

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



دانشگاه دامغان
دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد
فیزیک (گرایش گرانش و کیهان‌شناسی)

دینامیک سیاه‌چاله‌ها در نظریه‌ی

هورندسکی

توسط:

مرجان حشمتیان

استاد راهنما:

سید شهاب‌الدین شهیدی شادکام

استاد مشاور:

مسعود جعفری

مهر ۱۳۹۷

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

به نام خدا

دینامیک سیاه چاله ها در نظریه ی هورندسکی

توسط:

مرجان حشمتیان

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

فیزیک (گرایش گرانش و کیهان شناسی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر سید شهاب الدین شهیدی شادکام، استادیار، فیزیک، گرایش گرانش و کیهان شناسی، دانشکده ی
فیزیک، دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر مسعود جعفری، استادیار، فیزیک، گرایش نجوم و اختر فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان
(استاد مشاور)

دکتر زهرا حقانی، استادیار، فیزیک، گرایش گرانش و کیهان شناسی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان
(استاد داور)

دکتر لیلا شاه کرمی، استادیار، فیزیک، گرایش ذرات بنیادی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان (استاد
داور)

دکتر لیلا شاه کرمی، استادیار، فیزیک، گرایش ذرات بنیادی، دانشکده فیزیک، دانشگاه دامغان (نماینده
تحصیلات تکمیلی)

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یآوری دلسوز
و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند.

سپاسگزاری

از استاد فرزانه و دلسوز جناب آقای دکتر شهاب شهیدی که با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و بدون راهنمایی‌های ایشان تامین این پایان نامه بسیار مشکل می‌نمود، بسیار سپاسگزارم. از استاد گرامی جناب آقای دکتر مسعود جعفری که زحمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند سپاسگزارم. همچنین از استاد صبور سرکار خانم دکتر زهرا حقانی و سرکار خانم دکتر لیلا شاهکرمی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

چکیده

دینامیک سیاه‌چاله‌ها در نظریه‌ی هورندسکی

به وسیله‌ی:
مرجان حشمتیان

در این پایان نامه دینامیک سیاه‌چاله‌ها را در نظریه گالیئون مرتبه سه که ساده‌ترین حالت از نظریه هورندسکی می‌باشد و در مباحث کیهان‌شناسی از جمله انرژی تاریک به خوبی جواب داده است، بررسی می‌کنیم. ابتدا یک نگاه اجمالی به تاریخچه نسبیت عام و گرانش تعمیم یافته می‌اندازیم و بعد از آن نظریه گالیئون را در فضای تخت بررسی می‌کنیم. لاگرانژی و معادلات حرکت مربوطه را در فضا-زمان چهاربعدی بدست می‌آوریم، سپس این نظریه را در فضای انحنا دار مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه حل سیاه‌چاله را با کنشی شامل جمله اینشتین-هیلبرت، ثابت کیهان‌شناسی و گالیئون درجه سه بررسی می‌کنیم. می‌بینیم به دلیل اینکه میدان اسکالر وابستگی زمانی دارد حل با نسبیت عام همخوانی ندارد و طبق نظریه بی مو میدان اسکالر موی سیاه‌چاله است. در آخر حل سیاه‌چاله باردار را در این نظریه مطالعه می‌کنیم. در این حالت کنش متشکل از جمله اینشتین-هیلبرت، میدان پیمانه‌ای ماکسول و جمله گالیئون درجه سه می‌باشد. حل شامل سه ثابت است: Q بار الکتریکی، P بار مغناطیسی و C که رفتار مجانبی حل را تعیین می‌کند. حل معادلات حرکت در این حالت کار ساده‌ای نیست بنابراین ما به منظور ساده سازی یک تابع $S(r)$ تعریف می‌کنیم و تمام توابع مسئله را برحسب آن تعریف می‌کنیم و همچنین برای ساده سازی بیشتر حالت‌های خاصی را برای حل در نظر می‌گیریم.

فهرست مطالب

ه	فهرست مطالب
۱	قراردادها
۲	۱ نسبت عام و نظریات جایگزین
۲	۱-۱ مقدمه
۴	۲-۱ سیاه‌چاله
۸	۳-۱ مشکلات رصدی
۱۲	۴-۱ راه حل مشکلات رصدی
۱۶	۵-۱ حد جداسازی DGP
۱۹	۶-۱ نتیجه گیری
۲۰	۲ معرفی گالیئون
۲۰	۱-۲ مقدمه
۲۱	۲-۲ ساختار π
۲۳	۳-۲ ساختار L_π
۲۶	۴-۲ گالیئون هموردا
۳۴	۵-۲ نتیجه گیری
۳۵	۳ سیاه‌چاله در نظریه گالیئون مرتبه سه
۳۵	۱-۳ مقدمه

