ما عبارت $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ را بر حسب R و $g_{\mu\nu}$ بدست آوردیم و با در نظر گرفتن معادله (93.2) که به صورت جبری R را با T مرتبط می‌کند می‌توانیم معادلات میدان را بر اساس متریک و میدان‌های ماده بیان کنیم و هموستار مستقل را از آن‌ها حذف کنیم. اکنون بررسی می‌کنیم که چطور تانسور ریچی تحت تغییرات تغییر می‌کند، ما می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2(f'(\mathcal{R}))^2}(\partial_{\mu}f'(\mathcal{R}))(\partial_{\nu}f'(\mathcal{R})) - \frac{1}{f'(\mathcal{R})}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (98.2)$$

با ضرب کردن در $g^{\mu\nu}$ خواهیم داشت

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{2(f'(\mathcal{R}))^2}(\partial_{\mu}f'(\mathcal{R}))(\partial^{\mu}f'(\mathcal{R})) - \frac{1}{f'(\mathcal{R})}(3\square f'(\mathcal{R})), \quad (99.2)$$

قابل ذکر است که تفاوت بین \mathcal{R} و اسکالر ریچی R از $g_{\mu\nu}$ به این خاطر است که از انقباض $R_{\mu\nu}$ استفاده شده است. اکنون معادله (98.2) و (99.2) را در معادله (88.2) جایگذاری می‌کنیم سپس بعد از ساده سازی خواهیم داشت

$$G_{\mu\nu} = \frac{\Lambda\pi G}{f'}T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\mathcal{R} - \frac{f}{f'}) + \frac{1}{f'}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square)f' - \frac{3}{2(f')^2}(\nabla_{\mu}f')(\nabla_{\nu}f') - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\nabla f')^2, \quad (100.2)$$

با این فرض که ما می‌دانیم ریشه معادله (92.2) برابر $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$ است، در نتیجه ما به صورت کامل هموستار مستقل را از معادله حذف می‌کنیم. بنابراین توانستیم معادلات میدان را به یک معادله کاهش دهیم در نتیجه اکنون هر دو طرف معادله (101.2) فقط به میدان‌های ماده و متریک وابسته هستند. به بیان ساده‌تر می‌توان گفت که تئوری به یک شکل اصلاح شده از نسبیت عام تبدیل شد.

اکنون ما می‌توانیم موارد زیر را نتیجه بگیریم:

۱- در حالتی که $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ باشد، نظریه به گرانش تبدیل می‌شود.

۲- برای حالتی که در آن میدان‌های ماده با $T = 0$ و به علت معادله (۹۳.۲) و \mathcal{R} و به دنبال آن $f(\mathcal{R})$ و $f'(\mathcal{R})$ ثابت هستند و تئوری به گرانش با یک ثابت جفت شدگی اصلاح شده $\frac{G}{f'}$ و یک ثابت کیهان‌شناسی کاهش می‌یابد. اگر مقدار \mathcal{R} را در زمانی که $T = 0$ باشد به عنوان $\mathcal{R}_.$ نشان دهیم، در این حالت مقدار ثابت کیهان‌شناسی برابر با

$$\frac{1}{2} \left(\mathcal{R}_. - \frac{f(\mathcal{R}_.)}{f'(\mathcal{R}_.)} \right) = \frac{(\mathcal{R}_.)}{4}, \quad (101.2)$$

می‌شود. هنگامی که از معادله (۹۳.۲) استفاده کنیم علاوه بر خلا، $T = 0$ نیز است. به همین شکل برای میدان‌های الکترو مغناطیس، تابش و هر نوع ناوردای همدیس از ماده، نیز به کار می‌رود.

۳- در حالت کلی که $T = 0$ است بعد از اصلاحات در طرف راست معادله (۱۰۱.۲) دارای مشتقاتی از تانسور انژی فشار است که برعکس آن چیزی که در گرانش است. این موارد در دو جمله آخر معادله (۱۰۱.۲) آشکار می‌شوند. در حالتی که f' در کنش یک تابع از T باشد در نتیجه $f' = f'(\mathcal{R})$ و $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$ می‌باشد.

۴- در فرمولبندی پالاتینی گرانش در $f(\mathcal{R})$ حتی اگر هموستار مستقل باشد، داخل کنش ماده نمی‌شود و این یعنی پالاتینی گرانش در $f(\mathcal{R})$ یک تئوری متریکی است.

۵- هموستار مستقل یک میدان کمکی است.

فصل ۳

نظریه گرانش $f(R)$

۱-۳ مقدمه

در ده سال اخیر نظریه‌های گرانش تعمیم یافته که شامل اضافه کردن جملات شامل یک میدان اسکالر با یک میدان برداری به لاگرانژی اینشتین هیلبرت می‌باشد مورد بررسی قرار گرفته است. بعضی از این نظریه‌ها شامل جفت شدگی ضعیف انحنای باماده است به این امید که بتوانیم توضیحی در مورد دینامیک کیهان داشته باشیم. اگر چه بسیاری از نظریه‌ها به طور طبیعی شتاب دلخواه مورد نظر را تولید می‌کنند اما در ادامه می‌بینیم که این نظریه‌ها با مشکلاتی همچون مشتق مرتبه بالاتر زمان در معادله حرکت یا مشتق مرتبه بالاتر مکانی و یا درجه آزادی اضافه با جمله جنبشی منفی روبرو می‌شوند. در نظریه‌های اسکالر تانسوری جفت شدگی می‌تواند به صورت کمینه و یا غیر کمینه با گرانش باشد. اولین بار یک نظریه اسکالر تانسوری توسط جردن پیشنهاد شد. سپس سال‌ها بعد برنز و دیکی به نتیجه مشابهی رسیدند که منجر به نظریه برنز دیکی شد. کنش این نظریه شامل متریک فضا زمان و یک میدان اسکالر شد. کنش نظریه برنز دیکی با انگیزه ارضاء اصل ماخ نوشته شده است [۴۳، ۱۷] به طور کلی ما در این پایان نامه در مورد کنش و معادلات میدان اسکالر در غالب اینشتین و جردن صحبت می‌کنیم. در این فصل به بررسی یک کنش تعمیم یافته گرانش می‌پردازیم که متریک و هموستار بصورت مستقل از هم وجود داشته باشند فرض کنیم که کنش به صورت زیر باشد.

۲-۳ نمایش اسکالر تانسوری از گرانش در متریک پالاتینی

کنش ما به صورت

$$S = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2}} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathcal{R})] + S_m, \quad (1.3)$$

که در اینجا S_m کنش ماده می‌باشد و $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ و R لاگرانژی اینشتین هیلبرت برای متریک و $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$ انحنای پالاتینی است. و \mathcal{R} به وسیله یک هموستار مستقل $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ معرفی می‌شود

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv \hat{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \hat{\Gamma}_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \hat{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\alpha \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\alpha \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^\lambda. \quad (2.3)$$

یک میدان کمکی اسکالر به صورت $f(\mathcal{R}) = f(A) + f_A(\mathcal{R} - A)$ معرفی می‌کنیم که با جایگذاری این میدان کمکی در کنش خواهیم داشت

$$S = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2}} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(A) + f_A(\mathcal{R} - A)] + S_m, \quad (3.3)$$

که در آن $f_A \equiv \frac{df}{dA}$ حال با تعریف $f_A \equiv \phi$ و $V(\phi) = Af_A - f(A)$ خواهیم داشت. واضح است که با وردش گرفتن از A به کنش (۱.۳) می‌رسیم

$$f(A) + f_A(\mathcal{R}) - f_A(A) = f(A) - f_A(A) + f_A(\mathcal{R}) = -V(\phi) + \phi\mathcal{R}, \quad (4.3)$$

و کنش به صورت زیر ساده می‌شود:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2}} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \phi\mathcal{R} - V(\phi)] + S_m, \quad (5.3)$$

با توجه به مستقل بودن هموستار و متریک به روش پالاتینی از کنش بالا وردش می‌گیریم

$$\delta S = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2}} \int \delta \sqrt{-g} [R + \phi\mathcal{R} - V(\phi)] + \sqrt{-g} [\delta R + \delta\phi\mathcal{R} + \phi\delta\mathcal{R} - \delta V(\phi)] \quad (6.3)$$

$$+ \delta S_m.$$

در اینجا وردش از متریک برابر است با

$$R_{\mu\nu} + \phi\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{\sqrt{\kappa^2}} (R + \phi\mathcal{R} - V) g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (7.3)$$

وردش نسبت به ϕ به صورت

$$\mathcal{R} - V_\phi = 0, \quad (8.3)$$

و وردش نسبت به هموستار به صورت

$$\nabla_\alpha(\sqrt{-g}\phi g^{\mu\nu}) = 0. \quad (9.3)$$

بدست می‌آید. معادله (9.3) پیشنهاد می‌کند که متریکی به صورت $\phi g^{\mu\nu}$ با هموستار $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ سازگار است. در نتیجه اگر فرض کنیم $\tilde{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$ و $\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{\phi}g^{\mu\nu}$ و به یاد داشته باشیم که

$$\hat{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{\phi}\eta^{\mu\alpha}(\partial_\nu\eta_{\alpha\rho} + \partial_\rho\eta_{\alpha\nu} - \partial_\alpha\eta_{\nu\rho}), \quad (10.3)$$

آنگاه بدست می‌آید

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2\phi^2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{\phi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{\phi}g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (11.3)$$

حال با ضرب کردن $g^{\mu\nu}$ در $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ خواهیم داشت که

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{2\phi^2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{3}{\phi}(\square\phi), \quad (12.3)$$

با جایگذاری معادله بدست آمده در کنش (5.3) به کنش زیر می‌رسیم

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \phi \left(\frac{3}{2\phi^2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{\phi}(3\square\phi) \right) - V(\phi) \right] + S_m, \quad (13.3)$$

با ساده سازی و حذف مشتق کامل‌ها کنش حاصل شده به صورت زیر ساده می‌شود

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [(1 + \phi)R + \frac{3}{2\phi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)] + S_m, \quad (14.3)$$

این کنش بسیار شبیه به نظریه برنز دیکی با $w = \frac{3}{2}$ است اما در شکل جفت شدگی اسکالر با انحنا با آن تفاوت دارد. در نظریه برنز دیکی شکل جفت شدگی ϕR است. همانطور که خواهیم دید این تغییر ساده پیامدهای فیزیکی مهمی خواهد داشت.

ما به دو صورت می‌توانیم به معادله حرکت برسیم روش اول این است که تعریف جدید \mathcal{R} را در معادله حرکت‌های (7.3) و (8.3) بگذاریم و معادله حرکت را بدست آوریم. روش دوم این است که دوباره از کنش (14.3) وردش بگیریم. که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta S = & \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left(\delta\sqrt{-g} \left[R + \phi R + \frac{3}{2\phi}\delta\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \right] \right. \\ & + \sqrt{-g} \left[\delta R + -g\delta\phi R + \phi\delta R + \frac{3}{\delta 2\phi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2\phi}\delta\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{3}{2\phi}\partial_\mu\phi\delta\partial^\mu\phi - \delta V(\phi) \right] + \delta S_m \right), \end{aligned} \quad (15.3)$$

وردش از بخش متریک کنش به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\phi R + \phi R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu}\square\phi \quad (16.3) \\
 & -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\frac{3}{4\phi^2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + \frac{3}{4\phi}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{4}Vg_{\mu\nu} - \frac{1}{4}T_{\mu\nu} = 0,
 \end{aligned}$$

با ساده سازی و معرفی $X \equiv \partial_\rho\phi\partial^\rho\phi$ داریم که

$$(1 + \phi)G_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu}\square\phi - \frac{3}{4\phi^2}g_{\mu\nu}X + \frac{3}{4\phi}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{4}Vg_{\mu\nu} - \frac{1}{4}T_{\mu\nu} = 0. \quad (17.3)$$

از طرفی وردش نسبت به ϕ به صورت

$$R - \frac{3}{4\phi^2}X - \frac{3}{\phi}\square\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (18.3)$$

با رد گرفتن از (17.3)

$$(1 + \phi)R = 3\square\phi - \frac{3}{4\phi}X + 2V - \frac{1}{4}T, \quad (19.3)$$

و جایگذاری دوباره در همان معادله به این نتیجه می‌رسیم که

$$(1 + \phi)R_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(V - \square\phi) + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{3}{4\phi}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \kappa^2(T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}T), \quad (20.3)$$

که فرم ساده‌تری از معادله حرکت متریک است. با توجه به معادله (18.3) و جایگذاری آن در معادله (19.3) خواهیم داشت

$$2V - \phi V_\phi = \kappa^2 T + R, \quad (21.3)$$

حال اگر به جای R در معادله بالا از معادله (19.3) جایگذاری کرده و از معادله (18.3) استفاده کنیم معادله زیر را خواهیم داشت.

$$2V - \phi V_\phi - V_\phi - \frac{3}{\phi}\square\phi + \frac{3}{4\phi^2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \kappa^2 T, \quad (22.3)$$

با ضرب این معادله به $\frac{\phi}{4}$ و ساده سازی معادله اسکالر به صورت ساده تر بدست می‌آید:

$$-\square\phi + \frac{1}{4\phi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{\phi[2V - (1 + \phi)V_\phi]}{4} = \frac{\phi\kappa^2}{4}T, \quad (23.3)$$

بدست می‌آید.

۳-۳ میدان ضعیف، کند تغییر

اثرات میدان اسکالر ϕ بر روی یک سیستم وابسته خورشیدی را می‌توان با مطالعه یک میدان ضعیف یا کند تغییر از معادله (۲۰.۳) و (۲۳.۳) تعیین کرد. برای انجام این کار، ما با بسط دادن متریک و میدان اسکالر وابسته حل کیهان شناسی را بدست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ و $h_{\mu\nu} \ll 1$ تعیین می‌کنیم. مبنی بر این که مقدار مجانبی از ϕ به صورت ϕ و اختلال موضعی به صورت $\phi(x)$ ، به مولفه خطی معادله (۲۳.۳) تبدیل می‌شود. در ابتدا انجام محاسبات را به صورت تکی برای تمام جملات معادله (۲۳.۳) آغاز می‌کنیم.

برای جمله اول این معادله می‌دانیم که

$$\begin{aligned} -\square\phi &= g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi, \\ &= g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\partial_{\rho}\phi. \end{aligned} \quad (24.3)$$

از طرفی داریم که $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ است، از مشتق زمانی صرف نظر می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت که

$$-\square\phi = \nabla^2\phi. \quad (25.3)$$

برای جمله دوم معادله (۲۳.۳) داریم که $\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi$ برابر صفر است. برای جمله سوم یعنی $\frac{\phi[2V-(1+\phi)V_{\phi}]}{3}$ با جایگذاری $\phi = \phi + \phi$ در معادله تقریب مرتبه اول و دوم را به صورت زیر مشخص می‌کنیم

$$\frac{\phi}{3}[2V - (1 + \phi)V_{\phi}] = \underbrace{\frac{\phi}{3}[2V - (1 + \phi)V_{\phi}]}_{T_1} - \underbrace{\frac{\phi}{3}[\phi \cdot (1 + \phi)V_{\phi\phi} + V_{\phi} - 2V]}_{T_2}. \quad (26.3)$$

برای بدست آوردن این معادله با توجه به این که می‌دانیم $V(\phi)$ در تقریب مرتبه اول T_1 برابر با

$$V(\phi) = V(\phi + \phi) = V(\phi) + V_{\phi}\phi. \quad (27.3)$$

و در تقریب مرتبه دوم T_2 به صورت

$$V_{\phi}(\phi) = V_{\phi}(\phi + \phi) = V_{\phi}(\phi) + V_{\phi\phi}|\cdot\phi. \quad (28.3)$$

است و با جایگذاری در معادله (۲۶.۳) در نتیجه برای تقریب مرتبه اول خواهیم داشت

$$T_1 = \frac{\phi + \phi}{3}[2V - (1 + (\phi + \phi))(V_{\phi} + V_{\phi}\phi)], \quad (29.3)$$

با ضرب این معادله خواهیم داشت

$$T_1 = \frac{\phi \cdot}{3} 2V - \frac{\phi}{3} 2V + \frac{\phi \cdot}{3} V(\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot}{3} \phi V(\phi) - \frac{\phi}{3} V(\phi \cdot) - \frac{\phi}{3} V_\phi(\phi) \quad (30.3)$$

$$- \frac{\phi \cdot}{3} V(\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot}{3} V_\phi(\phi) + \frac{\phi}{3} \phi \cdot V(\phi \cdot) - \frac{\phi}{3} \phi \cdot V_\phi(\phi)$$

$$- \frac{\phi \cdot}{3} \phi V(\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot}{3} \phi V_\phi(\phi) - \frac{\phi \cdot}{3} V(\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot}{3} V_\phi(\phi),$$

که با ساده کردن و در نظر گرفتن تقریب مرتبه اول خواهیم داشت

$$T_1 = -\frac{\phi \cdot}{3} [2V - (1 + \phi \cdot) V(\phi \cdot)], \quad (31.3)$$

برای تقریب مرتبه دوم نیز با جایگذاری معادله (28.3) در معادله (26.3) داریم

$$T_2 = \frac{\phi \cdot + \phi}{3} [2V - (1 + \phi \cdot + \phi)(V_\phi(\phi \cdot + \phi))], \quad (32.3)$$

با ضرب کردن خواهیم داشت

$$T_2 = \frac{\phi \cdot}{3} 2V + \frac{\phi}{3} 2V - \frac{\phi \cdot}{3} V_\phi(\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot}{3} V_{\phi\phi} | \cdot (\phi \cdot) - \frac{\phi}{3} V_\phi(\phi \cdot) \quad (33.3)$$

$$- \frac{\phi}{3} V_{\phi\phi} | \cdot (\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot}{3} V_\phi(\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot}{3} V_{\phi\phi} | \cdot (\phi) - \frac{\phi \cdot \phi}{3} V_\phi(\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot \phi}{3} V_\phi(\phi \cdot)$$

$$- \frac{\phi \phi \cdot}{3} V_\phi(\phi \cdot) - \frac{\phi \phi \cdot}{3} V_{\phi\phi} | \cdot (\phi) - \frac{\phi \cdot}{3} V_\phi(\phi \cdot) - \frac{\phi \cdot}{3} V_{\phi\phi} | \cdot (\phi),$$