۳۶	۲-۳ معرفی مدل
۳۷	۳-۳ سیاه‌چاله سه بعدی
۳۸	۴-۳ سیاه‌چاله در چهار بعد
۴۵	۵-۳ سیاه‌چاله در چهار بعد: حل عددی
۴۸	۶-۳ نتیجه گیری
۵۰		۴ سیاه‌چاله باردار گالیئونی مرتبه سه
۵۰	۱-۴ مقدمه
۵۰	۲-۴ معادلات میدان و حدس
۵۴	۳-۴ حل‌های ضمنی و منظم
۵۶	۴-۴ حل‌های خاص
۵۹	۵-۴ نظریه‌های هورندسکی
۶۰	۶-۴ قضیه نوتر
۶۲	۷-۴ سیاه‌چاله <i>BTZ</i>
۶۳	۸-۴ نتیجه گیری
۶۶		مراجع

قراردادها

در این پایان نامه، نشانگان را به صورت $(-, +, +, +)$ در نظر می‌گیریم. از قراردادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\nabla_\alpha A \longrightarrow A_{,\alpha},$$

$$\partial_\alpha A \longrightarrow A_{,\alpha},$$

$$G = c = \varepsilon. = 1.$$

تانسور ریمان به شکل

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\rho \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\delta}^\alpha,$$

و همچنین تانسور ریچی با

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\delta\beta}^\delta,$$

تعریف می‌شود.

فصل ۱

نسبیت عام و نظریات جایگزین

۱-۱ مقدمه

تا ابتدای قرن بیستم قانون جهانی گرانش نیوتن^۱، به مدت حدود دویست سال به عنوان توصیفی برای گرانش بین اجسام مطرح بود، که در آن گرانش نیروی جاذب بین دو جسم می‌باشد. این نظریه برای توصیف حرکت اجسام تحت گرانش بسیار موفق بود. حرکت سیارات در منظومه شمسی را توجیه می‌کرد و زمان ظاهر شدن ستارگان دنباله‌دار را به دقت پیش‌بینی می‌نمود. البته منشاء این نیرو ناشناخته بود و انتشار آن با سرعت بینهایت، مبهم بود. این نظریه همچنین زمانی که میدان گرانش بسیار قوی باشد جوابگو نیست [۲].

پس از آن در سال ۱۹۰۵، آلبرت اینشتین^۲ نظریه نسبیت خاص خود را بیان کرد که شامل دو اصل بود: ثابت بودن سرعت نور و استقلال قوانین فیزیکی از دستگاه‌های لخت، که طبق اصل دوم این نظریه، تمام قوانین فیزیکی حاکم بر جهان مادی، در همه چارچوب‌های لخت فرمول‌بندی یکسانی دارند. نسبیت خاص با معرفی مفاهیم جدیدی از فضا-زمان^۳، چارچوب جدیدی را برای همه فیزیک پایه‌ریزی نمود. این نظریه شامل موضوعاتی همچون انقباض طول^۴ و اتساع زمان^۵ می‌باشد. نسبیت خاص به مسائل محدودی پاسخ می‌داد، به عنوان مثال برای بیان شکل قوانین فیزیکی در دستگاه‌های شتابدار ناتوان بود. در سال ۱۹۰۷ هرمن مینکوفسکی^۶ نسبیت خاص اینشتین را در چهار

^۱Newton

^۲Albert Einstein

^۳Space time

^۴Length contraction

^۵Time dilation

^۶Hermann Minkowski

بعد فرمول بندی کرد و فضا-زمان مینکوفسکی را مطرح نمود. بعد از آن اینشتین سعی کرد تا نظریه نسبیت را طوری فرمول بندی کند که گرانش و دستگاه‌های مختصات شتابدار نیز در چارچوب نسبیت وارد شوند. سرانجام در سال ۱۹۱۶، اینشتین نظریه نسبیت عام را مطرح نمود. در این نظریه فضا به عنوان موجودی ایستا و مکانی که رویدادها در آن رخ می‌دهند کنار گذاشته شد و مفهوم فضا-زمان به شکلی پویا و قابل تغییر بیان گردید که ماده، ساختار و هندسه آن را دچار تغییر می‌کرد. در این نظریه گرانش دیگر به شکل یک نیرو مطرح نیست بلکه به شکل یک عامل هندسی در نظر گرفته می‌شود. حرکت اجسام در اثر گرانش طبق خمیدگی‌های فضا بیان می‌شود [۳] و [۴]. این نظریه به عنوان نظریه نسبیت عام مطرح شد. در این نظریه تانسور انرژی-تنش^۷ کل ماده مستقیماً با انحنا^۸ فضا-زمان متناسب است. ابتدا اینشتین یک رابطه مستقیم بین انحنا و تانسور انرژی-تنش فرض کرد و به ازای یک C ثابت معادلات میدان را این گونه نوشت:

$$R_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

که $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تنش و $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی است که نشان‌دهنده انحنا^۸ فضا-زمان می‌باشد. طبق پایستگی انرژی تکانه، مشتق هموردای^۹ سمت راست رابطه‌ی فوق صفر است

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1)$$

بنابراین باید مشتق هموردایی سمت چپ ($R_{\mu\nu}$) نیز صفر باشد که این گونه نیست. به منظور رفع این مشکل، اینشتین از تانسور ریچی^۹ و اسکالر ریچی^{۱۰} استفاده کرد و ترکیبی بدست آورد که مشتق هموردای آن صفر می‌باشد و تانسور اینشتین نام گرفت

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R. \quad (3.1)$$

پس این عبارت را در رابطه (۱.۱) قرار داد و با استفاده از معادله پواسون برای پتانسیل نیوتنی و حد میدان ضعیف، ضریب α را محاسبه نمود و در نهایت معادلات اینشتین به شکل زیر بیان شد [۵]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

در حالت خلاء که ماده وجود ندارد $T_{\mu\nu} = 0$ و معادلات اینشتین با $G_{\mu\nu} = 0$ برابر می‌شود در نتیجه رابطه بالا به $R_{\mu\nu} = 0$ می‌رسد [۲].

^۷ Stress-energy tensor

^۸ Covariant derivative

^۹ Ricci tensor

^{۱۰} Ricci scalar

۲-۱ سیاهچاله

براساس نظریه حد چاندرااسخار^{۱۱} ستارگانی که دارای جرمی بیشتر از سه برابر جرم خورشید هستند بعد از اتمام سوخت هسته‌ای درون هسته ستاره، توسط گرانش خودشان طی فرآیندی فرو می‌ریزند و تبدیل به سیاهچاله می‌شوند. در واقع سیاهچاله ناحیه‌ای از فضا زمان است که در آن گرانش به قدری قوی است که حتی به نور هم اجازه گریز نمی‌دهد.

طبق قضیه بی‌مو جان ویلر^{۱۲} پس از تشکیل سیاهچاله و رسیدن به حالت تعادل تنها سه خاصیت فیزیکی مستقل در سیاهچاله‌ها قابل شناسایی است: جرم، بار الکتریکی و اندازه حرکت زاویه‌ای، که این سه کمیت خارج از سیاهچاله مشاهده پذیرند. سیاهچاله‌ها را عموماً بر مبنای جرمشان دسته بندی می‌کنند. بر این اساس سیاهچاله‌ها را می‌توان به چهار دسته تقسیم نمود. سیاهچاله‌های پر جرم با جرمی بین چند میلیون تا چند میلیارد برابر جرم خورشید که در مرکز تمام کهکشان‌ها وجود دارند. سیاهچاله‌های جرم متوسط که جرمی بین صد تا صد هزار برابر جرم خورشید دارند. سیاهچاله‌های ستاره‌وار که جرمی بین سه تا ده برابر جرم خورشید دارند و در آخر ریز سیاهچاله‌ها که بسیار کوچک هستند.

سیاهچاله شوارتزشیلد

در سال ۱۹۱۶ کارل شوارتزشیلد اولین پاسخ معادلات میدان اینشتین را ارائه داد. او معادلات اینشتین را در خلاء فرض کرد، یعنی

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (5.1)$$

و فضا-زمان را متقارن کروی در نظر گرفت در نتیجه به سیاهچاله کروی فاقد بار و فاقد تکانه زاویه‌ای رسید که به سیاهچاله شوارتزشیلد^{۱۳} معروف است. برای رسیدن به المان طول سیاهچاله شوارتزشیلد ابتدا المان طول فضا-زمان مینکوفسکی را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{r}^2 + \vec{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6.1)$$

^{۱۱}Chandrasekhar limit: نام حدی در نجوم است که وضعیت ستاره را بعد از انفجار مشخص می‌کند به طوری که اگر جرم هسته ستاره بعد از انفجار از حد چاندرااسخار کمتر بود هسته ستاره به کوتوله سفید تغییر می‌کند و اگر بیشتر بود هسته ستاره به ستاره نوترونی یا سیاهچاله تبدیل می‌شود. مقدار این حد تقریباً ۱٫۴ برابر جرم خورشید است.