که با ساده سازی به صورت تقریبی خواهیم داشت

$$T_2 = \frac{\phi}{3} [2V + V_\phi \phi \cdot + \phi(1 + \phi \cdot) V_{\phi\phi} | \cdot], \quad (34.3)$$

از جمع کردن این دو تقریب (مقدار T_1 و T_2) با هم m_ϕ^2 را تعریف می کنیم که به صورت زیر است

$$m_\phi^2 = \frac{(2V - V_\phi - \phi(1 + \phi) V_{\phi\phi} | \cdot)}{3} |_{\phi=\phi \cdot}, \quad (35.3)$$

و در نهایت با محاسبه بخش آخر معادله و اعمال $T_{ij} = 0$ ، $T_{..} = \rho$ در معادله آخر به نتیجه $\frac{\phi k^2}{3} \rho$ می رسیم با قرار دادن این محاسبات در معادله (23.3) معادله میدان اسکالر خطی شده را به صورت زیر بدست می آوریم

$$(\nabla^2 - m_\phi^2) \phi = \frac{\phi \cdot k^2}{3} \rho, \quad (36.3)$$

که طبق معمول در این معادله از مشتقات زمانی و فشار چشم پوشی کردیم. خطی سازی معادلات متریک کمی پیچیده تر است برای این کار در ابتدا با بازکردن تانسور ریچی در فضای مینکوفسکی و اعمال $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ و $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ داریم

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{\Psi}(\partial_{\mu}h_{\alpha}^{\alpha} + \partial_{\alpha}h_{\mu}^{\alpha} - \partial^{\alpha}h_{\mu\alpha}), \quad (37.3)$$

با جایگذاری عبارت بالا تانسور ریچی در نهایت خواهیم داشت

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\Psi}(\partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu\alpha} - \frac{1}{\Psi}\nabla^{\nu}h_{\mu\nu} - \frac{1}{\Psi}\partial_{\nu}\partial_{\mu}h\alpha^{\alpha}), \quad (38.3)$$

که با تعریف $h_{\nu}^{\rho} = \tilde{h}_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{\Psi}\delta_{\nu}^{\rho}\tilde{h}_{\alpha}^{\alpha}$ در معادله بالا خواهیم داشت

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\Psi}(\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\nu\alpha} - \frac{1}{\Psi}\nabla^{\nu}h_{\mu\nu}), \quad (39.3)$$

با جایگذاری این معادله در معادله (20.3) خواهیم داشت

$$(1 + \phi)(\frac{1}{\Psi}(\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\mu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\nu\alpha} - \frac{1}{\Psi}\nabla^{\nu}h_{\mu\nu})) \quad (40.3)$$

$$= \kappa^{\nu}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{\Psi}g_{\mu\nu}T) + \frac{1}{\Psi}g_{\mu\nu}(V + \square\phi) + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi - \frac{3}{\Psi}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi.$$

حال از مرتبه‌های بالاتر چشم پوشی می‌کنیم (یعنی $\frac{3}{\Psi}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi$). از طرفی می‌دانیم

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi = \partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\partial_{\rho}\phi \quad (41.3)$$

$$\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi = \frac{1}{\Psi}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi + \partial_{\nu}\partial_{\mu}\phi),$$

از طرفی داریم

$$(1 + \phi)(\frac{1}{\Psi}\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\mu}^{\alpha} + \frac{1}{\Psi}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\nu\alpha}) \quad (42.3)$$

$$= \frac{1}{\Psi}\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\mu}^{\alpha} + \frac{1}{\Psi}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\nu\alpha} + \frac{1}{\Psi}\phi\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\mu}^{\alpha} + \phi\frac{1}{\Psi}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\tilde{h}_{\nu\alpha},$$

در نتیجه در نهایت خواهیم داشت

$$-\frac{1}{\Psi}\nabla^{\nu}h_{\mu\nu} = \frac{\kappa^{\nu}}{1 + \phi}((T_{\mu\nu} - \frac{1}{\Psi}g_{\mu\nu}T) + \frac{1}{\Psi}g_{\mu\nu}(V + \square\phi)). \quad (43.3)$$

معادله فوق را در 2 ضرب می‌کنیم، سپس به شکل زیر ساده می‌کنیم

$$\nabla^{\nu}(h_{\mu\nu} + \frac{\phi}{1 + \phi}\eta_{\mu\nu}) = -\frac{\kappa^{\nu}}{1 + \phi}(2T_{\mu\nu} - T\eta_{\mu\nu} - V\eta_{\mu\nu}). \quad (44.3)$$

مولفه‌های مکانی و زمانی h را بدست می‌آوریم. برای مولفه زمانی با جایگذاری $T = \rho$ ، $T_{..} = \rho$ و $\eta_{..} = -1$ در نتیجه بدست می‌آوریم

$$\nabla^2 \left(h_{..} - \frac{\phi}{1 + \phi} \right) = -\frac{\kappa^2}{1 + \phi} (\rho - V). \quad (45.3)$$

برای مولفه‌های مکانی $T_{ij} = 0$ و $T = -\rho$ را جایگذاری می‌کنیم

$$\nabla^2 \left(h_{ij} + \frac{\phi}{1 + \phi} \delta_{ij} \right) = -\frac{\kappa^2 \delta_{ij}}{1 + \phi} (\rho + V). \quad (46.3)$$

قبل از حل معادلات (36.3)، (45.3) و (46.3) باید متذکر شد که معادله هموستار (8.3) در برابر این تغییر مقیاس $\phi \rightarrow \phi$ یک میدان ثابت است. سایر معادلات میدان، این ناوردایی را با هم ارضا نمی‌کنند. با استفاده از راه حل عمومی

$$(\nabla^2 - m^2)f = -\rho \Rightarrow f = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \frac{\rho(t, x')}{|x - x'|} e^{m|x-x'|}. \quad (47.3)$$

در تقارن کروی و به دور از منابع ماده معادلات فوق تبدیل می‌شوند

$$\phi(r) = \frac{2G\phi M}{3r} e^{-m_\phi r}, \quad (48.3)$$

$$h_{..}^{(2)}(r) = \frac{2g_{eff}M}{r} + \frac{V}{1 + \phi} \frac{r^2}{6}, \quad (49.3)$$

$$h_{ij}^{(2)}(r) = \left(\frac{2G_{eff}M}{r} - \frac{V}{1 + \phi} \frac{r^2}{6} \right) \delta_{ij}, \quad (50.3)$$

که در آن جرم منبع را به صورت زیر تعریف کرده‌ایم

$$M = \int d^3x \rho(x). \quad (51.3)$$

همچنین در اینجا ما ثابت نیوتون G_{eff} و پارامتر بعد از نیوتن γ را به شکل زیر تعریف کردیم

$$G_{eff} \equiv \frac{G}{1 + \phi} \left[1 - \frac{\phi}{3} e^{-m_\phi r} \right], \quad (52.3)$$

$$\gamma \equiv \frac{1 + \frac{\phi}{3} e^{-m_\phi r}}{1 - \frac{\phi}{3} e^{-m_\phi r}}, \quad (53.3)$$

همانطور که در معادلات بالا مشخص است جفت شدگی میدان اسکالر به سیستم محلی به دامنه مقدار پس زمینه وابسته به دامنه ϕ از ϕ بسیار کوچک است سپس $G_{eff} \approx G$ و $\gamma \approx 1$ بدون در

نظر گرفتن جرم موثر وقتی این مربع منفی شود عبارتهای نمای در بالا به کسینوس تبدیل می‌شوند. مقایسه نتایج بالا با نتیجه حاصل از تئوری‌های $f(R)$ فیزیکی در منبع [۴۴] آمده است. در این مورد

$$\phi = \left(\frac{2G}{3}\right)\left(\frac{M}{r}\right)e^{-m_f R}, \quad (54.3)$$

$$G_{eff} \equiv \frac{G\left(1 + \frac{e^{-m_f r}}{3}\right)}{\phi}, \quad (55.3)$$

$$\gamma \equiv \frac{1 + \frac{\dot{\phi}}{3}e^{-m_\phi r}}{1 - \frac{\dot{\phi}}{3}e^{-m_\phi r}}, \quad (56.3)$$

و که نیاز به جرم‌های بزرگ دارد. میدان مغناطیسی بزرگ $m_f^2 \equiv \frac{(\phi V_{\phi\phi} - V_\phi)}{3}$ برای ایجاد اصلاحات در آزمایش‌های محلی قابل اغماض است. این امر را می‌توان در مدل‌های خاص پیاده سازی مکانیسم [۴۵] به دست آورد. ما توجه داریم که محدود بودن نتایج بدست آمده در این بخش با تحلیل از منبع [۴۶] مطابقت دارد. برای تئوری‌های عمومی اسکالر بی‌جرم است.

۴-۳ انبساط کیهان در زمان‌های اخیر

به عنوان یک مثال خاص از دینامیک کیهانی اصلاح شده ما متریک فضایی FRW را در نظر می‌گیریم

$$dS^2 = -dt^2 + a^2 dx^2. \quad (57.3)$$

که در اینجا $a(t)$ عامل مقیاس و اسکالر ریچی برابر $R = 6(H^2 + \dot{H})$ که در اینجا $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ برابر با پارامتر هابل و $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$ با این تعریف‌ها معادله (۲۰.۳) بصورت زیر ساده می‌شود

$$-6H^2 + V + 2\kappa^2 \rho - 6H^2 \phi - 6H\dot{\phi} - \frac{3\dot{\phi}^2}{2\phi} = 0. \quad (58.3)$$

با ساده سازی بدست می‌آوریم

$$3H^2 = \frac{1}{(1+\phi)}\left[\kappa^2 \rho + \frac{V}{2} - 3\dot{\phi}\left(H + \frac{\dot{\phi}}{4\phi}\right)\right]. \quad (59.3)$$

به همین ترتیب برای معادله دیگر داریم

$$(1+\phi)(-2\dot{H}) - \kappa^2(\rho + p) + H\dot{\phi}^2 \frac{3\dot{\phi}}{2\phi} - \ddot{\phi} = 0. \quad (60.3)$$

با تقسیم این معادله بر $\frac{1}{1+\phi}$ داریم

$$2\dot{H} = \frac{1}{(1+\phi)}[-\kappa^2(\rho+p) + H\dot{\phi} + \frac{3\dot{\phi}^2}{2\phi} - \ddot{\phi}]. \quad (61.3)$$

با انجام محاسبات و جایگذاری ها معادله میدان اسکالر (23.3) تبدیل می شود به

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi} - 2\dot{H} + \frac{\phi}{3}(2V + (1+\phi)V_\phi) = -\frac{\phi \cdot \kappa^2}{3}(\rho - 3p). \quad (62.3)$$

رفتار کیفی میدان اسکالر را می توان مستقیما از معادله (62.3) که به صورت زیر نوشته می شود خواند

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi} + M_\phi^2(T)\phi = 0. \quad (63.3)$$

در اینجا $T = -(\rho - 3p)$ در نتیجه $M_\phi^2(T)$ به شکل زیر است

$$\begin{aligned} M_\phi^2(T) &\equiv m_\phi^2 - \frac{1}{3}\kappa^2 T \\ &= \frac{1}{3}[2V + (1+\phi)V_\phi - \kappa^2 T]. \end{aligned} \quad (64.3)$$

که با وجود نماد سازی به یک تابع مثبت نیازی نیست. گذشته از عبارت $\frac{\dot{\phi}^2}{\phi}$ ، که تنها زمانی مهم است FRW به سرعت در حال تغییر باشد، معادله (63.3) یک میدان اسکالر گسترده را در پس زمینه نشان می دهد. در طول دوره تحت سلطه ماده ($T = -\rho$) سیال کیهانی به فرکانس نوسان اسکالر کمک می کند، در حالی که عبارت اصطکاک $3H\dot{\phi}$ یک میرایی تدریجی در دامنه آن است. در ساعات پایانی $T \approx 0$ علامت m_ϕ^2 تعیین می کند که آیا این میدان به سرعت در حال نوسان است یا به سرعت رشد می کند. این جنبه وابسته به مدل است و بعدا در نظر گرفته خواهد شد.

5-3 نظریه تعمیم یافته $f(\mathcal{R}, Q)$

در ابتدا کنش را معرفی می کنیم

$$S[g, \Gamma, \Psi_m] = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} f(\mathcal{R}, Q) + S_m[g, \Psi_m] d^4x. \quad (65.3)$$

که در آن $g_{\alpha\beta}$ نشان دهنده متریک فضا-زمان، هموستار $\Gamma_{\beta\nu}^\alpha$ که مستقل از متریک است. که در اینجا Ψ_m کنش ماده و $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ ، $Q = \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ انحنای پالاتینی است. تانسور ریچی $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\rho\nu}^\rho$ بر اساس رابطه زیر تعریف می شود

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma) = -\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda + \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho. \quad (66.3)$$

این تعریف از رابطه $[\nabla_\alpha, \nabla_\rho]\omega_\beta = \mathcal{R}^\delta_{\alpha\rho\beta}\omega_\delta$ پیروی می‌کند و برای هر مولفه مشتق ∇_α معتبر است [۴۷]. برای بدست آوردن معادلات میدان، باید با توجه به میدان‌های مختلف کنش را تغییر دهیم. از کنش نسبت به متریک و هموستار وردش می‌گیریم

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x (\delta\sqrt{-g}f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}\delta f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})) + \delta S_m. \quad (۶۷.۳)$$

وردش از بخش متریک آن به صورت

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f + 2f_Q\mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}^\alpha_\nu = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (۶۸.۳)$$

که در اینجا $f_Q \equiv \partial_Q f$ ، $f_{\mathcal{R}} \equiv \partial_{\mathcal{R}} f$ است. حال وردش نسبت به هموستار آن به صورت زیر است

$$\nabla_\beta[\sqrt{-g}(f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu} + 2f_Q\mathcal{R}^{\mu\nu})] = 0. \quad (۶۹.۳)$$

ما اکنون به دنبال یک راه حل برای حل مشکل معادله (۶۹.۳) هستیم.

در نگاه اول به معادله (۶۹.۳) به نظر می‌رسد که به خاطر وجود $f_{\mathcal{R}}$ و $f_Q\mathcal{R}^{\mu\nu}$ در معادله بسیار کم اهمیت (نابدیهی) می‌رسد. در حقیقت از آنجایی که \mathcal{R} و $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ توابعی برگرفته از هموستار و مشتق مرتبه اول آن هستند می‌توان معادله (۶۹.۳) را به عنوان معادله غیر خطی و دومین مولفه معادله از هموستار ناشناخته معرفی کرد. با این حال روابط جبری بین \mathcal{R} و $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ و تانسور انرژی تکانه با ماده وجود دارد که مساله را ساده‌تر می‌کند. برای نشان دادن الگوریتم اصلی که این معادله را حل می‌کند ابتدا بر روی حالتی تمرکز می‌کنیم که در آن $f_Q = 0$ است و تنها $f(\mathcal{R})$ وجود دارد.

۳-۶ روش متریکی برای حل معادلات $f(\mathcal{R})$

برای حل نظریه $f(\mathcal{R})$ روش‌های متفاوتی وجود دارد یک روش را که در ابتدای همین فصل توضیح دادیم تبدیل نظریه $f(\mathcal{R})$ به نظریه‌های اسکالر تانسوری می‌باشد روش دیگر با استفاده از متریک کمکی است که در ادامه به بررسی حالت خاص $f(\mathcal{R})$ و حالت $f(\mathcal{R}, Q)$ می‌پردازیم

۳-۶-۱ حالت خاص $f(\mathcal{R})$

در این مورد وردش نسبت به هموستار به صورت

$$\nabla_\beta[\sqrt{-g}(f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu})] = 0. \quad (۷۰.۳)$$

وردش نسبت به متریک آن به صورت

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}f = \kappa^{\nu}T_{\mu\nu}, \quad (71.3)$$

با تنجش گرفتن از این معادله

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R} - \frac{1}{2}f = \kappa^{\nu}T, \quad (72.3)$$

این عبارت یک معادله جبری است که رابطه $\mathcal{R} = -\kappa^{\nu}T$ از گرانش را به لاگرانژی اختیاری $f(\mathcal{R})$ تعمیم می‌دهد. این بدان معناست که با توجه به یک لاگرانژی معین، می‌گویند $f(R) = R + \alpha R^3$ ، معادله بالا را می‌توان به عنوان $R = \mathcal{R}(T)$ حل کرد. در این مثال خاص معادله فقط

$$-R + \alpha R^3 = \kappa^{\nu}T \quad (73.3)$$

است. باید توجه کرد که $R(T)$ در حال حاضر تابعی از ماده می‌باشد و به همین دلیل $f(\mathcal{R})$ و $f(R)$ نیز تابع ماده هستند. با توجه به این، رابطه (70.3) را می‌توان به عنوان معادله مرتبه اول برای هموستار که به متریک و ماده بستگی دارد، به این صورت مشاهده کرد

$$\nabla_{\beta}[\sqrt{-g}(f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}(T))g^{\mu\nu})] = 0. \quad (74.3)$$

اکنون در مورد چگونگی حل این مساله برای هموستار بحث می‌کنیم. در گرانش، این معادله به سادگی $\nabla_{\beta}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0$ است [48]. این راه حل از طریق نمادهای کریستوفل داده می‌شود

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{g^{\alpha\rho}}{2}(\partial_{\beta}g_{\rho\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\rho\beta} - \partial_{\rho}g_{\beta\gamma}), \quad (75.3)$$

حال برای پیدا کردن یک راه حل برای (74.3) می‌توانیم اینگونه عمل کنیم. فرض می‌کنیم که یک $h_{\mu\nu}$ وجود دارد که هموستار آن راه حل معادله (74.3) است که هموستار لیوی چپویتا از $h_{\mu\nu}$ است. این بدان معنی است که متریک $h_{\mu\nu}$ معیار $\partial_{\beta}[\sqrt{-h}h^{\mu\nu}] = 0$ را ارضا می‌کند. به عبارت دیگر حدس ما صدق می‌کند که

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}, \quad (76.3)$$

این معادله را با توجه به نمادهای ماتریسی به این گونه که $h_{\mu\nu} \rightarrow \hat{h}$ ، $h^{\mu\nu} \rightarrow \hat{h}^{-1}$ باشد در نتیجه خواهیم داشت

$$\sqrt{-h}\hat{h}^{-1} = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\hat{g}^{-1}. \quad (77.3)$$

اکنون با محاسبه کردن سمت چپ و راست معادله فوق بدست می‌آوریم که

$$(\sqrt{-h})^{\mathcal{F}} h^{-1} = (\sqrt{-g})^{\mathcal{F}} f_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} g^{-1}, \quad (78.3)$$

$$h = g f_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}}.$$

این نتیجه برمیگردد به معادله (77.3) که ما از آن بدست می‌آوریم $\hat{h}^{-1} = \frac{\hat{g}^{-1}}{f_{\mathcal{R}}}$ یا معادل آن ، $h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}} g_{\mu\nu}$ و $h^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{f_{\mathcal{R}}}$. بنابراین مشاهده می‌کنیم که متریک $h_{\mu\nu}$ که هموستار مستقل ما را تعریف می‌کند، وابسته به متریک فضا زمان $g_{\mu\nu}$ است.