^{۱۲}John Wheeler

^{۱۳}Schwarzschild black hole

می‌خواهیم معادلات اینشتین را در فضا-زمان خالی، ایستا و متقارن کروی حل کنیم بنابراین منطقی است که المان طول را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$ds^2 = -f(\tilde{r})dt^2 + g(\tilde{r})d\tilde{r}^2 + h(\tilde{r})\tilde{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (7.1)$$

با بازتعریف مختصات شعاعی به صورت $r = \tilde{r}\sqrt{h(\tilde{r})}$ المان طول به صورت زیر بدست می‌آید

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (8.1)$$

در نظر می‌گیریم بنابراین المان طول می‌شود $A(r) = e^{2\alpha(r)}$ و $B(r) = e^{2\beta(r)}$

$$ds^2 = -e^{2\alpha}dt^2 + e^{2\beta}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (9.1)$$

پایه‌های یکه را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned} w^t &= e^\alpha dt, \\ w^r &= e^\beta dr, \\ w^\theta &= r d\theta, \\ w^\phi &= r \sin\theta d\phi. \end{aligned} \quad (10.1)$$

با استفاده از معادله اول فرمالیسم کارتان^{۱۴}

$$dw^\rho = -\Omega_\nu^\rho \wedge w^\nu, \quad (11.1)$$

که $\Omega_\mu^\nu = \Gamma_{\mu\alpha}^\nu w^\alpha$ است و معادله دوم فرمالیسم کارتان

$$R_\nu^\mu = d\Omega_\nu^\mu + \Omega_\lambda^\mu \wedge \Omega_\nu^\lambda. \quad (12.1)$$

مولفه‌های غیر صفر تانسور ریمان با استفاده از رابطه بالا به دست می‌آید که به تبع آن مولفه‌های تانسور اینشتین را به صورت زیر داریم

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (13.1)$$

$$G_{tt} = \frac{2}{r}\beta'e^{-2\beta} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\beta}), \quad (14.1)$$

^{۱۴}Cartan's formalism

$$G_{rr} = \frac{2}{r} \alpha' e^{-2\beta} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\beta}), \quad (15.1)$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi} = \frac{1}{r} e^{-2\beta} (r\alpha'' + r\alpha'^2 - r\alpha'\beta' + \alpha' - \beta'). \quad (16.1)$$

از آنجا که حل را در فضای خلاء در نظر گرفتیم هر سه معادله بالا برابر صفر هستند و اگر معادله (14.1) و (15.1) را با هم جمع کنیم، داریم

$$\frac{2}{r} e^{-2\beta} (\alpha' + \beta') = 0. \quad (17.1)$$

با انتگرالگیری از این معادله رابطه بین $\alpha(r)$ و $\beta(r)$ را به صورت زیر داریم

$$\alpha(r) + \beta(r) = k, \quad (18.1)$$

که k ثابت است و می‌تواند هر مقداری داشته باشد. ما $k = 0$ را انتخاب می‌کنیم و داریم

$$\alpha(r) = -\beta(r). \quad (19.1)$$

معادله $G_{tt} = 0$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{1}{r^2} [r(1 - e^{-2\beta})]' = 0. \quad (20.1)$$

با انتگرال گیری از رابطه بالا داریم

$$e^{-2\beta} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (21.1)$$

M ثابت اختیاری است. با جایگذاری این مقادیر در رابطه (9.1) به المان طول شوارتزشیلد می‌رسیم

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (22.1)$$

که M متناظر با جرم سیاه‌چاله و t مختصه زمان است. این متریک در $r \rightarrow \infty$ به متریک مینکوفسکی می‌رسد.

شتاب ذره آزمون در میدان گرانش نیوتنی به صورت زیر است

$$g = -\frac{Gm}{r^2}, \quad (23.1)$$

که m جرم ذره و G ثابت گرانش نیوتنی است. در نسبت عام شتاب ذره آزمون در میدان گرانشی ضعیف به صورت زیر است

$$g = \frac{d^2 x^r}{dt^2} \simeq -\Gamma_{tt}^r = -\frac{M}{r^2}. \quad (24.1)$$

با مقایسه دو رابطه بالا $M = Gm$ است. همچنین اگر سرعت نور C باشد $g = \frac{-MC^2}{r^2}$ است بنابراین

$$M = \frac{Gm}{C^2}, \quad (25.1)$$

است و شعاع شوارتزشیلد را از رابطه زیر داریم

$$R_s = \frac{2Gm}{C^2}. \quad (26.1)$$

متریک شوارتزشیلد برای $r > R_s$ اعتبار دارد و شعاع هر جسمی که از شعاع شوارتزشیلدش کمتر شود تبدیل به سیاهچاله می‌شود.

شعاع شوارتزشیلد همان افق رویداد^{۱۵} سیاهچاله شوارتزشیلد است، در واقع افق رویداد مرز گذشته‌ی علیّی یک ناحیه از فضا-زمان است، به معنای دیگر هیچ سیگنال زمان گونه‌ای نمی‌تواند در زمان متناهی از داخل افق رویداد به بینهایت فرار کند یا به بیان ساده‌تر این که هیچ اطلاعاتی از درون آن نمی‌تواند به بیرون افق فرستاده شود [۳].

این متریک در $r = 0$ (به دلیل وجود r در مخرج جمله اول و دوم) و $r = 2M$ (طبق مخرج کسر جمله دوم) دارای تکینگی می‌باشد. در سال ۱۹۲۴ ادینگتون^{۱۶} نشان داد که تکینگی در شعاع شوارتزشیلد یک تکینگی مختصاتی است و با تغییر مختصات رفع می‌شود. با اسکالر کریشمان^{۱۷} نشان می‌دهیم که تکینگی در $r = 0$ یک تکینگی فیزیکی می‌باشد. این اسکالر به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$R_{\alpha\beta\sigma\gamma}R^{\alpha\beta\sigma\gamma} \propto \frac{M^2}{r^6}, \quad (27.1)$$

که با استفاده از این رابطه متوجه می‌شویم برای $r \rightarrow 0$ مقدار بینهایت را به خود می‌گیرد که نشان می‌دهد این تکینگی از نوع تکینگی فیزیکی می‌باشد. اما از معادله‌ی (۲۷.۱) دیده می‌شود که تکینگی دوم ($r = 2M$)، تکینگی مختصاتی می‌باشد به این معنی که با تغییر مختصات می‌توان آن را از بین برد. البته قابل ذکر است که این شعاع همان افق سیاهچاله می‌باشد و از اهمیت فیزیکی بالایی برخوردار است [۱].

به عنوان یک مثال متریک شوارتزشیلد را بر اساس مختصات کروسکال^{۱۸} بررسی می‌کنیم. طبق معادله (۲۲.۱) برای فوتون‌های درون‌سو و برون‌سو رابطه زیر را داریم [۶]

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (28.1)$$

^{۱۵}Event horizon

^{۱۶}Eddington

^{۱۷}Kretschmann's scalar

^{۱۸}Kruskal

که با انتگرال‌گیری از این رابطه داریم

$$\pm t + r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| = C_{\pm}, \quad (29.1)$$

که C_{\pm} ثابت انتگرال‌گیری است. اگر r^* را به صورت زیر تعریف کنیم

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|, \quad (30.1)$$

داریم

$$r^* \pm t = C_{\pm}, \quad (31.1)$$

که برای فوتون‌های درون‌سو $v = C_+$ و برای فوتون‌های برون‌سو $u = C_-$ در نظر می‌گیریم. اگر t و r^* را به شکل زیر تعریف کنیم

$$r^* = \frac{1}{2}(v + u) \quad t = \frac{1}{2}(v - u) \quad (32.1)$$

در نتیجه المان طول شوارتزشیلد به صورت زیر در می‌آید

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dudv + r^2 d\Omega^2, \quad (33.1)$$

که همچنان در $r = 2M$ تکینگی داریم. اکنون دو مختصه جدید U و V را معرفی می‌کنیم که با u و v مختصات قبلی به صورت زیر مرتبط هستند

$$U = -e^{-u/4M}, \quad V = -e^{-v/4M}, \quad (34.1)$$

با این تعریف داریم

$$ds^2 = - \frac{32M^2}{r} e^{-r/2M} dU dV + r^2 d\Omega^2, \quad (35.1)$$

که واضح است تکینگی مختصاتی در رابطه (35.1) از بین رفته است اما تکینگی در $r = 0$ همچنان باقی است [3].

۳-۱ مشکلات رصدی

حدود یک قرن از معرفی نسبیت عام می‌گذرد، این نظریه و مدل استاندارد کیهان‌شناسی که بر اساس نسبیت عام ساخته شده است، به درستی پاسخگوی بسیاری از آزمون‌ها بوده‌اند این در حالی است که

نسبیت عام برای توجیه برخی مشاهدات اخیر ناتوان مانده است و به همین منظور نظریات جایگزین جدیدی مطرح شد.

در سال‌های اخیر مشاهدات فیزیک نجومی و کیهان‌شناسی یک تصویر جدید از جهان را نشان داده است. اگر جهان را تنها شامل میدان‌های مادی شناخته شده در نظر بگیریم از نظر نسبیت عام انبساط جهان همیشه کند شونده است در صورتی که شواهد رصدی اخیر خبر از انبساط تند شونده عالم می‌دهد. در زیر به بررسی شواهد رصدی می‌پردازیم که انبساط تندشونده کیهان را تایید می‌کنند.

داده‌های ابرنواختری

پرچم‌ترین ستاره‌های عالم زندگی خود را با انفجاری عظیم به نام ابرنواختر^{۱۹} به پایان می‌برند. ابرنواخترها را بر اساس طیف دریافتیشان طبقه‌بندی می‌کنیم. آنهایی که در طیف دریافتیشان هیدروژن وجود ندارد نوع I و آنهایی که طیفشان هیدروژن دارد نوع II نامیده می‌شوند که نوع I خود به سه دسته تقسیم می‌شود: I_a آنهایی که در طیفشان اثر سیلیکون یونیزه شده وجود دارد، I_b آنهایی که خط هلیوم دارند، I_c آنهایی که نه خط سیلیکون و نه خط هلیوم دارند.