در اینجا ما باید چندین شفاف سازی را انجام دهیم. اول از همه، از آنجایی که ما با دو متریک متفاوت سرو کار داریم، می‌توانیم یک تانسور ریچی متفاوت و دو انحنا اسکالر متفاوت بسازیم. انحنا متریک $g_{\mu\nu}$ متفاوت از $R(g) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g)$ تعریف می‌شود، در اینجا $R_{\mu\nu}(g)$ از تانسور ریچی ساخته شده است که مولفه‌های آن از هموستار لوی چویتا $g_{\mu\nu}$ بدست می‌آید. مشابه با آن ما می‌توانیم با استفاده از انحنا اسکالر نسبت به متریک $h_{\mu\nu}$ و تنجش $R(h) = h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ، و معادل آن $h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)$ ، در اینجا Γ هموستار لوی چویتا از $h_{\mu\nu}$ است. اکنون، در معادلات بالا ما با چیزی متفاوت تر از $R(g)$ و $R(h)$ سروکار داریم. آنچه که ما در اینجا R یا $R(T)$ می‌نامیم یک مولفه دوگانه، که حاصل تنجش $h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)$ است که تعریف شده از یک هموستار مستقل از طریق $R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(h)$ و متریک فضا زمان $g^{\mu\nu}$ است. در تمامی فرمول‌های قبلی ما با مولفه \mathcal{R} سرو کار داریم که تابعی از ماده و رد گرفتن از T است. هرگاه \mathcal{R} را می‌نویسیم تابعی از ماده است. در هر مورد دیگر، ما $R(g)$ یا $R(h)$ را می‌نویسیم.

برای کامل کردن این مبحث در حال حاضر بر روی معادله‌ای برای متریک تمرکز می‌کنیم. به منظور نوشتن معادله مرتبه دوم برای متریک، ما باید نتیجه راه حلی را که برای هموستار معرفی کردیم را در معادله (71.3) گذاشته و بر حسب $R_{\mu\nu}(h)$ با $g_{\mu\nu}$ بازنویسی می‌کنیم. از آنجایی که g و \hat{h} با هم مرتبط هستند، ارتباط $R_{\mu\nu}(h)$ با $R_{\mu\nu}(g)$ بسیار آسان است [47]. نتیجه معادله (71.3) به صورت زیر می‌شود

$$G_{\mu\nu}(g) = \frac{\kappa^2}{f_{\mathcal{R}}} T_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{R} f_{\mathcal{R}} - f}{2 f_{\mathcal{R}}} g_{\mu\nu} + \frac{1}{f_{\mathcal{R}}} (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f_{\mathcal{R}} - g_{\mu\nu} \square f_{\mathcal{R}}) - \frac{3}{2 f_{\mathcal{R}}^2} \left(\partial_{\mu} f_{\mathcal{R}} \partial_{\nu} f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (f_{\mathcal{R}})^2 \right). \quad (79.3)$$

در اینجا ∇_{μ} مشتق هموردای $g_{\mu\nu}$ است.

درسی که باید در اینجا یاد بگیریم این است که طرف راست (80.3) شبیه به تانسور انرژی تکانه اصلاح شده رفتار می‌کند که در آن رد گرفتن از T در گرانس از طریق اصلاحات \mathcal{R} ، $f(\mathcal{R})$ و مشتقات مختلف از $f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})$ نقش ندارد. وقتی T ثابت باشد، تمام عبارتهای $\partial_{\mu} f$ ناپدید می‌شوند و پایین ترین حد

معادلات از گرانش به اضافه یک ثابت کیهان شناسی موثر به وسیله $\frac{\mathcal{R}f_R - f}{2f_R}$ با T ثابت ارزیابی می‌شود.

۲-۶-۳ حل مساله به طور کلی $f(\mathcal{R}, Q)$

ما برای حل معادلات با محدودیتی روبرو هستیم که از معادله (۶۹.۳) ناشی می‌شود این پیچیدگی ذاتی مشکلات را افزایش می‌دهد. برای رفع این مشکل در مرحله اول باید یک رابطه جبری بین R و $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ با منبع ماده پیدا کنیم. این به ما اجازه می‌دهد که معادله (۶۹.۳) را به عنوان معادله مرتبه اول برای هموستار، دوباره تفسیر کنیم. برای ادامه ابتدا ماتریس \hat{P} که مولفه آن $P_\mu^\nu \equiv \mathcal{R}_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}$ است را تعریف می‌کنیم. اکنون دوباره معادله (۶۷.۳) را با توجه به تعریف جدید بازنویسی می‌کنیم

$$f_{\mathcal{R}}P_\mu^\nu - \frac{f}{4}\delta_\mu^\nu + 2f_Q P_\mu^\alpha P_\alpha^\nu = \kappa^2 T_\mu^\nu. \quad (۸۰.۳)$$

که فرم ماتریسی معادله بالا به صورت زیر است

$$2f_Q \hat{P}^2 + f_{\mathcal{R}} \hat{P} - \frac{f}{4} \hat{I} = \kappa^2 \hat{T}. \quad (۸۱.۳)$$

که در اینجا \hat{T} نمایش ماتریسی T_μ^ν است. باید توجه کرد که \mathcal{R} و Q به ترتیب برابر با حاصل رد گرفتن از \hat{P} و \hat{P}^2 می‌باشند. حل این معادلات منجر به یک رابطه بین $\hat{P} = \hat{P}(\hat{T})$ که مشابه آن برابر با حاصل $\mathcal{R}(T)$ از $f(R)$ می‌باشد. در حال حاضر ما به شکل ویژه این حل که به مدل خاص انتخاب شده بستگی دارد، اهمیتی نمی‌دهیم و فقط فرض می‌کنیم که آن وجود دارد. این همان چیزی است که ما نیاز داریم تا معادله (۶۹.۳) را به عنوان یک معادله مرتبه اول برای هموستار دوباره تفسیر کنیم. بنابراین راه حل ما باید به متریک $g_{\mu\nu}$ و $T_{\mu\nu}$ از ماده بستگی داشته باشد [۴۹].

ما اکنون یک حدس از همان فرم بالا را پیشنهاد می‌دهیم. مابه دنبال معیارهایی از همین قبیل هستیم که در آن $\nabla_\beta[\sqrt{-h}h^{\mu\nu}] = 0$ باشد. این نشان می‌دهد که ما می‌خواهیم \hat{h} به گونه‌ای باشد که هموستار آن از نوع هموستار لیوی چویتا باشد. که فرم ماتریسی آن به شکل

$$\sqrt{-h}\hat{h}^{-1} = \sqrt{-g}\hat{g}^{-1}(f_{\mathcal{R}}\hat{I} + 2f_Q\hat{P}), \quad (۸۲.۳)$$

حالا درمینال‌های سمت چپ و راست را حساب می‌کنیم که $\hat{h} = gdet(f_{\mathcal{R}}\hat{I} + 2f_Q\hat{P})$ است. ما از قبل به صورت واضح می‌دانیم که برای بیان \hat{P} قادر به محاسبه این عامل تعیین کننده خواهیم بود. با جایگذاری \hat{h} در معادله بالا خواهیم داشت

$$\sqrt{-gdet(f_{\mathcal{R}}\hat{I} + 2f_Q\hat{P})}\hat{h}^{-1} = \sqrt{-g}\hat{g}^{-1}(f_{\mathcal{R}}\hat{I} + 2f_Q\hat{P}), \quad (۸۳.۳)$$

سپس با ساده سازی در نهایت بدست می‌آوریم

$$\hat{h}^{-1} = \frac{\hat{g}^{-1}\hat{\Sigma}}{\sqrt{\det\hat{\Sigma}}}. \quad (۸۴.۳)$$

که در معادله بالا $\hat{\Sigma} = (f_{\mathcal{R}}\hat{I} + ۲f_Q\hat{P})$ است. معکوس معادله فوق برابر است با

$$\hat{h} = \left(\sqrt{\det\hat{\Sigma}}\right)\hat{\Sigma}^{-1}\hat{g}, \quad (۸۵.۳)$$

بنابراین ما نشان دادیم که هموستار تئوری‌های $f(\mathcal{R}, Q)$ را می‌توان به صورت صریح از نظر فیزیکی متریک $g_{\mu\nu}$ و منابع ماده حل کرد. برای ادامه باید انتخاب‌های خاص را برای مدل‌های $T_{\mu\nu}$ در حالت خاص در نظر بگیریم.

۷-۳ $f(\mathcal{R}, Q)$ با یک سیال کامل

در حال حاضر موردی را در نظر می‌گیریم که در آن $T_{\mu}^{\nu} = \Pi\delta_{\mu}^{\nu} + (\rho + \Pi)u_{\mu}u^{\nu}$ ، در اینجا دلیل انتخاب Π که نشان دهنده فشار است برای جلوگیری از اشتباه گرفتن با ماتریس \hat{P} است. اولین کاری که ما باید بکنیم این است که ماتریس $\hat{\Sigma}$ و معکوس آن را محاسبه کنیم. زیرا این به ما این اجازه را می‌دهد تا \hat{h} و \hat{h}^{-1} را محاسبه کنیم. برای یافتن $\hat{\Sigma}$ ابتدا باید مقدار \hat{P} را بیابیم. برای انجام این کار ابتدا باید معادله (۸۱.۳) را به صورت زیر به مربع کامل تبدیل کنیم

$$\begin{aligned} ۲f_Q\hat{P}^2 + ۴f_Q\frac{f_{\mathcal{R}}\hat{P}}{۴f_Q}\hat{I} + ۲f_Q\frac{f_{\mathcal{R}}^2}{۱۶f_Q^2}\hat{I} &= \frac{f}{۲}\hat{I} + \kappa^2 T - \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{۸f_Q}\hat{I}, \\ ۲f_Q\left(\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{۴f_Q}\hat{I}\right)^2 &= \frac{f}{۲}\hat{I} + \kappa^2 T + \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{۸f_Q}\hat{I}. \end{aligned} \quad (۸۶.۳)$$

اکنون T را در معادله فوق جایگذاری می‌کنیم

$$۲f_Q\left(\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{۴f_Q}\hat{I}\right)^2 = \frac{f}{۲}\hat{I} + \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{۸f_Q}\hat{I} + \kappa^2(\Pi\delta_{\mu}^{\nu} + (\rho + \Pi)u_{\mu}u^{\nu}). \quad (۸۷.۳)$$

با ساده سازی خواهیم داشت

$$۲f_Q\left(\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{۴f_Q}\hat{I}\right)^2 = \left(\frac{f}{۲} + \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{۸f_Q} + \kappa^2\Pi\right)\hat{I} + \kappa^2(\rho + \Pi)u_{\mu}u^{\nu}. \quad (۸۸.۳)$$

در نهایت با نامگذاری به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$۲f_Q\hat{M}^2 = \alpha\hat{I} + \beta u_{\mu}u^{\nu}. \quad (۸۹.۳)$$

باید به دنبال راه حلی به این شکل باشیم

$$\sqrt{2f_Q}\hat{M} = \lambda\hat{I} + \hat{\Sigma}u_\mu u^\nu, \quad (90.3)$$

در اینجا فرض شده است که $f_Q > 0$ است. حالا می‌توانیم برای بدست آوردن رابطه بین (α, β) و $(\lambda, \hat{\Sigma})$ مربع این ماتریس را بدست آوریم که به صورت زیر است

$$\begin{aligned} 2f_Q\hat{M}^2 &= (\lambda\delta_\mu^\nu + \hat{\Sigma}u_\mu u^\nu)(\lambda\delta_\mu^\rho + \hat{\Sigma}u_\nu u^\rho), \quad (91.3) \\ 2f_Q\hat{M}^2 &= (\lambda^2\hat{I} + \hat{\Sigma}^2 n_u u_\mu u^\nu + 2\lambda\hat{\Sigma} u_\mu u^\nu). \end{aligned}$$

که در اینجا $n_u = u_\mu u^\mu$ که بردار نرمال u_μ است، برای سیال کامل $n_u = -1$ می‌باشد. با برابر قرار دادن هر دو معادله به صورت زیر می‌توانیم رابطه بین مجهولات را بدست آوریم

$$(\lambda^2\hat{I} + \hat{\Sigma}^2 n_u u_\mu u^\nu + 2\lambda\hat{\Sigma} u_\mu u^\nu) = \alpha\hat{I} + \beta u_\mu u^\nu, \quad (92.3)$$

از مقایسه دو طرف تساوی داریم که

$$\alpha = \lambda^2, \quad (93.3)$$

$$\hat{\Sigma} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \beta}.$$

اگر $f_Q < 0$ باشد همان روش استفاده می‌شود فقط باید در نظر گرفت که در اینجا $f_Q \rightarrow +|f_Q|$ ، $\alpha \rightarrow -\alpha$ و $\beta \rightarrow -\beta$ اعمال شود. سپس ماتریس را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\hat{\Sigma}_\mu^\nu = \Lambda_1 \delta_\mu^\nu + \Lambda_2 u_\mu u^\nu. \quad (94.3)$$

برای پیدا کردن ضرایب ابتدا باید \hat{P} را از معادله (90.3) حساب کنیم

$$P = \frac{\lambda}{\sqrt{2f_Q}}\hat{I} - \frac{f_R}{4f_Q} + \frac{\hat{\Sigma}}{\sqrt{2f_Q}}u_\mu u^\nu. \quad (95.3)$$

اکنون معادله بالا را در $\hat{\Sigma}$ جایگذاری می‌کنیم

$$\hat{\Sigma}_\mu^\nu = \left(\frac{f_R}{2} + \sqrt{2f_Q}\lambda \right) \hat{I} + \sqrt{2f_Q}\hat{\Sigma}u_\mu u^\nu. \quad (96.3)$$

هر دو معادله را با هم برابر قرار می‌دهیم

$$\left(\frac{f_R}{2} + \sqrt{2f_Q}\lambda \right) \hat{I} + \sqrt{2f_Q}\hat{\Sigma}u_\mu u^\nu = \Lambda_1 \delta_\mu^\nu + \Lambda_2 u_\mu u^\nu, \quad (97.3)$$

اکنون مقدار مجهولات را بدست می‌آوریم

$$\Lambda_1 = \frac{f_{\mathcal{R}}}{\Upsilon} + \sqrt{2f_Q}\lambda, \quad (98.3)$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{2f_Q}\hat{\Sigma}.$$

دترمینان ماتریس شکل (85.3) را می‌توان به طور مستقیم با استفاده از تعریف $\hat{M} = \epsilon_{abcd}M^a M_1^b M_2^c M_3^d$ محاسبه کرد

$$\det\hat{\Sigma} = \Lambda_1^2(\Lambda_1 + n_u\Lambda_2). \quad (99.3)$$

معکوس $(\hat{\Sigma}^{-1})^\nu_\mu$ به شکل

$$(\hat{\Sigma}^{-1})^\nu_\mu = \frac{1}{\Lambda_1}\delta^\nu_\mu - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{1}{(\Lambda_1 + \Lambda_2 n_u)} u_\mu u^\nu, \quad (100.3)$$

اکنون با استفاده از معادله (84.3) و جایگذاری معادله فوق در آن می‌توانیم متریک را به صورت زیر حساب کنیم

$$h_{\mu\nu} = \sqrt{\det\hat{\Sigma}} \left(\frac{1}{\Lambda_1} g_{\mu\nu} - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \frac{1}{(\Lambda_1 + \Lambda_2 n_u)} u_\mu u^\nu \right), \quad (101.3)$$

که با فاکتور گیری از $\frac{1}{\Lambda_1}$ و

$$h_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\det\hat{\Sigma}}}{\Lambda_1} \left(g_{\mu\nu} - \frac{\Lambda_2}{(\Lambda_1 + \Lambda_2 n_u)} u_\mu u^\nu \right), \quad (102.3)$$

با معرفی $\Omega = \frac{\sqrt{\det\hat{\Sigma}}}{\Lambda_1}$ و جایگذاری ثابت‌ها خواهیم داشت

$$h_{\mu\nu} = \Omega \left[g_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{2f_Q}\hat{\Sigma}}{[\sqrt{2f_Q}(\lambda + \frac{f_{\mathcal{R}}}{\Upsilon})]} u_\mu u^\nu \right], \quad (103.3)$$

با استفاده از معادله (84.3) و جایگذاری $\hat{\Sigma}$ در آن خواهیم داشت

$$h^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\det\hat{\Sigma}}} (\Lambda_1 g^{\mu\nu} + \Lambda_2 u^\mu u_\nu), \quad (104.3)$$

برای تشکیل Ω از Λ_1 فاکتور می‌گیریم که به شکل زیر می‌شود

$$h^{\mu\nu} = \frac{\Lambda_1}{\sqrt{\det\hat{\Sigma}}} \left(g^{\mu\nu} + \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} u^\mu u_\nu \right). \quad (105.3)$$

با جایگذاری و ساده سازی خواهیم داشت

$$h^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega} \left[g^{\mu\nu} + \frac{\sqrt{2f_Q}\hat{\Sigma}}{\sqrt{2f_Q}\lambda + \frac{f_{\mathcal{R}}}{\Upsilon}} u^\mu u_\nu \right], \quad (106.3)$$

در اینجا $\Omega = \frac{\sqrt{\det\hat{\Sigma}}}{\Lambda_1}$ است. لازم به ذکر است که در حدهای $f_Q \rightarrow 0$ و $\hat{\Sigma} \rightarrow 0$ مشاهده می‌کنیم که علامت مثبت در مقابل ریشه (94.3) قرار گرفته می‌شود، که معادله‌های $f(\mathcal{R})$ را بهبود می‌بخشد.