ابرنواختر نوع I_a وقتی تشکیل می‌شود که در یک سیستم دوتایی یکی از ستاره‌ها کوتوله سفید باشد. بعد از طی دوران تحول ستاره واکنش‌های همجوشی مرکز ستاره تمام می‌شود و هسته باقی مانده ستاره را کوتوله سفید می‌نامند. گرانش کوتوله سفید مواد روی سطح ستاره همدم را به سمت خود می‌کشد و جرم آن را به 1.4 برابر جرم خورشید می‌رساند (حد چاندراسخار) انتقال ماده تا زمانی است که دمای سطح ستاره به 10^7 کلوین برسد. در این زمان واکنش‌های هسته‌ای شروع می‌شوند این واکنش‌هایی که هیدروژن سوز هستند درخشندگی ستاره را به شدت بالا می‌برند. درخشندگی یک ابرنواختر می‌تواند 4×10^9 برابر درخشندگی خورشید باشد این ستاره‌ها به دلیل اینکه دارای درخشندگی ذاتی یکسان هستند شمع استاندارد به حساب می‌آیند [۷].

دو تیم به رهبری آدام رییس^{۲۰} و شائول پرلماتر^{۲۱} که در حال بررسی ابرنواخترهای تمام آسمان بودند. برای این کار از دو بخش کوچک و مشابه آسمان دو تصویر تهیه و مقایسه کردند. ابتدا ابرنواختر مناسب را پیدا کردند و بعد انتقال به سرخ^{۲۲} (Z) و درخشندگی آن را اندازه‌گیری کردند، باید منحنی‌های نوری را در طول زمان بررسی و تحلیل می‌کردند تا بتوانند آن را با ابرنواخترهای مشابه دیگر در فواصل مشخص دیگر مقایسه کنند. آن‌ها مدول فاصله را بر حسب Z گرفتند و متوجه شدند درخشندگی ابرنواخترها از آنچه انتظار داشتند کمتر است، گویی آنها به همراه کهکشان میزبان سریعتر

^{۱۹}Supernova

^{۲۰}Adam Riess

^{۲۱}Saul Perlmutter

^{۲۲}Red Shift

از ما دور می‌شدند. نتیجه این مشاهدات این بود که انبساط کیهان برخلاف تصور ما تندشونده است. اما اینکه چه چیزی باعث این انبساط شتابدار است چالشی است که همچنان جواب قطعی برای آن پیدا نشده است.

تابش پس زمینه کیهانی

دورترین بخش کیهان قابل مشاهده مربوط به زمان جدایی فوتون‌ها از شاره کیهانی است. سیگنال‌هایی که امروز در طول موج میکرومتر دریافت می‌کنیم، باقی مانده‌های فوتون‌های اولیه کیهان است که به دلیل انبساط، انتقال به سرخ پیدا کرده‌اند.

تابش پس زمینه کیهانی صورت همسانگرد در تمام آسمان به وسیله تلسکوپ رادیویی پنزیاس ویلسون^{۲۳} در سال ۱۹۶۳ کشف شد [۸]. اکنون این تابش به صورت تابش جسم سیاه کروی که در دمای $T = 2.725 \pm 0.001 K$ قرار دارد در نظر گرفته می‌شود. بنابراین به کمک طیف تابش جسم سیاه می‌توان انرژی تابشی را بدست آورد

$$\varepsilon_{rad} = \rho_{rad} C^2 = \alpha T^4, \quad (36.1)$$

ρ_{rad} چگالی انرژی تابشی، C سرعت نور و α ضریب استفان-بولتزمن است. در دمای کنونی تابش پس زمینه کیهانی مقدار چگالی انرژی تابشی

$$\varepsilon_{rad}(t_0) = 4.17 \times 10^{-14} \text{ Jm}^{-3},$$

است (t_0 بیانگر زمان حال است). اگر نسبت چگالی انرژی تابشی به چگالی بحرانی عالم ($\rho_c = 9.2 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^{-3}$) را محاسبه کنیم داریم

$$\Omega_{rad} = \frac{\rho_{rad}}{\rho_c} \approx 5 \times 10^{-5}, \quad (37.1)$$

که با محاسبه این نسبت برای ماده باریونی $\Omega_{bar} \approx 0.04$ می‌شود، اما چگالی واقعی کیهان از چگالی بحرانی دور نیست بنابراین علاوه بر مواد باریونی و چگالی انرژی تابشی که حدود ۵ درصد چگالی تمام کیهان است دانشمندان به دنبال جوابی برای ۹۵ درصد چگالی باقی مانده کیهان هستند.