۸-۳ معادلات میدان و Λ_{eff}

برای پیدا کردن معادلات میدان برای متریک معادله زیر را یادآوری می‌کنیم

$$\Upsilon f_Q P_\mu^\alpha P_\alpha^\nu + f_{\mathcal{R}} P_\mu^\nu - \frac{f}{\Upsilon} \delta_\mu^\nu = \kappa^\Upsilon T_\mu^\nu. \quad (107.3)$$

با فاکتور گرفتن از P_μ^α خواهیم داشت

$$P_\mu^\alpha (\Upsilon f_Q P_\alpha^\nu + f_{\mathcal{R}}) = \kappa^\Upsilon T_\mu^\nu + \frac{f}{\Upsilon} \delta_\mu^\nu. \quad (108.3)$$

که در نهایت با توجه به $\hat{\Sigma}_\nu^\alpha = \Upsilon f_Q P_\alpha^\nu + f_{\mathcal{R}}$ داریم

$$P_\mu^\alpha (\hat{\Sigma})_\alpha^\beta = \kappa^\Upsilon T_\mu^\nu + \frac{f}{\Upsilon} \delta_\mu^\nu, \quad (109.3)$$

سپس P_μ^α را تنها می‌کنیم و با تنجش گرفتن از رابطه بالا بدست می‌آوریم که

$$P_\mu^\alpha = (\kappa^\Upsilon T_\mu^\alpha + \frac{f}{\Upsilon} \delta_\mu^\alpha) (\hat{\Sigma}^{-1})_\alpha^\beta g_{\beta\nu}, \quad (110.3)$$

در نتیجه با جایگذاری $P_\mu^\alpha = R_{\mu\nu} g^{\nu\alpha}$ معادله به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma) = (\kappa^\Upsilon T_\mu^\alpha + \frac{f}{\Upsilon} \delta_\mu^\alpha) (\hat{\Sigma}^{-1})_\alpha^\beta g_{\beta\nu} \equiv \tau_{\mu\nu}. \quad (111.3)$$

حال با جای گذاری T و معادله (۱۰۰.۳) خواهیم داشت

$$\left((\kappa^\Upsilon \Pi \delta_\mu^\alpha + \kappa^\Upsilon (\rho + \Pi) u_\mu u^\alpha) \left(\frac{f}{\Upsilon} \delta_\mu^\alpha \right) \right) \left(\frac{1}{\Lambda_1} \delta_\alpha^\beta - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1 (\Lambda_1 + \Lambda_2 n_u)} u_\alpha u^\beta \right) g_{\beta\nu}, \quad (112.3)$$

با باز کردن خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^\Upsilon \Pi + \frac{f}{\Upsilon} \delta_\mu^\alpha \delta_\alpha^\beta g_{\beta\nu}}{\Lambda_1} - \frac{(\kappa^\Upsilon \Pi + \frac{f}{\Upsilon}) \Lambda_2}{\Lambda_1 (\Lambda_1 + \Lambda_2 n_u)} u_\alpha u^\beta g_{\beta\nu} \delta_\mu^\alpha \\ & + \frac{\kappa^\Upsilon (\rho + \Pi)}{\Lambda_1} u_\mu u^\alpha \delta_\alpha^\beta g_{\beta\nu} - \frac{\kappa^\Upsilon (\rho + \Pi) \Lambda_2}{\Lambda_1 (\Lambda_1 + \Lambda_2 n_u)} u_\mu u^\alpha u_\alpha u^\beta g_{\beta\nu}, \end{aligned} \quad (113.3)$$

با مخرج مشترک گرفتن و ساده سازی و با در نظر گرفتن $n_u = -1$ خواهیم داشت

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{(\frac{f}{\Upsilon} + \kappa^\Upsilon \Pi)}{\Lambda_1} g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda_1 \kappa^\Upsilon (\rho + \Pi) - \Lambda_2 (\frac{f}{\Upsilon} + \kappa^\Upsilon \Pi)}{\Lambda_1 (\Lambda_1 - \Lambda_2)} u_\mu u_\nu, \quad (114.3)$$

معادلات میدان با متریک $g_{\mu\nu}$ را اکنون می‌توان از معادله (۱۱۱.۳) توسط هموستار $\Gamma(h)$ در یک دوره از $g_{\mu\nu}$ و ماده با استفاده از معادلات (۱۰۳.۳) و (۱۰۶.۳) بدست آورد. در مورد تئوری‌های

$f(\mathcal{R})$ این فرایند منجر به معادله (۸۰.۳) می‌شود. (از قبل می‌دانیم که معادلات میدان‌های $f(\mathcal{R})$ در زمانی که $f_Q \rightarrow 0$ میل کند در معادله (۸۰.۳) علامت مثبت ریشه دوم رو به افزایش است. در مورد نظریه‌های $f(\mathcal{R}, Q)$ ما راحت‌تر می‌توان با معادله (۱۱۱.۳) کار کنیم. نمونه‌هایی از این کاربردها در منبع [۴۹] بررسی شده است.

اکنون مقدار ثابت موثر کیهان‌شناسی Λ_{eff} از یک تئوری کلی $f(\mathcal{R}, Q)$ که در شرایط خلا می‌باشد را بررسی می‌کنیم. باید توجه داشت که محاسبات را نسبت به همان حد انتخاب شده برای $f(\mathcal{R})$ که معادله (۱۱۱.۳) را بهبود می‌بخشید برای خلا برابر است با

$$\mathcal{R}_{\mu}^{\nu}(\Gamma)_{vac} = \frac{f}{2\Lambda_1} |_{\rho, \Pi=0} \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (115.3)$$

از آنجا که در خلا رابطه بین $h_{\mu\nu}$ و $g_{\mu\nu}$ یک فاکتور پایدار $h_{\mu\nu} = \Omega |_{\rho, \Pi=0} g_{\mu\nu}$ با

$$\Omega |_{\rho, \Pi=0} = \Lambda_1 |_{\rho, \Pi=0}. \quad (116.3)$$

در نتیجه به دنبال آن داریم که $\mathcal{R}(\Gamma)_{vac} = \mathcal{R}_{\mu\nu}(g)_{vac}$ ، که نشان می‌دهد

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma)_{vac} = \frac{f}{2\Lambda_1} |_{\rho, \Pi=0} g_{\mu\nu} = \Lambda_{eff} g_{\mu\nu}. \quad (117.3)$$

این معادله نشان می‌دهد که در آن Λ_{eff} نتیجه ارزیابی یک لاگرانژی f در خلا از یک فاکتور $\frac{1}{2\Lambda}$ می‌باشد. حالا با رد گرفتن از معادله (۸۱.۳) برای خلا می‌بینیم که $\frac{f}{4} = \frac{(f\mathcal{R}\mathcal{R} + 2Qf_Q)}{4}$ است. یک حدس دیگر ما این است که لاگرانژی f در انحنای ضعیف گرانش را نتیجه دهد، که اشاره می‌کند برای خلا $f_{\mathcal{R}} \rightarrow 1$ باشد و به دنبال آن برای بدست آوردن Λ_{eff} غیر صفر ما باید $\mathcal{R}_{vac} \neq 0$ یا $f_Q \neq 0$ و یا ترکیبی از هر دو را داشته باشیم. در هر صورت، ما می‌بینیم که گنجاندن واژه‌های وابسته به Q در لاگرانژی مکانیسم‌های جدیدی را علاوه بر آن‌هایی که در تیوری های $f(\mathcal{R})$ وجود دارند برای تولید ثابت کیهان‌شناسی غیر صفر ارایه می‌کند.

۹-۳ حل برای $Q = Q(\rho, \Pi)$ ، $R = \mathcal{R}(\rho, \Pi)$

برای مطالعه پیش‌بینی فیزیکی نظریه‌های مطرح‌شده در اینجا، ما باید مدل‌های خاص را مشخص کنیم. هنگامی که یک مدل خاص انتخاب می‌شود اولین مشکل پیدا کردن رابطه بین $R = \mathcal{R}(\rho, \Pi)$ و $Q = Q(\rho, \Pi)$ است زیرا می‌تواند معادلات غیر خطی با راه حل‌های چندگانه را شامل شود. در اصل، تنها به دو معادله مستقل مربوط به \mathcal{R} و Q با ρ و Π نیاز داریم، اما مشخص نخواهد بود که چطور دو معادله را ایجاد کنیم تا مساله را به صورت تحلیلی انعطاف پذیر بیان کنیم. در اینجا ما

محدودیت هایی را در مورد لاگرانژی برای ساده سازی و حل این مشکل اعمال می کنیم. ما تابع $f(\mathcal{R}, Q)$ را به صورت $f(\mathcal{R}, Q) = \tilde{f}(\mathcal{R}) + \frac{\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}}{\mathcal{R}_p}$ در نظر می گیریم که در اینجا \mathcal{R}_p یک ثابت از مرتبه انحنای پلانک است. دلیل این انتخاب زمانی مشخص می شود که از رابطه زیر استفاده کنیم

$$2Qf_Q + \mathcal{R}f_{\mathcal{R}} - 2f = \kappa^2 T. \quad (118.3)$$

این معادله \mathcal{R} و Q را با T مرتبط می کند. با جایگذاری $f(\mathcal{R}, Q)$ خواهیم داشت

$$\frac{2\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}}{\mathcal{R}_p} + \mathcal{R}\tilde{f}_{\mathcal{R}} - 2\tilde{f}(\mathcal{R}) - \frac{2\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}}{\mathcal{R}_p} = \kappa^2 T. \quad (119.3)$$

در نهایت با ساده سازی

$$\mathcal{R}\tilde{f}_{\mathcal{R}} - 2\tilde{f}(\mathcal{R}) = \kappa^2 T, \quad (120.3)$$

که در نهایت همان حالت در نظریه های $f(\mathcal{R})$ است، و اشاره دارد که $R = R(T)$ است. اما همچنان باید $Q = Q(\rho, \Pi)$ را بدست آوریم

$$\sqrt{2f_Q} \left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right) = 3\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \beta}. \quad (121.3)$$

اکنون با به توان ۲ رساندن معادله بالا خواهیم داشت

$$\left[\sqrt{2f_Q} \left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right) - 3\lambda \right]^2 = \lambda^2 - \beta. \quad (122.3)$$

با باز کردن و معادله بالا خواهیم داشت

$$8\lambda^2 - 6\sqrt{2f_Q} \left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right) \lambda + \beta + 2f_Q \left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right)^2 = 0. \quad (123.3)$$

با توجه به جواب معادلات جبری λ را بدست می آوریم

$$\lambda = \frac{\sqrt{2f_Q}}{8} \left[3 \left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right) \pm \sqrt{\left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right)^2 - \frac{4\beta}{f_Q}} \right]. \quad (124.3)$$

با انتخاب ما از $f(\mathcal{R}, Q)$ می بینیم که سمت راست معادله تنها وابسته به ثابت $f_Q = \frac{1}{\mathcal{R}_p}$ است. اکنون می توانیم با نگاه کردن به معادلات (۸۸.۳)، (۸۹.۳) و (۹۰.۳) برای حل Q به عنوان تابعی از

$\rho, R(T)$ و Π بدست آوریم

ابتدا معادله (۱۲۴.۳) را به توان ۲ می‌رسانیم

$$\lambda^2 = \frac{2f_Q}{64} \left[3 \left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right) \pm \sqrt{\left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right)^2 - \frac{4\beta}{f_Q}} \right]^2, \quad (125.3)$$

اکنون معادله را در f_Q ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$\lambda^2 = \frac{f_Q^2}{32f_Q} \left[3 \left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right) \pm \sqrt{\left(\mathcal{R} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{f_Q} \right)^2 - \frac{4\beta}{f_Q}} \right]^2, \quad (126.3)$$

ضرب را انجام می‌دهیم و f_Q و β را جایگذاری می‌کنیم

$$\lambda^2 = \frac{1}{32f_Q} \left[3(\mathcal{R}f_Q + f_{\mathcal{R}}) \pm \sqrt{(\mathcal{R}f_Q + f_{\mathcal{R}})^2 - 4\beta f_Q} \right]^2, \quad (127.3)$$

$$\lambda^2 = \frac{\mathcal{R}_P}{32} \left[3 \left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} + \tilde{f}_{\mathcal{R}} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} + \tilde{f}_{\mathcal{R}} \right)^2 - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{\mathcal{R}_P}} \right]^2, \quad (128.3)$$

از طرفی با توجه به معادله (۸۸.۳) داریم که

$$\lambda^2 = \frac{f}{2} + \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{8f_Q} + \kappa^2 \Pi, \quad (129.3)$$

که در معادله فوق تعریف جدید $f(\mathcal{R}, Q)$ را جایگذاری می‌کنیم

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{f}(\mathcal{R})}{2} + \frac{\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}}{2\mathcal{R}_P} + \frac{\tilde{f}_{\mathcal{R}}^2}{8f_Q} + \kappa^2 \Pi, \quad (130.3)$$

معادله (۱۲۸.۳) را با معادله (۱۳۰.۳) برابر قرار می‌دهیم. در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{Q}{2\mathcal{R}_P} = - \left(\kappa^2 \Pi + \frac{\tilde{f}(\mathcal{R})}{2} + \frac{\tilde{f}_{\mathcal{R}}^2}{8f_Q} \right), \quad (131.3)$$

$$+ \frac{\mathcal{R}_P}{32} \left[3 \left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} + \tilde{f}_{\mathcal{R}} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} + \tilde{f}_{\mathcal{R}} \right)^2 - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{\mathcal{R}_P}} \right]^2,$$

در ادامه به مثال $\frac{a\mathcal{R}^2}{\mathcal{R}_P} + \frac{Q}{\mathcal{R}_P} = f(\mathcal{R}, Q)$ توجه می‌کنیم. اگر در این مثال $a = -\frac{1}{2}$ باشد،

$\tilde{f}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - \frac{\mathcal{R}^2}{2\mathcal{R}_P}$ است. با بدست آوردن $\tilde{f}_{\mathcal{R}} = 1 - \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P}$ و جایگذاری در معادله (۱۳۲.۳)

خواهیم داشت که

$$\frac{Q}{2\mathcal{R}_P} = - \left(\kappa^2 \Pi + \frac{\mathcal{R}}{2} + \frac{\mathcal{R}^2}{4\mathcal{R}_P} + \frac{\mathcal{R}_P}{\lambda} \left(1 + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} \right)^2 \right) \quad (132.3)$$

$$+ \frac{\mathcal{R}_P}{32} \left[3 \left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} + 1 - \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} + 1 - \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_P} \right)^2 - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{\mathcal{R}_P}} \right]^2.$$

در نتیجه با ساده سازی خواهیم داشت

$$\frac{Q}{2\mathcal{R}_P} = - \left(\kappa^2 \Pi + \frac{\mathcal{R}}{2} - \frac{\mathcal{R}^2}{4\mathcal{R}_P} + \frac{\mathcal{R}_P}{\lambda} + \frac{\mathcal{R}^2}{\lambda \mathcal{R}_P} - \frac{\mathcal{R}}{4} \right) \quad (133.3)$$

$$+ \frac{\mathcal{R}_P}{32} \left[3(1) \pm \sqrt{1 - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{\mathcal{R}_P}} \right]^2,$$

با به توان ۲ رساندن معادله فوق داریم

$$\frac{Q}{2\mathcal{R}_P} = - \kappa^2 \Pi - \frac{\mathcal{R}}{4} + \frac{\mathcal{R}^2}{\lambda \mathcal{R}_P} - \frac{\mathcal{R}_P}{\lambda} \quad (134.3)$$

$$+ \frac{\mathcal{R}_P}{32} \left[9 + 1 - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{\mathcal{R}_P} - 6 \sqrt{1 - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{\mathcal{R}_P}} \right],$$

در نهایت با ساده سازی و تنها کردن Q بدست می آوریم که

$$Q = \frac{3\mathcal{R}_P^2}{\lambda} \left[1 - \frac{16\kappa^2 \Pi}{3\mathcal{R}_P} - \frac{4\mathcal{R}}{3\mathcal{R}_P} + \frac{2\mathcal{R}^2}{3\mathcal{R}_P^2} - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{6\mathcal{R}_P} - \sqrt{1 - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{\mathcal{R}_P}} \right], \quad (135.3)$$

در نتیجه با جایگذاری $T = (\rho - 3\Pi)$ ، $\mathcal{R} = -k^2 T$ و ساده سازی خواهیم داشت که

$$Q = \frac{3\mathcal{R}_P^2}{\lambda} \left[1 - \frac{2\kappa^2(\rho + \Pi)}{\mathcal{R}_P} + \frac{2\kappa^2(\rho - 3\Pi)^2}{3\mathcal{R}_P^2} - \sqrt{1 - \frac{4(\kappa^2(\rho + \Pi))}{\mathcal{R}_P}} \right]. \quad (136.3)$$

۱۰-۳ نتیجه گیری

در بخش اول این فصل ما مجموعه ای از کنش های گرانش اصلاح شده را در نظر گرفتیم. در اینجا اصلاحات توسط تابعی از اسکالر ریچی در هموستار کنش اینشتین هیلبرت از یک هموستار مستقل

در نظر گرفته شده است. ما نشان دادیم که این تئوری را می‌توان به اسکالر-تانسوری تبدیل کرد که دارای یک مکانیسم جدید برای عبور از سیستم خورشیدی است. حتی اگر میدان اسکالر ما نور گونه باشد. اگر دامنه کیهانی ϕ به اندازه کافی کوچک باشد $|\phi| \ll 1$ در نتیجه یک میدان اسکالر دور برد که قادر است بر پویایی کیهان و کهکشان تاثیر بگذارد میتواند با پویایی منظومه شمسی نیز سازگار باشد.