تشکیل ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی

در یک دوره زمانی برخی از نواحی کیهان تقریباً یکنواخت، به دلیل ناپایداری گرانشی از بقیه نقاط چگال‌تر بودند. به تدریج به دلیل گرانش قوی‌تر در نواحی چگال‌تر، ماده موجود اطراف خود را

^{۲۳} Penzias wilson radio telescope

جذب نموده و چگال‌تر شدند و در نتیجه ساختارهایی مثل ابرهای گازی، ستاره‌ها، کهکشان‌ها و سایر ساختارهای نجومی پدید آمدند. انبساط هابلی موجب کند شدن روند رشد این ساختارهای فراچگال، که به دلیل ناپایداری گرانشی در حال شکل‌گیری هستند می‌شود. البته اندازه‌گیری رشد ساختارها نشان می‌دهد عاملی که باعث کند شدن رشد آن‌ها و انبساط کیهان می‌شود تنها ناشی از انبساط هابلی نیست و مقداری بزرگتر از آن دارد و به صورت شتابدار است. اما چه چیزی دلیل انبساط شتابدار کیهان است؟

سن کیهان

به دو روش سن کیهان تخمین زده می‌شود.

الف: اندازه‌گیری انبساط عالم و بازگشت به مه‌بانگ^{۲۴}

با اندازه‌گیری انبساط عالم و بازگشت به مه‌بانگ با توجه به رابطه هابل^{۲۵} می‌توان تخمینی از سن جهان داشت. نرخ انبساط با پارامتر هابل داده می‌شود. بنابراین اولین تخمین از سن عالم از نظر مرتبه بزرگی با عکس پارامتر هابل ارتباط دارد. البته در این تخمین، تغییرات سرعت انبساط که به دلیل گرانش است نادیده گرفته می‌شود

$$t. \approx H_0^{-1} = 9.77h^{-1} \times 10^9 \text{ yrs}, \quad (38.1)$$

که $h = 0.7$ است. این رابطه، رابطه تخمینی برای محاسبه سن کیهان است، بنابراین سن عالم در این مدل برابر ده میلیارد سال است.

ب: مشاهده پیرترین ستارگان

جهان ما از پیرترین ستاره‌ها پیرتر است بنابراین پیرترین ستاره‌ها می‌توانند معیاری از عمر عالم باشند. پیرترین ستاره‌ها در خوشه‌های کروی قرار دارند. از میان ستاره‌های مشاهده شده مثلاً ستاره خوشه کروی $M4$ در کهکشان راه شیری است که از فرآیند سرد شدن کوتوله‌های سفید به وجود آمده است و سنی حدوداً برابر ۱۳ میلیارد سال دارد. همانطور که می‌بینید دو عدد که یکی از محاسبات و دیگری از مشاهدات بدست آمد متفاوت است و باید به دنبال دلیل توجیه‌کننده‌ای برای این اختلاف باشیم.

^{۲۴} Big bang

^{۲۵} Hubble's law: قانون هابل $v = H \cdot d$ است که d فاصله کهکشان از ما است و H ثابت هابل است و v سرعت دور شدن از ما به علت انبساط جهان هستی می‌باشد.

۴-۱ راه حل مشکلات رصدی

مشاهدات رصدی که از ابرنواخترهای نوع I_a و طیف اختلالات میکروموج‌های کیهانی و... بدست آمده است نشان می‌دهد که عالم دارای انبساط تند شونده می‌باشد که با معادلات میدان اینشتین ناسازگار می‌باشد.

طبق معادلات اینشتین، عالمی که تنها دارای ماده معمولی و ماده تاریک باشد باید دارای انبساط کاهنده باشد. برای ایجاد ارتباط بین معادلات و مشاهدات دو راهکار وجود دارد [۹].

اصلاح بخش مادی معادلات اینشتین با اضافه کردن یک تانسور انرژی-تکانه جدید که مربوط به انرژی تاریک ($T_{\mu\nu}^{dark}$) است به سمت راست معادلات میدان به شکل زیر انجام می‌شود

$$G_{\mu\nu} = \Lambda\pi G(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{dark}), \quad (39.1)$$

و اصلاح بخش هندسی معادلات میدان، به معنی اضافه کردن یک مولفه هندسه تاریک ($G_{\mu\nu}^{dark}$) به سمت چپ معادلات میدان به صورت

$$G_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}^{dark} = \Lambda\pi GT_{\mu\nu}, \quad (40.1)$$

است. در ادامه برای هر یک از دو راه حل اشاره شده در بالا مثالی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱-۴-۱ اصلاح بخش مادی

انرژی تاریک

با وارد کردن متریک رابرتسون واکر (FRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right], \quad (41.1)$$

و در نظر گرفتن کیهان به عنوان شاره کامل در معادله اینشتین، به معادلات فریدمان می‌رسیم:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \quad (42.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (43.1)$$