تکامل زمان اولیه نیز مطابق با فاز ناشناخته شده از تابش و دینامیک ماده به نظر می‌رسد. پتانسیل شامل پارامتر تعیین بزرگی تصحیح درجه دوم است. بنابراین یک تحلیل کمی از شکل گیری ساختار زمینه کیهانی می‌تواند برای آزمایش قابلیت حیات این مدل‌ها و سایر مدل‌ها مورد استفاده قرار گیرد. قبل از نتیجه گیری به این نکته اشاره می‌کنیم که پتانسیل به شکل

$$\Phi = -GM[1 + \alpha \cdot \exp(\frac{-r}{r_0})]/(1 + \alpha)r \quad (137.3)$$

با $\alpha = 0.9$ و $r_0 \approx 30 \text{ kpc}$ در منبع $[50]$ توصیف بسیار خوبی از منحنی چرخش مسطح نمونه قابل توجهی از کهکشان‌ها ارائه می‌دهد. شکل پتانسیل‌های میدانی ضعیف مدل دوگانه متریک پالاتینی که در این اثر در نظر گرفته می‌شود یک شباهت رسمی جالب با این پیشنهاد را به اشتراک می‌گذارد. بنابراین علاوه بر عبور از محدودیت‌های سیستم خورشیدی تئوری در نظر گرفته شده در این کار ممکن است احتمالات جدیدی را برای رویکرد در همان چارچوب نظری از هر دو مشکل ماده تاریک و انرژی تاریک باز کند. همچنین چند جمله‌ای نظیر تکنیکی‌های آینده در منبع $[51]$ مطالعه جالبی در نظریه دوگانه خواهند بود.

در بخش دوم معادلات میدان تئوری گرانش در پالاتینی را که در آن لاگرانژی یک تابع به شکل $f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})$ است را بررسی کردیم. ما نشان دادیم که هموستار مستقل را می‌توان به صورت هموستار لوی چی وی تا یک متریک کمکی که به متریک فیزیکی $g_{\mu\nu}$ و تانسور انرژی - تکانه با استفاده از یک تبدیل مرتبه بالاتر یا زمانی که ماده به عنوان یک سیال کامل توصیف می‌شود طبق تبدیلات هم‌مدیس تبدیل کرد در نتیجه وابستگی به $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ از بین می‌رود. ظهور دو معیار مربوط به یک تبدیل مرتبه بالاتر، یک نیاز اساسی از نظریه‌های گرانشی $MOND$ تئوری برای توضیح درست طول گرانشی، می‌تواند این نظریه‌ها را برای در نظر گرفتن مسایل مربوط به ماده تاریک جالب کند.

ما همچنین نشان دادیم که در تئوری‌های پالاتینی $f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})$ اسکالر \mathcal{R} و $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ را می‌توان به طور کلی به عنوان توابعی از ρ و Π نوشت اما نه لزوماً از طریق رد گرفتن از T . در نتیجه پدیده شناسی این نظریه‌ها بسیار غنی‌تر از نظریه‌های جداگانه $f(\mathcal{R})$ و $f(\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})$ است. علاوه بر این برای برخی از مدل‌های ساده ما به صراحت نشان داده‌ایم که اسکالر $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ حدود را برای محدوده فیزیکی ρ و P_i در دسترس قرار می‌دهد، که نشان می‌دهد سناریوهایی مانند جهان اولیه و

آخرین مرحله فروپاشی ستاره‌ای می‌تواند به طور جدی تحت تاثیر دینامیک جدید که احتمالاً منجر به تفکیک تکینگی می‌شود قرار گیرد.

نتایج بدست آمده در این کار راه‌های جدیدی برای تحقیق در زمینه جهان اولیه، دوره تابش غالب و جهان تند شوونده با مکانیسم‌های جدید برای تولید یک ثابت کیهان شناسی موثر، در یک چارچوب که درجات جدیدی از آزادی را معرفی نمی‌کند، در نتیجه به گرانس نزدیکتر از انواع دیگر نظریه‌های اصلاح شده گرانس یا مدل انرژی تاریک است.

فصل ۴

گرانش دوگانه متریک پالاتینی

$$R + f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})$$

مسئله شتاب تند شونده عالم کنونی یکی از مهم‌ترین و هیجان‌انگیزترین مسائل کیهان‌شناسی مدرن است. مشاهدات رصدی اخیر [۵۲] نشان می‌دهند که کیهان با شتاب تندشونده در حال انبساط است و این انبساط با ماده باریونی قابل توضیح نیست. ساده‌ترین راه برای توضیح این شتاب اضافه کردن ثابت کیهان‌شناسی به معادلات گرانشی اینشتین است که منجر به مسائل زیادی از جمله مسئله ثابت کیهان‌شناسی می‌شود [۵۳]. راه منطقی‌تر اضافه کردن درجات آزادی دینامیکی به گرانش اینشتین به جای یک ثابت است. نظریات بسیاری شامل نظریات اسکالر-تانسوری [۵۴] در این زمینه معرفی و معروف شده‌اند. در این مقاله ما به بررسی یک نظریه تعمیم یافته گرانشی می‌پردازیم که در آن درجه آزادی دینامیکی از طریق یک هموستار مستقل آفین به نظریه گرانش اینشتینی اضافه می‌شود. همانطور که می‌دانیم انتخاب هموستار آفین معدل با انتخاب متریک در گرانش اینشتین هیلبرت است و فیزیک یکسانی را نتیجه می‌دهد [۵۵]. البته در نظریات تعمیم یافته گرانشی این دو رهیافت با هم متفاوتند. در این مقاله فرض می‌کنیم که متریک و هموستار آفین هر دو دینامیک دارند و از هم مستقل هستند. به این معنا ما یک نظریه دوگانه متریک-پالاتینی خواهیم داشت. در اینجا ما متریک را به عنوان میدان اصلی گرانشی در نظر می‌گیریم و هموستار را به عنوان یک میدان مستقل با جمله دینامیکی بصورت $R + \alpha \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ به لاگرانژی اینشتین هیلبرت اضافه می‌کنیم. نظریات دوگانه متریک-پالاتینی از [۴۳] شروع شده‌اند و کارهای متنوعی روی تابع دلخواهی از \mathcal{R} بخصوص نتایج کیهان‌شناسی این مدل‌ها انجام شده است [۵۶]. در این مقاله ما به بررسی سهم تانسور ریچی خواهیم پرداخت و کیهان‌شناسی مدل را مورد بررسی قرار خواهیم داد. خواهیم دید که نتایج پیش‌بینی شده با نتایج

رصدی کنونی سازگار است. البته برای مقادیر مختلف پارامتر α شعاع اولیه با پیش‌بینی Λ CDM متفاوت خواهد بود.

۱-۴ مدل

کنش را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})] + S_m. \quad (1.4)$$

که در اینجا S_m کنش ماده می‌باشد و $\kappa^2 \equiv \Lambda\pi G$ و R اسکالر ریچی تعریف شده توسط متریک و $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ انحنای پالاتینی است. \mathcal{R} به وسیله یک هموستار آفین مستقل $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ معرفی می‌شود. برای بدست آوردن معادلات میدان از کنش وردش می‌گیریم

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \delta\sqrt{-g} [R + f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})] \\ + \sqrt{-g} [\delta R + \delta f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu})] + \delta S_m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ابتدا وردش از هر بخش را به صورت مجزا حساب می‌کنیم. می‌دانستیم که

$$\delta\sqrt{-g}R = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R\delta g^{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

$$\sqrt{-g}\delta R = \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}), \quad (4.4)$$

$$\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

در نهایت وردش از بخش متریک آن به صورت زیر است

$$\delta(\sqrt{-g}R) = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

به همین صورت وردش از $\delta f(\mathcal{R}, Q)$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\delta\sqrt{-g}f(\mathcal{R}, Q) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}f(\mathcal{R}, Q)\delta g^{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

$$\sqrt{-g}\delta f(\mathcal{R}, Q) = \sqrt{-g}(f_{\mathcal{R}}\delta\mathcal{R} + f_Q\delta Q). \quad (7.4)$$

در اینجا $Q = \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ می‌باشد و $f_Q \equiv \partial_Q f$ ، $f_{\mathcal{R}} \equiv \partial_{\mathcal{R}} f$ نشان دهنده مشتق‌های جزئی هستند. می‌دانیم که $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ و $Q = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ با جایگذاری روابط قبل خواهیم داشت

$$\delta\mathcal{R} = \delta(g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}), \quad (۸.۴)$$

$$= \mathcal{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu},$$

$$\delta Q = \delta(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\nu\beta}), \quad (۹.۴)$$

$$= ۲\mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\nu}^{\alpha}\delta g^{\mu\nu} + ۲\mathcal{R}^{\mu\nu}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu},$$

معادلات فوق را در معادله (۷.۴) جایگذاری می‌کنیم

$$\sqrt{-g}\delta f(\mathcal{R}, Q) = \sqrt{-g}(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + f_Q ۲\mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\nu}^{\alpha}\delta g^{\mu\nu}), \quad (۱۰.۴)$$

در نهایت با جایگذاری معادلات بدست آمده برای δS خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{۲\kappa^2} \int d^f x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{۲}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} - \frac{1}{۲}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}f(\mathcal{R}, Q) \right. \right. \\ \left. \left. + f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} + f_Q ۲\mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\nu}^{\alpha} \right) \delta g^{\mu\nu} + \left(f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu} + ۲f_Q\mathcal{R}^{\mu\nu} \right) \delta\mathcal{R}_{\mu\nu} \right] + S_m, \end{aligned} \quad (۱۱.۴)$$

در مرحله بعد نیاز به محاسبه \mathcal{R} با استفاده از $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ است. با استفاده از روش پالاتینی به صورت زیر وردش می‌گیریم

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = -\nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda}) + \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}), \quad (۱۲.۴)$$

حالا $\delta\mathcal{R}$ را جدا کرده و به فرم زیر می‌نویسیم

$$M = \int d^f x \sqrt{-g} \Lambda^{\mu\nu} \delta\mathcal{R}_{\mu\nu}. \quad (۱۳.۴)$$

در اینجا $\Lambda^{\mu\nu} \equiv f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu} + ۲f_Q\mathcal{R}^{\mu\nu}$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از این عبارت محاسبات را ادامه می‌دهیم

$$M = \int d^f x \sqrt{-g} \Lambda^{\mu\nu} \left[-\nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda}) + \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) \right]. \quad (۱۴.۴)$$

با استفاده از ادغام معادلات بدست آمده و چینش مجدد آن‌ها در کنار هم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} M = \int d^f x \left[\nabla_{\lambda} \left[\sqrt{-g} \left(\Lambda^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Lambda^{\lambda\nu} \delta\Gamma_{\rho\nu}^{\rho} \right) \right] \right. \\ \left. + \nabla_{\mu} \left[\sqrt{-g} \left(\Lambda^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\beta}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\beta}^{\mu} \Lambda^{\lambda\nu} \right) \right] \delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta} \right], \end{aligned} \quad (۱۵.۴)$$

اولین جمله در پراونتزیک مشتق کامل است و همانطور که در فصل دوم نشان دادیم برابر صفر می‌شود. بخش دوم همان چیزی است که ما نیاز داریم در نتیجه با جایگذاری در δS خواهیم داشت

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} f(\mathcal{R}, Q) \right. \right. \quad (16.4)$$

$$\left. \left. + f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{\mu\nu} + f_Q \mathcal{R}_{\mu\alpha} \mathcal{R}_{\nu\alpha} \right) \delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\mu} \left[\sqrt{-g} \left(\Lambda^{\mu\nu} \delta_{\beta}^{\lambda} - \delta_{\beta}^{\mu} \Lambda^{\lambda\nu} \right) \right] \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} \right] + S_m,$$

وردش از کنش ماده به صورت زیر است

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (17.4)$$

در نهایت با $\delta S = 0$ قرار دادن، معادله حرکت متریک به صورت زیر بدست می‌آید

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\mathcal{R}, Q) + f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{\mu\nu} + 2 f_Q \mathcal{R}_{\mu\alpha} \mathcal{R}^{\alpha\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (18.4)$$

و وردش از کنش نسبت به هموستار به صورت

$$\nabla_{\mu} \left[\sqrt{-g} \left(\Lambda^{\mu\nu} \delta_{\beta}^{\lambda} - \delta_{\beta}^{\mu} \Lambda^{\lambda\nu} \right) \right] = 0, \quad (19.4)$$

است. باید توجه داشت که معادله فوق برابر با صفر است زیرا ماده با هموستار مستقل جفت نشده است، یعنی $\delta \Gamma$ در δS ظاهر نمی‌شود. معادله حرکت هموستار می‌تواند بیشتر ساده شود اگر $\lambda = \beta$ سپس معادله به طور یکسان صفر می‌شود. با در نظر گرفتن $\lambda = \beta$ ضریب $\nabla_{\beta} [\sqrt{-g} \Lambda^{\lambda\nu}] = 0$ می‌شود که در نتیجه می‌توان نشان داد که معادله حرکت هموستار به شکل زیر می‌شود

$$\nabla_{\beta} \left[\sqrt{-g} \left(f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} + 2 f_Q \mathcal{R}^{\mu\nu} \right) \right] = 0. \quad (20.4)$$

معادلات حرکت میدان را به روش پالاتینی بدست آوردیم. از بررسی معادله (20.4) مشاهده می‌کنیم که معادله میدان بدست آمده با توجه به مستقل در نظر گرفتن هموستار آفین بسیار پیچیده می‌باشد. پیچیدگی معادله حرکت هموستار این اجازه را به ما نمی‌دهد تا بتوان با تبدیل نظریه $f(\mathcal{R})$ به نظریه اسکالر برداری کار را ادامه دهیم. این پیچیدگی محدودیتی برای استفاده از نظریه اسکالر تانسوری می‌باشد. ما در این فصل سعی می‌کنیم با انجام محاسبات این مشکل را بر طرف کنیم و تاثیرات این مدل را بر دینامیک کیهان بررسی کنیم. در ادامه ابتدا تانسور انرژی تکانه را بدست می‌آوریم

۲-۴ تانسور انرژی تکانه موثر

همانطور که در معادله (18.4) مشاهده کردیم $G_{\mu\nu}$ ظاهر شده است. ما به حل و بررسی کیهان شناسی این معادله نیاز داریم، به همین منظور ما برای ادامه محاسبات تانسور انرژی تکانه موثر را به

صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tau_{\nu}^{\mu} = \kappa^{\nu} T_{\nu}^{\mu} + G_{\nu}^{\mu}. \quad (21.4)$$

برای ساخت انرژی تکانه موثر در ابتدا ما معادلات میدان اینشتین را حل می‌کنیم. یک جنبه دیگر معادله اینشتین این است که هندسه را به انرژی مرتبط می‌کند. حال در اینجا ما نیاز داریم که برای ادامه انجام محاسبات $G_{\mu\nu}$ را برای بررسی کیهان‌شناسی جایگذاری کنیم

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} = \Lambda\pi GT_{\mu\nu}. \quad (22.4)$$

همانطور که قبلاً گفتیم G تانسور اینشتین و $R_{\mu\nu}$ برابر با تانسور ریچی است. $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ اسکالر ریچی می‌باشد که از تنجش تانسور ریچی بدست می‌آید و در نهایت $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تکانه، یک تانسور متقارن است که اجزای آن جهان را توصیف می‌کند

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}. \quad (23.4)$$

که در آن Γ نشان دهنده مشتقات با توجه به x است

$$\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} \equiv \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (24.4)$$

به نظر می‌رسد که انجام این محاسبات بسیار سخت است اما با در نظر گرفتن انجام محاسبات با توجه به متریک $FRLW$ که یک حل دقیق برای معادلات میدان اینشتین در نسبت عام است محاسبات را انجام می‌دهیم. فرض اولیه این متریک همگنی و همسانگردی فضا زمان می‌باشد. متریک FRW برای کیهان تخت ($k=0$) به شکل زیر است

$$dS^{\nu} = -N^{\nu}(t)dt^{\nu} + a^{\nu}(t)d\vec{x}^{\nu}. \quad (25.4)$$

در اینجا $a(t)$ فاکتور مقیاس می‌باشد که به صورت صریح و واضح وابستگی مکان به زمان را نمایش می‌دهد. مولفه‌های متریک به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^{\nu} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a^{\nu}(t) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a^{\nu}(t) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a^{\nu}(t) \end{pmatrix}, g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^{\nu}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{a^{\nu}(t)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{a^{\nu}(t)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{a^{\nu}(t)} \end{pmatrix}, \quad (26.4)$$

همانطور که می‌دانیم کیهان خالی از ماده نیست به همین دلیل ما معادلات میدان اینشتین را در مدل دارای ماده و انرژی حل می‌کنیم. در نتیجه کیهان را به صورت شماره کامل در نظر می‌گیریم. تانسور انرژی تکانه برای شماره کامل به صورت زیر است

$$T_{\nu}^{\mu} = (-\rho + p)u_{\nu}u^{\mu} + pg_{\nu}^{\mu}. \quad (27.4)$$

در اینجا ρ و p به ترتیب چگالی و فشار هستند. تانسور انرژی تکانه $T_{\mu\nu}$ یک تانسور متقارن است. چهار بردار سرعت را با $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ نشان می‌دهیم. در نتیجه $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ است. اکنون مولفه‌های تانسور ریچی را بدست می‌آوریم. در اینجا هموستار دارای تقارن می‌باشد یعنی $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$ است. و از قبل می‌دانیم که $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ برابر است با

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \partial_{\beta}g_{\nu\mu}). \quad (28.4)$$

اکنون با جایگذاری مولفه‌های مکانی و زمانی و انجام محاسبات به صورت زیر داریم

$$\begin{aligned} \Gamma_{\cdot\cdot}^{\cdot} &= 0, & \Gamma_{\cdot\cdot}^i &= 0, & \Gamma_{ij}^{\cdot} &= N^2 \delta_{ij} \dot{a} a, \\ \Gamma_{ij}^k &= 0, & \Gamma_{\cdot j}^i &= \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{\cdot i}^{\cdot} &= 0, \end{aligned} \quad (29.4)$$

حال با جایگذاری این‌ها در تانسور ریچی برای مولفه مکانی و زمانی و با دانستن $\delta_i^i = 3$ برای سه مولفه مکانی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} R_{\cdot\cdot} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a}, & (30.4) \\ R_{ij} &= \delta_{ij} (\ddot{a} a + 2 \dot{a}^2), \\ R &= \frac{6}{N^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

با جایگذاری در تانسور اینشتین و ثابت هابل به صورت $H = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)$ برای مولفه مکانی و زمانی به شکل زیر داریم

$$\begin{aligned} G_{\cdot\cdot} &= -3 \frac{1}{N^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right), & (31.4) \\ G_j^i &= \frac{1}{N^2} \left[2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{N} - N \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) \right], \end{aligned}$$

در نهایت ثابت هابل به صورت $H = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ و $\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \dot{H} + H^2$ و ساده سازی خواهیم داشت

$$G^i_j = -3 \left(\frac{H}{N}\right)^2, \quad (32.4)$$

$$G^i_j = -\frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}}\right) - 3 \left(\frac{H}{N}\right)^2,$$

که می توان نوشت

$$G^{\mu}_{\nu} = \left(-\frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}}\right) - 3 \left(\frac{H}{N}\right)^2\right) \delta^{\mu}_{\nu} - \left(\frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}}\right)\right) u_{\nu} u^{\mu}, \quad (33.4)$$

تانسور اینشتین را برای شاره کامل بدست آوردیم اکنون با جایگذاری در معادله (21.4) و با استفاده

از معادله (27.4) می توانیم تانسور انرژی تکانه موثر را به فرم زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} \tau^{\mu}_{\nu} = & \kappa^2 [(\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + p\delta^{\mu}_{\nu}] + \left(-\frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}}\right) - 3 \left(\frac{H}{N}\right)^2\right) \delta^{\mu}_{\nu} \\ & - \left(\frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}}\right)\right) u_{\nu} u^{\mu}, \end{aligned} \quad (34.4)$$

که در نهایت تانسور انرژی تکانه موثر با ساده سازی به فرم زیر تبدیل می شود

$$\tau^{\mu}_{\nu} = \left(\kappa^2(\rho + p) + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}}\right)\right) u^{\mu}u_{\nu} + \left(\kappa^2 p + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}}\right) + 3 \left(\frac{H}{N}\right)^2\right) \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (35.4)$$

در اینجا تانسور اینشتین را به فرم کیهان شناسی آن تبدیل کردیم

۳-۴ معادلات میدان

ما برای انجام محاسبات با محدودیتی مواجه هستیم که از معادله حرکت هموستار ناشی می شود. برای رفع این محدودیت باید به دنبال یک رابطه جبری میان R و $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ با تانسور انرژی تکانه موثر باشیم.

برای پیدا کردن این رابطه جبری از معادله (17.4) استفاده می کنیم

$$f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{4} f g^{\nu}_{\mu} + 2 f_Q \mathcal{R}^{\alpha}_{\nu} \mathcal{R}^{\mu}_{\alpha} = \tau^{\nu}_{\mu}, \quad (36.4)$$

در ادامه ابتدا ماتریس \hat{P} که مولفه آن $P_\mu^\nu \equiv \mathcal{R}_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}$ است را تعریف می‌کنیم. معادله فوق را به صورت فرم ماتریسی آن بازنویسی می‌کنیم

$${}^2 f_Q \hat{P}^2 + f_{\mathcal{R}} \hat{P} - \frac{f}{\mathcal{Y}} \hat{I} = \hat{\tau}, \quad (37.4)$$

معادله را به شکل زیر به مربع کامل تبدیل می‌کنیم

$${}^2 f_Q \hat{P}^2 + {}^4 f_Q \frac{f_{\mathcal{R}} \hat{P}}{{}^4 f_Q} \hat{I} + {}^2 f_Q \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{{}^4 f_Q} \hat{I} = \frac{f}{\mathcal{Y}} \hat{I} + \hat{\tau} + \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{{}^8 f_Q} \hat{I}, \quad (38.4)$$

$${}^2 f_Q \left(\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{{}^4 f_Q} \hat{I} \right)^2 = \frac{f}{\mathcal{Y}} \hat{I} + \hat{\tau} + \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{{}^8 f_Q} \hat{I},$$

با انجام محاسبات و با جایگذاری مقدار تانسور انرژی تکانه موثر τ_ν^μ خواهیم داشت

$${}^2 f_Q \left(\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{{}^4 f_Q} \hat{I} \right)^2 = \frac{f}{\mathcal{Y}} \hat{I} + \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{{}^8 f_Q} \hat{I} + \left(\kappa^2 p + \frac{{}^2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + {}^3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 \right) \hat{I} \quad (39.4)$$

$$+ \left(\kappa^2 (\rho + p) + \frac{{}^2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) \right) \hat{u} \hat{u},$$

با ساده سازی خواهیم داشت

$$\left[\left(\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{{}^4 f_Q} \hat{I} \right)^2 \right]_\nu^\mu = \frac{1}{{}^2 f_Q} \left(\frac{f}{\mathcal{Y}} + \frac{f_{\mathcal{R}}^2}{{}^8 f_Q} + \kappa^2 p + \frac{{}^2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + {}^3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 \right) \delta_\nu^\mu \quad (40.4)$$

$$+ \frac{1}{{}^2 f_Q} \left(\kappa^2 (\rho + p) + \frac{{}^2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) \right) u_\nu u^\mu,$$

برای آسان‌تر شدن انجام محاسبات ما نامگذاری زیر را انجام می‌دهیم

$$\left(\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{{}^4 f_Q} \hat{I} \right)^2 = \alpha_1 \hat{I} + \alpha_2 u_\nu u^\mu. \quad (41.4)$$

ما به دنبال یک جذب به شکل زیر هستیم

$$\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{{}^4 f_Q} \hat{I} = \Lambda_1 \hat{I} + \beta_2 u_\nu u^\mu. \quad (42.4)$$

در اینجا فرض شده است که $f_Q > 0$ است. حال می‌توانیم برای بدست آوردن رابطه بین (Λ_1, β_2)

با مربع ماتریس معادله فوق را بدست آوریم که به صورت زیر است

$$\left(\hat{P} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{{}^4 f_Q} \hat{I} \right)^2 = (\Lambda_1 \delta_\nu^\mu + \beta_2 u_\nu u^\mu) (\Lambda_1 \hat{I}_\mu^\rho + \beta_2 u^\rho u_\nu), \quad (43.4)$$

$$= (\Lambda_1)^2 I + \beta_2 ({}^2 \Lambda_1 - \beta_2) u_\nu u^\mu. \quad (44.4)$$

با مقایسه دو معادله (۴۴.۴) و (۴۲.۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\Lambda_1^2 = \alpha_1, \quad (45.4)$$

$$\beta_2(2\Lambda_1 - \beta_2) = \alpha_2,$$

با انجام محاسبات مقدار Λ_1 و β_2 را بدست می‌آوریم

$$\Lambda_1 = -\sqrt{\alpha_1}, \quad (46.4)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2},$$

معادلات بالا ایجاب می‌کنند که برای حقیقی بودن انحنای دو شرط $\alpha_1 > \alpha_2$ و $\alpha_1 > 0$ باید برقرار باشد. با جایگذاری این مقادیر در معادله (۴۲.۴) در نتیجه مقدار \hat{p} به صورت زیر بدست می‌آورد

$$\hat{p} = -\beta_1 I - \beta_2 u_\nu u^\mu. \quad (47.4)$$

در اینجا مقادیر β_1 و β_2 به صورت زیر هستند

$$\beta_1 = \sqrt{\alpha_1} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{4f_Q}, \quad (48.4)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

فرم نهایی \hat{p} به شکل زیر است

$$\mathcal{R}_\nu^\mu = \hat{p} = -\beta_1 I - \beta_2 u_\nu u^\mu. \quad (49.4)$$

۴-۴ تبدیلات همدیس

همانطور که در قبل گفتیم معادله حرکت هموستار برای ما محدودیت‌هایی را به دنبال دارد. یکی دیگر از کارهایی که برای برداشتن این محدودیت نیاز است انجام دهیم بدست آوردن متریک است که در آن شرط متریک حفظ شود یعنی $\nabla_\beta[\sqrt{-\hat{h}}\hat{h}^{\mu\nu}] = 0$ باشد. این بیان می‌کند که ما می‌خواهیم \hat{h} به گونه‌ای باشد که هموستار آن از نوع هموستار لوی چویتا باشد. برای بدست آوردن این متریک به شکل زیر عمل می‌کنیم

$$\sqrt{-\hat{h}}\hat{h}^{-1} = \sqrt{-g}\hat{g}^{-1}(f_{\mathcal{R}}\hat{I} + 2f_Q\hat{P}). \quad (50.4)$$

دترمینال‌های سمت چپ و راست را محاسبه می‌کنیم که $\hat{h} = \hat{g} \det(\mathcal{Y} f_Q (\frac{f_{\mathcal{R}}}{\mathcal{Y} f_Q} \hat{I} + \hat{P}))$ است. با جایگذاری h در معادله بالا خواهیم داشت

$$|\hat{h}| = |\hat{g}| (\mathcal{Y} f_Q)^{\mathcal{F}} \det \left(\hat{p} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{\mathcal{Y} f_Q} \hat{I} \right). \quad (51.4)$$

اکنون ما $\hat{\Sigma} = \left(\hat{p} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{\mathcal{Y} f_Q} \hat{I} \right)$ را معرفی می‌کنیم

$$\hat{h}^{-1} = \sqrt{\frac{|\hat{g}|}{|\hat{h}|}} \hat{g}^{-1} (\mathcal{Y} f_Q) \hat{\Sigma}. \quad (52.4)$$

در اینجا $|\hat{h}| = (\mathcal{Y} f_Q)^{\mathcal{F}} \det \hat{\Sigma}$ را جایگذاری می‌کنیم

$$\hat{h}^{-1} = \sqrt{\frac{1}{(\mathcal{Y} f_Q)^{\mathcal{F}} \det \hat{\Sigma}}} \hat{g}^{-1} (\mathcal{Y} f_Q) \hat{\Sigma}. \quad (53.4)$$

با ساده سازی خواهیم داشت

$$\hat{h}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{Y} f_Q} (\det \hat{\Sigma})^{-\frac{1}{\mathcal{F}}} \hat{g}^{-1} \hat{\Sigma}. \quad (54.4)$$

به همین روش برای \hat{h} نیز داریم

$$\hat{h} = (\mathcal{Y} f_Q) \sqrt{\det \hat{\Sigma}} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{g}. \quad (55.4)$$

مقدار $\hat{\Sigma}$ را حساب می‌کنیم

$$\hat{\Sigma} = \hat{p} + \frac{f_{\mathcal{R}}}{\mathcal{Y} f_Q} \hat{I} = \left(\beta_1 + \frac{f_{\mathcal{R}}}{\mathcal{Y} f_Q} \right) \hat{I} + \beta_2 u^\mu u_\nu. \quad (56.4)$$

در اینجا $\beta_3 = \left(\beta_1 + \frac{f_{\mathcal{R}}}{\mathcal{Y} f_Q} \right)$ است. با توجه به $\hat{\Sigma}$ دترمینال آن را حساب می‌کنیم

$$\det \hat{\Sigma} = (\beta_3)^3 (\beta_3 - \beta_2). \quad (57.4)$$

اکنون برای بدست آوردن $\hat{\Sigma}^{-1}$ به این شکل عمل می‌کنیم

$$(\hat{\Sigma})_\nu^{-1\mu} = \gamma_1 u^\mu u_\nu + \gamma_2 \delta_\nu^\mu, \quad (58.4)$$

مقادیر γ_1 و γ_2 را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} (\hat{\Sigma})_\nu^\mu (\hat{\Sigma})_\alpha^\nu &= (\gamma_1 u^\mu u_\nu + \gamma_2 \delta_\nu^\mu) (\beta_3 \delta_\alpha^\nu + \beta_2 u^\nu u_\alpha), \\ &= \beta_3 \gamma_2 \delta_\alpha^\mu + (\gamma_1 \beta_3 + \gamma_2 \beta_2 - \gamma_1 \beta_2) u^\mu u_\alpha. \end{aligned} \quad (59.4)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\beta_3 \gamma_2 = 1, \quad (60.4)$$

$$\gamma_1(\beta_3 - \beta_2) + \gamma_2 \beta_2 = 0.$$

که با محاسبات مقادیر زیر را بدست می‌آوریم

$$\gamma_2 = \beta_3^{-1}, \quad (61.4)$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_3}{\beta_3(\beta_2 - \beta_3)}.$$

اکنون مقادیر فوق را در معادله (58.4) جایگذاری می‌کنیم و مقدار $\hat{\Sigma}^{-1}$ را بدست می‌آوریم

$$\hat{\Sigma}^{-1} = \frac{\beta_2}{\beta_3(\beta_3 - \beta_2)} u^\mu u_\nu - \frac{1}{\beta_3} \delta_\nu^\mu. \quad (62.4)$$

حال می‌توانیم متریک را به صورت زیر و با جایگذاری معادله (62.4) و (56.4) در معادله (55.4) بدست آوریم

$$\hat{h}_{\mu\nu} = 2f_Q \sqrt{(\beta_3)^2(\beta_3 - \beta_2)} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3(\beta_3 - \beta_2)} u^\mu u_\nu - \frac{1}{\beta_3} \delta_\nu^\mu \right), \quad (63.4)$$

که با ساده سازی خواهیم داشت

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \sqrt{\beta_3(\beta_3 - \beta_2)} \left(\frac{2f_Q \beta_2}{\beta_3 - \beta_2} u^\mu u_\nu - 2f_Q g_{\nu\mu} \right). \quad (64.4)$$

به همین صورت با جایگذاری (62.4) و (57.4) در معادله (54.4) خواهیم داشت

$$\hat{h}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\beta_3(\beta_3 - \beta_2)}} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3 2f_Q} u^\mu u_\nu - \frac{1}{2f_Q} g_{\nu\mu} \right). \quad (65.4)$$

5-4 انتخاب یک حالت خاص برای مقدار $f(\mathcal{R}, Q)$

همانطور که در بخش‌های قبل بیان کردیم ما در این پایان نامه فرض می‌کنیم که متریک و هموستار آفین هر دو دارای دینامیک هستند و به صورت دو میدان مجزا از هم در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه با اعمال این فرض ما یک نظریه دوگانه متریک-پلاتینی خواهیم داشت. در اینجا ما متریک را به عنوان میدان اصلی گرانشی در نظر می‌گیریم و هموستار را به عنوان یک میدان مستقل با جمله دینامیکی بصورت $\mathcal{R} + \alpha \mathcal{R}_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ به لاگرانژی اینشتین هیلبرت اضافه می‌کنیم. در نتیجه کنش ما به صورت زیر می‌شود

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \mathcal{R} + \alpha \mathcal{R}_{\mu\nu} R^{\mu\nu}] + S_m. \quad (66.4)$$

که در اینجا S_m کنش ماده می‌باشد و $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ و R اسکالر ریچی تعریف شده توسط متریک و $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$ انحنا پالاتینی است. \mathcal{R} به وسیله یک هموستار آفین مستقل $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ معرفی می‌شود.

برای بدست آوردن معادلات میدان از کنش وردش می‌گیریم

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \delta \sqrt{-g} [R + \mathcal{R} + \alpha \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu}] \quad (67.4)$$

$$+ \sqrt{-g} \delta (R + \mathcal{R} + \alpha \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu}) + \delta S_m.$$

در نهایت با $\delta S = 0$ معادله حرکت با توجه به متریک به فرم زیر است

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} - \frac{1}{2} \alpha \mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{R}^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + \mathcal{R}_{\mu\nu} + 2\alpha \mathcal{R}_{\mu\alpha} \mathcal{R}^{\alpha\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (68.4)$$

وردش از بخش هموستار ما به صورت زیر می‌باشد

$$\nabla_\beta [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} + 2\alpha \mathcal{R}^{\mu\nu})] = 0. \quad (69.4)$$

در ادامه معادلات حرکت میدان را با توجه به متریک و هموستار برای

$$f(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu}) = \mathcal{R} + \alpha \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu} \quad (70.4)$$

بدست آوردیم.

۶-۴ بدست آوردن معادلات میدان برای این حالت

در بخش‌های قبلی فرم نهایی \hat{p} را به صورت زیر بدست آوردیم

$$\hat{p} = -\beta_1 I - \beta_2 u_\nu u^\nu, \quad (71.4)$$

اکنون \hat{p} را برای حالت خاص بدست می‌آوریم. باید توجه کرد که در اینجا

$$f'_R = 1, \quad f'_Q = \alpha \quad (72.4)$$

می‌باشد. از معادله (۴۹.۴) می‌دانیم که برای بدست آوردن مقادیر β_1 و β_2 ابتدا باید مقادیر α_1 و

α_2 را بدست آوریم. در نتیجه خواهیم داشت

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2} \mathcal{R} + \frac{1}{2} \alpha \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{8\alpha} + \kappa^2 p + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + 3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 \right), \quad (73.4)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\alpha} \left(\kappa^2 (\rho + p) + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) \right). \quad (74.4)$$

اکنون مقادیر α_1 و α_2 را بدست آوردیم، که با جایگذاری مقادیر بالا در معادله (۴۹.۴) خواهیم داشت

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2}\mathcal{R} + \frac{1}{2}\alpha\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \kappa^2 p + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + 3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 \right)} + \frac{1}{4\alpha}, \quad (75.4)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2}\mathcal{R} + \frac{1}{2}\alpha\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \kappa^2 p + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + 3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 \right)} - \sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2}\mathcal{R} + \frac{1}{2}\alpha\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \kappa^2 p + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + 3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 - \kappa^2 \rho \right)}.$$

که با جایگذاری این ها در معادله (۷۱.۴) در نهایت \hat{p} را به شکل زیر بدست می‌آوریم

$$\hat{p} = -\left[\sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2}\mathcal{R} + \frac{1}{2}\alpha\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \kappa^2 p + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + 3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 \right)} \right] \quad (76.4)$$

$$+ \frac{1}{4\alpha} \delta_\nu^\mu - \left[\sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2}\mathcal{R} + \frac{1}{2}\alpha\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \kappa^2 p + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + 3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 \right)} - \sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{2}\mathcal{R} + \frac{1}{2}\alpha\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda\alpha} + \kappa^2 p + \frac{2}{N} \left(\frac{\dot{H}}{\dot{N}} \right) + 3 \left(\frac{H}{N} \right)^2 - \kappa^2 \rho \right)} \right] u_\nu u^\mu.$$

۷-۴ بدست آوردن متریک کمکی برای $R + \mathcal{R} + \alpha\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$

در این بخش ما به محاسبه متریک کمکی برای این حالت می‌پردازیم. متریک کمکی را بدست می‌آوریم

$$\sqrt{-\hat{h}}\hat{h}^{-1} = \sqrt{-g}\hat{g}^{-1}(\hat{I} + 2\alpha\hat{P}), \quad (77.4)$$

اکنون مقدار $\hat{\Sigma}$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} &= \hat{p} + \frac{1}{2\alpha}\hat{I}, \\ &= \left(\beta_1 + \frac{1}{4\alpha} \right) \hat{I} + \beta_2 u^\mu u_\nu. \end{aligned} \quad (78.4)$$

در اینجا $\beta_3 = \left(\beta_1 + \frac{1}{4\alpha} \right)$ و مقدار $\hat{\Sigma}^{-1}$ را بدست می‌آوریم

$$\hat{\Sigma}^{-1} = \frac{\beta_2}{\beta_3(\beta_3 - \beta_2)} u^\mu u_\nu - \frac{1}{\beta_3} \delta_\nu^\mu. \quad (79.4)$$

با توجه به $\hat{\Sigma}$ دترمینال آن را حساب می‌کنیم

$$\det \hat{\Sigma} = (\beta_3)^3 (\beta_3 - \beta_2). \quad (80.4)$$

حال می‌توانیم متریک را به صورت زیر و با جایگذاری معادله (79.4) و (80.4) در معادله (55.4) بدست آوریم

$$\hat{h}_{\mu\nu} = 2\alpha \sqrt{(\beta_3)^3 (\beta_3 - \beta_2)} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3(\beta_3 - \beta_2)} u^\mu u_\nu - \frac{1}{\beta_3} \delta_\nu^\mu \right), \quad (81.4)$$

که با ساده سازی خواهیم داشت

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \sqrt{\beta_3(\beta_3 - \beta_2)} \left(\frac{2\alpha\beta_2}{\beta_3 - \beta_2} u^\mu u_\nu - 2\alpha g_{\nu\mu} \right), \quad (82.4)$$

به همین صورت با جایگذاری (79.4) و (81.4) در معادله (54.4) خواهیم داشت

$$\hat{h}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\beta_3(\beta_3 - \beta_2)}} \left(\frac{\beta_2}{\beta_3 2\alpha} u^\mu u_\nu - \frac{1}{2\alpha} g_{\nu\mu} \right). \quad (83.4)$$

متریک کمکی را نیز برای داده‌های مشخص شده بدست آوردیم.

۸-۴ حل و بدست آوردن معادلات اصلی

با استفاده از متریک بدست آمده در بخش قبلی و محاسبه تانسور ریچی و اسکالر ریچی و قرار دادن نتایج در معادلات متریک معادلات فریدمن و با توجه به این که ما در اینجا $N = 1$ در نظر گرفتیم بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\frac{1}{2A(-A+B)B} a((-A+A^\vee)(-3BH + 3B^\vee H + \alpha(12H\dot{H} + \alpha\dot{Q} + \dot{R})) \quad (84.4)$$

$$-2A\kappa^\vee \dot{\rho}(1+A) + 3\alpha B(-1+B)(12H\dot{H} + 2\kappa^\vee \dot{p} + \alpha\dot{Q} + \dot{R} + f\ddot{H}) = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda(-1+B)} a^{\nu} B (\nu(-1+A)(-1+B)H) \quad (85.4)$$

$$+ \frac{\nu\alpha(-1+B)(12H\dot{H} + 2\kappa^{\nu}\dot{p} + \alpha\dot{Q}\dot{R} + \ddot{H})}{A} \frac{1}{A^{\nu} + B} \nu\alpha(1+A) \\ (-B^{\nu}(12H\dot{H} + 2\kappa^{\nu}\dot{p} + \alpha\dot{Q} + \dot{R} + \nu\ddot{H}) - \nu(A^{\nu}(\kappa^{\nu}(\dot{\rho} + \dot{p}) + \nu\ddot{H}) \\ + \nu\alpha(\kappa^{\nu}(\rho + p) + \nu\dot{H})(\nu H\dot{H} + 2\kappa^{\nu}r\dot{h}o + \alpha\dot{Q} + \dot{R} + \nu\ddot{H})))) = 0,$$

$$\frac{\nu + 3A + B + \nu\alpha R}{\nu\alpha} = 0, \quad (86.4)$$

$$- \frac{\nu + 3A + B + \nu\lambda\alpha H^{\nu} + 12\alpha\kappa^{\nu}p + \lambda\alpha R - \nu\alpha\kappa^{\nu}\rho + \nu\nu\alpha\dot{H}}{\lambda\alpha^{\nu}} = 0, \quad (87.4)$$

که مولفه A و B برابر هستند با

$$A = \sqrt{1 + \nu\alpha H^{\nu} + \lambda\alpha\kappa^{\nu}p + \nu\alpha^{\nu}Q + \nu\alpha R + \nu\nu\alpha\dot{H}}, \quad (88.4)$$

$$B = \sqrt{1 + \nu\alpha H^{\nu} + \nu\alpha^{\nu}Q + \nu\alpha R - \lambda\alpha\kappa^{\nu}\rho}, \quad (89.4)$$

۱-۸-۴ حل معادلات برای خلا

معادلات فوق را برای خلا بررسی می‌کنیم. برای این حالت $\rho = 0$ و $p = 0$ در نظر می‌گیریم. همچنین H را برای زمان کنونی یعنی H محاسبه می‌کنیم. در نتیجه معادلات فوق با اعمال این تغییرات به شکل زیر می‌شوند

$$A = \sqrt{1 + \nu\alpha H^{\nu} + \nu\alpha^{\nu}Q + \nu\alpha R}, \quad (90.4)$$

$$B = \sqrt{1 + \nu\alpha H^{\nu} + \nu\alpha^{\nu}Q + \nu\alpha R}, \quad (91.4)$$

اکنون مقدار A و B را در معادلات (85.4)، (86.4)، (87.4) و (89.4) به ترتیب جایگذاری می‌کنیم

$$((a(3H. + \nu\nu\alpha H^{\nu} + 12\alpha^{\nu}H.Q + 12\alpha H.R) \quad (92.4)$$

$$- 3H. \sqrt{1 + \nu\nu\alpha H^{\nu} + \nu\alpha^{\nu}Q + \nu\alpha R + \nu\alpha^{\nu}\dot{Q} + \nu\alpha\dot{R}}))$$

$$/((\nu\sqrt{1 + \nu\nu\alpha H^{\nu} + \nu\alpha^{\nu}Q + \nu\alpha R})) = 0,$$

$$\frac{1}{\nu} a^{\nu} (H. + \nu\nu\alpha H^{\nu} + \nu\nu\alpha^{\nu}H.Q + \nu\alpha H.R) \quad (93.4)$$

$$- H. \sqrt{1 + \nu\nu\alpha H^{\nu} + \nu\alpha^{\nu}Q + \nu\alpha R + \alpha\dot{Q} + \alpha\dot{R}} = 0,$$

$$\frac{1 + \alpha R + \sqrt{1 + 24\alpha H^2 + 4\alpha^2 Q + 4}}{\alpha} = 0, \quad (94.4)$$

$$-\frac{1 + 12\alpha H + 2\alpha R + \sqrt{1 + 24\alpha H^2 + 4\alpha^2 Q + 4}}{2\alpha^2} = 0. \quad (95.4)$$

اکنون مقادیر R ، Q و H را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه مقدار R معادله (94.4) را تقسیم بر 2α کرده سپس با معادله (95.4) جمع کرده و مقدار R را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$R = -12H^2, \quad (96.4)$$

برای محاسبه مقدار Q معادله (93.4) را در $\frac{-1}{a}$ ضرب کرده و از معادله فوق R را جایگذاری می‌کنیم. باید توجه داشت که مقدار $\dot{R} = 0$ است. در نهایت مقدار Q برابر است با

$$Q = \frac{6H^2}{\alpha}, \quad (97.4)$$

همچنین از معادله (94.4) با جایگذاری مقادیر R و Q مقدار H را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$H = \frac{1}{\sqrt{6\alpha}}, \quad (98.4)$$

۲-۸-۴ حل معادلات برای ماده بارونی

اکنون معادلات را برای کیهان دارای ماده بررسی می‌کنیم. ما در اینجا معادله حالت باریونی را به صورت $p = \omega\rho$ در نظر گرفته‌ایم. این را در معادلات اصلی یعنی (84.4)، (85.4)، (86.4) و (87.4) اعمال می‌کنیم و به جای $p = \omega\rho$ جایگذاری می‌کنیم و با انجام محاسبات به دو معادله اصلی زیر می‌رسیم

$$6H(-1 + A) + 3\dot{A} + \frac{(-1 + A)\dot{B}}{-1 + B} = 0, \quad (99.4)$$

$$B \left(4H(-1 + A) + \dot{A} + \frac{(-1 + A)\dot{B}}{-1 + B} \right) = 0, \quad (100.4)$$

اکنون مقدار $p = \omega\rho$ را در معادله‌های (88.4) و (89.4) جایگذاری می‌کنیم و مقدار A و B را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$A = \sqrt{1 + 24\alpha H^2 + 8\alpha\kappa^2\omega\rho + 4\alpha^2 Q + 4\alpha R + 16\alpha\dot{H}}, \quad (101.4)$$

$$B = \sqrt{1 + 24\alpha H^2 + 4\alpha^2 Q + 4\alpha R - 8\kappa^2\rho}, \quad (102.4)$$

در معادلات فوق دو معادله Q و R به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$R = -12H^2 + \kappa^2(1 - 3\omega)\rho - 6\dot{h}, \quad (103.4)$$

$$Q = \frac{1}{\lambda\alpha^2} \left(3 - 24\alpha(3H^2 + \kappa^2\omega\rho + 2\dot{H}) + 5\alpha^2(12H^2 + \kappa^2(-1 + 3\omega)\rho \right. \\ \left. + 6\dot{H})^2 - 3 \left(\left((1 - 12\alpha H^2 + \alpha^2(1 - 3\omega)\rho - 6\dot{H})^2 (1 + \alpha(144\alpha H^4 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2\kappa^2(1 + 5\omega)\rho - 20\dot{H} + \alpha(\kappa^2(-1 + 3\omega)\rho - 6\alpha\dot{H})^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 24h^2(-1 + \alpha\kappa^2(-1 + 3\omega)\rho - 6\alpha\dot{H})) \right) \right) \right), \quad (104.4)$$

از حل معادلات (99.4) و (100.4) مقدار A و B را دست می‌آوریم

$$A = 1 + \frac{C_1}{a}, \quad (105.4)$$

$$B = 1 + \frac{C_2}{a^3}, \quad (106.4)$$

در نهایت با حل معادلات (101.4) و (102.4) تحول پارامتر هابل و چگالی انرژی بدست می‌آید. چگالی انرژی را بر حسب پارامتر هابل می‌توان بصورت زیر بدست آورد

$$\rho = -\frac{-2a^5 C_1 - a^6 C_2 + 2a^3 C_2 + C_2 + 16\alpha a^6 \dot{H}}{\lambda\alpha\kappa^2(1 + \omega)a^6}, \quad (107.4)$$

انتقال به سرخ یکی از بارزترین پارامترهای مشاهداتی در کیهان‌شناسی است. طبق اثر دوپلری انتقال به سرخ در واقع انتقال طیف طول موج را در زمانی که چشمه از ما دور می‌شود را نشان می‌دهد. انبساط کیهان باعث دور شدن اجرام آسمانی از یکدیگر می‌شود در نتیجه برای ناظر که دریافت کننده طول موج‌های دریافتی از کیهان می‌باشد انتقال به سرخ رخ می‌دهد. در مقیاس‌های بزرگ کیهانی برای نشان دادن انبساط کیهان از فاکتور مقیاس $a(t)$ استفاده می‌کنیم. همانطور که در گذشته بیان کردیم پارامتر هابل برابر با $H = \frac{\dot{a}}{a}$ است. ثابت هابل برای زمان حال برابر با H_0 می‌باشد. انتقال به سرخ را نیز می‌توان بر حسب ثابت هابل نوشت. انتقال به سرخ از رابطه زیر بدست می‌آید

$$1 + z = 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_a} = \frac{a(t_0)}{a(t_a)} = \frac{v(t_0)}{v(t_a)}, \quad (108.4)$$

در اینجا $z = \frac{\lambda_0}{\lambda_a}$ انتقال به سرخ به علت انبساط کیهان می‌باشد. همانطور که بیان کردیم $a(t)$ فاکتور مقیاس (شعاع عالم) است. رابطه فوق بیان می‌کند هر چه زمان به گذشته برود مقدار $a(t)$

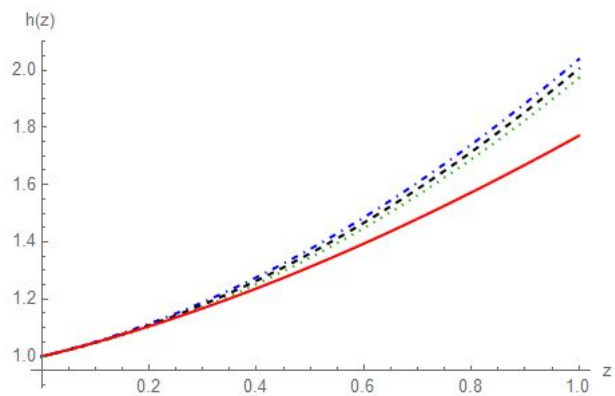
کاهش می‌یابد و در نتیجه مقدار انتقال به سرخ عدد بزرگتری خواهد بود. در نتیجه چگالی انرژی بر حسب انتقال به سرخ برابر است به فرم زیر می‌باشد

$$\rho = -\frac{(1+z)(-2C_1 - (1+z)C_1^2 + (1+z)^2C_2(2 + (1+z)^3C_2) - 16\beta h_1 \dot{h}_1)}{8\beta(1+\omega)}, \quad (10.9.4)$$

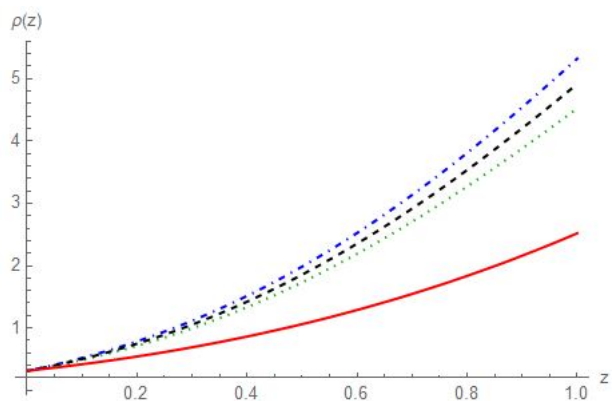
در شکل‌های (۱-۴)، (۲-۴) و (۳-۴) تحول پارامتر هابل به‌نجار شده $h = \frac{H}{H_0}$ که H پارامتر هابل کنونی است، چگالی انرژی به‌نجار شده $\Omega = \frac{\rho}{H_0^2 \kappa^2}$ و پارامتر کند شونگی q و $\beta = \frac{\alpha}{H_0^2}$ را برای مقادیر $\beta = 0.155$ و $C_2 = 0.276$ و به ترتیب مقدار C_1 برای نمودارهای خط-نقطه، نقطه چین و خط تیره برابر با 0.085 ، 0.003 و 0.03 بر حسب انتقال به سرخ رسم کرده‌ایم. باید توجه کنیم که در تمامی شکل‌ها خطوط ممتد با توجه به داده‌های رصدی رسم شده‌اند.

همانطور که بیان شد کیهان در حال انبساط با شتاب تند شونده می‌باشد. ماده تاریک مقدار انرژی لازم برای این انبساط را برای ما فراهم می‌کند. یکی از روش‌های ممکن برای این که بدانیم آیا نظریه انرژی تاریک برآورد می‌کند یا خیر محاسبه پارامتر کند شونگی است. اکنون نمودارهای فوق را با نمودارهای بدست آمده از مشاهدات رصدی مقایسه می‌کنیم.

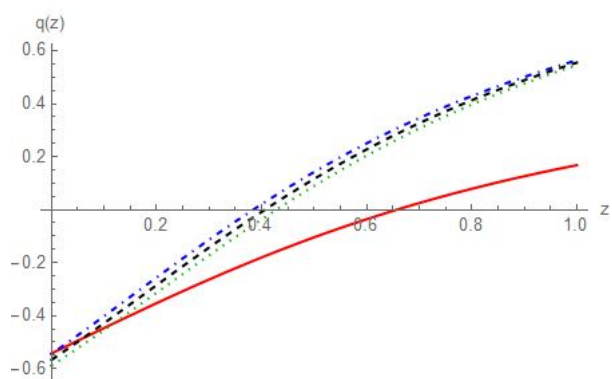
در شکل اول نمودار هابل بر حسب انتقال به سرخ را رسم کرده‌ایم. در اینجا نمودار قرمز با توجه به داده‌های رصدی بدست آمده است. همانطور که مشاهده می‌کنید نمودارهای رسم شده با توجه به مدل انتخاب شده ما به خوبی با داده‌های رصدی سازگار است و در ابتدا به صورت کامل با داده‌های رصدی مطابقت دارد اما با گذشت زمان شیب بیشتری نسبت به نمودار قرمز پیدا کرده است. در شکل دوم نمودار چگالی بر حسب انتقال به سرخ را رسم کرده‌ایم، نمودار قرمز با توجه به داده‌های رصدی رسم شده است. در ابتدا تمام نمودارها با هم برابر هستند ولی با گذشت زمان شیب نمودار بدست آمده از انجام محاسبات بیشتر از شیب بدست آمده از داده‌های رصدی می‌باشد. و آخرین نمودار پارامتر کند شونگی بر حسب انتقال به سرخ می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌کنید در این نمودار نیز شیب داده‌ها با گذشت زمان افزایش یافته است. در نهایت مشاهده می‌کنیم که مدل دوگانه متریک-پالاتینی تعمیم یافته با مشاهدات تجربی زمان‌های حال سازگار است.



شکل ۴-۱: تحول پارامتر هابل برحسب انتقال به سرخ



شکل ۴-۲: تحول چگالی انرژی برحسب انتقال به سرخ



شکل ۴-۳: تحول پارامتر کندشوندگی برحسب انتقال به سرخ

فصل ۵

نتیجه گیری

در این پایان نامه ما به بررسی کیهان‌شناسی مدل دوگانه متریک-پالاتینی تعمیم یافته پرداختیم. به صورت مفصل به بررسی روش بدست آوردن معادلات میدان پرداختیم. نشان دادیم که وردش گیری متریکی تنها وابسته به متریک می‌باشد و تنها میدان موجود متریک می‌باشد که وردش گیری نسبت به این میدان انجام می‌شود. در وردش گیری متریکی هموستار آفین از نوع لوی چویتا می‌باشد. وردش گیری پالاتینی با مستقل در نظر گرفتن هموستار آفین نسبت به متریک به عنوان یک میدان مجزا این امکان را می‌دهد که وردش گیری از هر دو میدان به صورت مجزا انجام شود. وردش گیری برای بدست آوردن معادلات میدان در نظریه‌های $f(R)$ که شامل اضافه کردن توابع دلخواهی از تانسور انحنای هستند که به وسیله یک هموستار مستقل تعریف می‌شوند به کنش اینشتین هیلبرت اضافه می‌شود بسیار کاربردی است. همچنین وردش گیری پالاتینی بسیار کامل‌تر از وردش گیری متریکی می‌باشد و در شرایط خاص نتایج حاصل از وردش گیری متریکی و شرط سازگاری با متریک را نتیجه می‌دهد.

در نظریه‌های $f(R)$ بر حسب پیچیدگی میدان بدست آمده از وردش نسبت به هموستار می‌توان کیهان‌شناسی این نظریه‌ها را بررسی کرد. اگر معادلات میدان بدست آمده زیاد پیچیده نباشد می‌توان نظریه $f(R)$ را به نظریه برنز دیکی در غالب جردن که یک نمایش اسکالر تانسوری از گرانش در متریک پالاتینی می‌باشد برد و اثرات میدان را برای حد میدان‌های ضعیف با بسط دادن متریک و ایجاد اختلال در میدان بررسی کرد. در این حالت نشان دادیم که نظریه‌های $f(R)$ در حد میدان‌های ضعیف پاسخگو می‌باشد و انبساط تند شونده کیهان را به خوبی به ما می‌دهد.

اگر معادلات میدان بدست آمده پیچیده‌تر از حالت قبلی باشد در این حالت دیگر نمی‌توان نظریه‌های $f(R)$ را در یک نمایش اسکالر تانسوری از گرانش در متریک پالاتینی برد. در این حالت با استفاده از تبدیلات هم‌مدیس متریک کمکی را بدست می‌آوریم که در آن شرط سازگاری متریک

برقرار باشد، سپس ادامه محاسبات را با استفاده از متریک کمکی بدست آمده و معادلات میدان انجام می‌دهیم و به بررسی کیهان‌شناسی آن می‌پردازیم.

در این مدل به کنش اینشتین هیلبرت توابع دلخواهی از تانسور انحنا که بوسیله هموستار مستقلی تعریف می‌شود اضافه می‌کنیم. انتخاب ما در پایان نامه اضافه کردن جمله اینشتین هیلبرت برای هموستار همراه با جمله تصحیحی $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ بوده است. روش کلی انجام محاسبات بدست آوردن متریکی است که برای آن رابطه سازگاری با متریک برقرار باشد. این متریک در حالت کلی قابل محاسبه نیست و ما در این پایان نامه فرم آن را در حالتی که متریک فیزیکی FRW باشد بدست آوردیم. در شکل‌های (۱) و (۲) مشاهده کردیم که تحول پارامتر هابل و همچنین چگالی انرژی سازگار با مشاهدات رصدی است. مقادیر مختلف C_1 پارامتر هابل در زمان‌های اولیه را نسبت به فرم ΛCDM تغییر می‌دهد. C_1 های بزرگتر شعاع بزرگتری برای عالم در زمان‌های اولیه پیش می‌کند. همچنین در شکل (۳) مشاهده کردیم که پارامتر کندشوندگی با نتایجی که بر روی مدل ΛCDM نگاشته شده‌اند در سازگاری کامل است.

مراجع

- [1] Edwin, T.F., Wheeler, J., (1992), "Introduction to Special Relativity." American Journal of Physics., Vol.61,p. 284-284 .
- [2] Rindler, W., (1977), " Essential Relativity." Springer., p 193-244.ISBN 3-540-07970-X.
- [3] Hobson, M.P., Efstathiou, G.P. and Lasenby, A.N., (2006), "General Relativity, An Introduction for physicists." 1 th edition, Cambridge University Press.
- [4] Eddington, A.S.(1923). "The mathematical theory of relativity." Cambridge University Press,Cambridge.
- [5] Abbott, B.P., Abbott, R., Abbott, T.D., Abernathy, M.R., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adams, T., Addesso, P., Adhikari, R.X. and Adya, V.B., (2016), "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger". Physical review letters, 116(6), p.061102.
- [6] Riazi, N., (2009), "An Introduction to Modern Cosmology." Astronomy and Astrophysics of Maragha.
- [7] Roos, M., (2003), "Introduction to Cosmology."
- [8] Mukhanov, V., (2005), "Physical Foundations of Cosmology." Cambridge University Press, Cambridge.

- [9] Capozziello, S., Laurentis, M.D., and Faraoni V., (2009), “A bird’s eye view of $f(R)$ -gravity.” *The Open Astronomy Journal*, vol.3., p.49-72
- [10] Capozziello, S., Francaviglia, M., (2008). “Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications.” *General Relativity and Gravitation*, 40(2-3), pp.357-420.
- [11] Dicke, R.H., Peebles, P. J. E., (1979). “General Relativity; an Einstein Centenary Survey.” Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] Liddle, A., (2003), “An Introduction to Modern Cosmology.” John Wiley Sons.
- [13] de Bernardis, P., Ade, P.A., Bock, J.J., Bond, J.R., Borrill, J., Boscaleri, A., Coble, K., Crill, B.P., De Gasperis, G., Farese, P.C. and Ferreira, P.G., (2000). “A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation.” *Nature*, 404(6781), pp.955-959.
- [14] Jaffe, A.H., Ade, P.A., Balbi, A., Bock, J.J., Bond, J.R., Borrill, J., Boscaleri, A., Coble, K., Crill, B.P., De Bernardis, P. and Farese, P., (2001). “Cosmology from MAXIMA-1, BOOMERANG, and COBE DMR cosmic microwave background observations.” *Physical Review Letters*, 86(16), p.3475.
- [15] Carrol, S.M., (1997). “Lecture Notes on General Relativity” Institute for Theoretical Physics and University of California.
- [16] Astier, P., Guy, J., Regnault, N., Pain, R., Aubourg, E., Balam, D., Basa, S., Carlberg, R.G., Fabbro, S., Fouchez, D. and Hook, I.M., (2006). “The Supernova Legacy Survey: measurement of, and w from the first year data set.” *Astronomy Astrophysics*, 447(1), pp.31-48.
- [17] Brans, C. and Dicke, R.H., (1961). “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation.” *Physical review*, 124(3), p.925.
- [18] Nojiri, S., Odintsov, S.D. (2007). “Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy.” *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol.04, p.115-145.

- [19] Capozziello, S., Carloni, S. and Troisi, A., (2003). "Recent research developments in astronomy and astrophysics." RSP/AA/21-2003.
- [20] Nojiri, S.I. and Odintsov, S.D., (2003). "Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration." *physical Review D*, 68(12), p.123512.
- [21] Xia, J. Q., Feng, B., Zhang, X. (2005). "Constraints on oscillating quintom from supernova, microwave background and galaxy clustering." *Modern Physics Letters A*, 20(31), 2409-2416.
- [22] Capozziello, S., Cardone, V.F. and Troisi, A., (2005). "Reconciling dark energy models with $f(R)$ theories." *Physical Review D*, 71(4), p.043503.
- [23] Carloni, S., Dunsby, P.K., Capozziello, S. and Troisi, A., (2005). "Cosmological dynamics of R_n gravity." *Classical and Quantum Gravity*, 22(22), p.4839.
- [24] Capozziello, S., Cardone, V.F., Troisi, A. (2006). "Dark energy and dark matter as curvature effects?" *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol.2006; S. Capozziello, V.F. Cardone, A.
- [25] Capozziello, S., Stabile, A., Troisi, A. (2007). "Spherically symmetric solutions in $f(R)$ gravity via the Noether symmetry approach." *Classical and Quantum Gravity*, 24(8), 2153.
- [26] Sobouti, Y. (2007). "An $f(R)$ gravitation for galactic environments." *Astronomy and Astrophysics*, vol.464., p.921-925
- [27] Dvali, G. R., Gabadadze, G., Porrati, M. (2000) "4D gravity on a brane in 5D Minkowski space." *Physics Letters B*, Vol. 485, P.208-214.
- [28] Capozziello, S., Carloni, S., Troisi, A. (2003). "Curvature quintessence matched with observational data." *International Journal of Modern Physics D*, Vol. 12, p. 1969-1982.
- [29] Nojiri, S., Odintsov, S. D. (2004). "Gravity assisted dark energy dominance and cosmic acceleration." *Physics Letters B*, vol.599, pp.137-142

- [30] S. Capozziello, S. Carloni, A. Troisi. (2003). “Quintessence without scalar fields” *RecentRes.Dev.Astron.Astrophys.*
- [31] Vollik, D.N. (2003). “ 1 *R*curvature corrections as the source of the cosmological acceleration” *Physical Review D* 68
- [32] Sotiriou, T.P., Liberati, S. (2007). “Metric-affine $f(R)$ theories of gravity.” *Annals of Physics.*, vol.322, p.035-966
- [33] Buchdahl, H. A. (1970). “Non-Linear Lagrangians and Cosmological Theory.” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.*, Vol.150, p.1–8.
- [34] Capozziello, S. and Sáez-Gómez, D., (2012). “Scalar–tensor representation of $f(R)$ gravity and Birkhoff’s theorem.” *Annalen der Physik*, 524(5), pp.279-285.
- [35] Koivisto, T. (2006). “A note on covariant conservation of energy–momentum in modified gravities.” *Classical and Quantum Gravity.*, vol.23, p.428
- [36] Capozziello, S., Faraoni, V. (2010). “Beyond Einstein gravity: A Survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics.” Springer
- [37] Nojiri, S.I. and Odintsov, S.D., (2011). “Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models.” *Physics Reports*, 505(2-4), pp.59-144.
- [38] Sotiriou, T. P. (2007). “Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology.” PhD thesis, SISSA, eprint 0710.4438.
- [39] Sotiriou, T. P. (2006). “THE SIGNIFICANCE OF MATTER COUPLING IN $f(R)$ GRAVITY.” *The Eleventh Marcel Grossmann Meeting.*, p.1223-1225.
- [40] Sotiriou, T. P., (2007), “Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology.” Ph.D. thesis.
- [41] Barraco, D.E., Dominguez, E. and Guibert, R., (1999). “Conservation laws, symmetry properties, and the equivalence principle in a class of alternative theories of gravity.” *Physical Review D*, 60(4), p.044012.
- [42] Koivisto, T., (2006). “A note on covariant conservation of energy–momentum in modified gravities.” *Classical and Quantum Gravity*, 23(12), p.4289.

- [43] Harko, T., Koivisto, T. S., Lobo, F. S. N., Olmo, G. J. (2012). “Metric-Palatini gravity unifying local constraints and late-time cosmic acceleration.” vol.85
- [44] Olmo, G. J. (2005). “The gravity lagrangian according to solar system experiments.” Physical review letters.95,261102
- [45] Capozziello, S., and Tsujikawa, S. (2008). “Solar system and equivalence principle constraints on $f(R)$ gravity by the chameleon approach.” Physical Review D, 77(10), 107501.
- [46] Damour, T., Esposito-Farese, G.(1992). “Tensor-multi-scalar theories of gravitation.” Classical Quantum Gravity.,vol.9
- [47] Wald, R. M. (1984). “General relativity(Book).” Chicago, University of Chicago Press, 1984, 504 p.
- [48] Haas, M. R., Ross, D. K. (1975). “Measurement of the angular momentum of Jupiter and the Sun by use of the Lense-Thirring effect.” Astrophysics and Space Science, 32(1), 3-11.
- [49] Olmo, G.J., Sanchis, H., Tripathi, S. (2009). “Dynamical aspects of generalized Palatini theories of gravity.” Physical Review D 80, 024013.
- [50] Sanders, R. H. (1986). “Anti-gravity and galaxy rotation curves.” Astronomy and Astrophysics.,vol. 136, p. L21-L23.
- [51] Capozziello, S., De Laurentis, M., Nojiri, S., Odintsov, S. D. (2009). “Classifying and avoiding singularities in the alternative gravity dark energy models.” Physical Review D 79,124007
- [52] Riess, A. G., et al.(1998). “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant.” The Astronomical Journal, Vol.116
- [53] Weinberg, S.(1989). “The cosmological constant problem.” Reviews of modern physics.61
- [54] I. Quiros, Int. J. Mod. Phys. D 28 (2019) 1930012.

- [55] Olmo, G. J. (2011). "Palatini approach to modified gravity: $f(R)$ theories and beyond." International Journal of Modern Physics., vol, 20, p.413-462
- [56] Salvatore Capozziello, Tiberiu Harko, Tomi S. Koivisto, Francisco S.N. Lobo and Gonzalo J. Olmo, arXiv:1508.04641v1 [gr-qc]; G. J. Olmo, H. Sanchis-Alepuz, S. Tripathi, Phys. Rev. D80, 024013 (2009). [arXiv:0907.2787]; T. S. Koivisto and N. Tamanini, Phys. Rev. D 87 104030 (2013) [arXiv:1304.3607 [gr-qc]]; T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo and G. J. Olmo, Phys. Rev. D 85, 084016 (2012) arXiv:1110.1049 [gr-qc]; G. Olmo, arXiv:1207.4815v1 [gr-qc]; P. I. Dyadina, S. P. Labazova, S. O. Alexeyev, arXiv:1907.06919v1 [gr-qc]; S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S.N. Lobo, and G. J. Olmo arXiv:1508.04641v1 [gr-qc]

ABSTRACT

Cosmology of Generalized Hybrid-Metric Palatini Gravity

By:
Shiva Kayedi

In this thesis we will consider the cosmological implications of the hybrid metric-Palatini theory. We will apply both metric and Palatini variational principles to $f(R)$ theories of gravity and also Einstein-Hilbert theory and consider some special cases of the $f(R)$ function. Then, we will analyze consistency of the $f(R)$ and $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ theories in two ways; defining an additional scalar field and an additional metric tensor. We will then consider a special hybrid metric-Palatini model which contains an Einstein-Hilbert action for the metric part and an Einstein-Hilbert action together with an additional term $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ for the Palatini part. Assuming that the universe is filled with baryonic matter with barotropic equation of state, we will obtain the evolution of the Hubble, deceleration and energy density parameters. We will show that the model is consistent with current observational data. For different values of α we will obtain different Hubble radius for the universe at early times. Also, we will show that for larger α values, the early time Hubble radius was greater than the Hubble radius which is predicted by the standard model.

Ministry of Science, Research, and Technology



**Damghan University
School of Physics**

**M.Sc. Thesis
In Physics (Astronomy and Astrophysics)**

**Cosmology of Generalized
Hybrid-Metric Palatini Gravity**

**By:
Shiva Kayedi**

**Supervisor:
Dr. Shahab Aldin Shahidi Shadkam**

February 2020

In The Name of God

**Cosmology of Generalized
Hybrid-Metric Palatini Gravity**

By:

Shiva Kayedi

THESIS

SUBMITTED TO THE SCHOOL OF GRADUATE STUDIES IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M.Sc.)

In

Physics (Astronomy and Astrophysics)

DAMGHAN UNIVERSITY

DAMGHAN, ISLAMIC REPUBLIC OF IRAN

EVALUATED AND APPROVED BY THE THESIS COMMITTEE AS: **Excellent**

Dr. Shahab Aldin Shahidi Shadkam (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN GRAVITA-
TION AND COSMOLOGY, DAMGHAN UNIVERSITY (SUPERVISOR)

Dr. Zahra Haghani (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN GRAVITATION AND COS-
MOLOGY, DAMGHAN UNIVERSITY (EXAMINER)

Dr. Leila Shahkarami (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN ELEMENTARY PARTICLE
PHYSICS, DAMGHAN UNIVERSITY (EXAMINER)

Dr. Leila Shahkarami (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN ELEMENTARY PARTICLE
PHYSICS, DAMGHAN UNIVERSITY (Representative of the Graduate Studies)

February 2020