برای داشتن عالمی با شتاب تند شونده باید $\ddot{a} > 0$ باشد این شرط باتوجه به معادلات فوق نشان می‌دهد که $P < -\frac{\rho}{3}$ است که با ماهیت ماده معمولی و همچنین ماده تاریک سازگار نیست بنابراین به

مولفه‌ای با فشار منفی نیاز داریم که انرژی تاریک نام دارد. در رابطه با ماهیت این نوع انرژی اطلاعات کمی وجود دارد، اما این واقعیت که جهان به طور سراسری و یکنواخت شتابدار است نشان دهنده این است که چگالی انرژی تاریک در همه جا یکسان است. ۷۳ درصد از چگالی عالم را انرژی تاریک، ۲۳ درصد را ماده تاریک و تنها ۴ درصد را ماده معمولی تشکیل داده است. کاندیدای مختلفی برای انرژی تاریک و در واقع برای اصلاح بخش مادی معادلات میدان اینشتین معرفی شده‌اند. مانند ثابت کیهان‌شناسی، میدان کی-اسنس^{۲۶}، میدان کویت-اسنس^{۲۷} و... در اینجا نگاهی گذرا به مهمترین کاندیدا یعنی ثابت کیهان‌شناسی می‌اندازیم.

ثابت کیهان‌شناسی

ثابت کیهان‌شناسی اولین کاندیدای انرژی تاریک است که مرتبط با چگالی انرژی خلاء در نظریه میدان کوانتومی QFT است. این ثابت را به سمت راست معادلات میدان اینشتین اضافه می‌کنیم

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = \Lambda\pi GT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (44.1)$$

به بیان دیگر تانسور انرژی-تکانه مربوط به انرژی تاریک را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$T_{\mu\nu}^{DE} = -\frac{\Lambda}{\Lambda\pi G}g_{\mu\nu}, \quad (45.1)$$

در پس زمینه FRW با قسمت فضایی تخت، معادلات اینشتین، معادله فریدمان و معادله شتاب زیر را می‌دهند

$$H^2 = \frac{\Lambda\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (46.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (47.1)$$

با توجه به اینکه پارامتر معادله‌ی حالت برای ثابت کیهان‌شناسی ($\omega = \frac{P}{\rho}$) برابر ۱- می‌باشد یعنی $P = -\rho$ ، بنابراین مقدار مثبت این ثابت منجر به شتاب مثبت برای عالم می‌شود. این مدل که ΛCDM ^{۲۸} نام دارد و ثابت کیهان‌شناسی را به عنوان کاندیدای انرژی تاریک در خود دارد، با مشاهدات رصدی نیز سازگار است، اما این ثابت دارای مشکلاتی نیز می‌باشد که باعث شده است به دنبال جایگزین دیگری برای انرژی تاریک باشیم. مهمترین این مشکلات چنین است:

^{۲۶}K-essence field

^{۲۷}Quintessence field

^{۲۸} $\Lambda - Cold Dark Matter$ در این مدل جهان از ماده باریونی، ماده تاریک و ثابت کیهان‌شناسی تشکیل شده

است.

۱. ناشناخته بودن منشا ثابت کیهان شناسی.
۲. اختلاف زیاد بین مقدار چگالی انرژی خلاء پیش‌بینی شده توسط QFT و مقدار بدست آمده از مشاهدات [۱۰].

۲-۴-۱ اصلاح بخش هندسی

در مدل‌های اصلاح هندسه فرض بر این است که در فواصل کیهانی قانون گرانش حاکم بر جهان با گرانش معمول اینشتین تفاوت دارد. یکی از مهمترین شاخه‌های این مدل نظریه‌های جهان شامه‌ای است که بر این اصل استوار هستند که جهان دارای ابعادی بیشتر از چهار بعد است (که جهان توده^{۲۹} نام دارند) و جهان چهار بعدی ما (جهان شامه^{۳۰}) به صورت سطحی درون جهان توده قرار دارد.

مدل DGP

یکی از بهترین مدل‌های جهان شامه، مدل DGP ^{۳۱} است، در این مدل جهان توده یک جهان پنج بعدی است که جهان ما به صورت یک ابرسطح چهار بعدی درون آن غوطه‌ور شده است [۱۱] و [۱۲]. ثابت پلانک در توده را با M_{pl5D} و در شامه را با M_{pl4D} تعریف می‌کنند با استفاده از این دو فاصله r_c به صورت

$$r_c = \frac{M_{pl4D}^2}{2M_{pl5D}^3}, \quad (48.1)$$

تعریف می‌شود. در فواصل بسیار بزرگتر از فاصله r_c تصحیحاتی در گرانش معمولی اینشتینی ایجاد می‌کند. این مدل می‌تواند شتاب تندشونده را بدون نیاز به هرگونه انرژی تاریک توضیح دهد. مدل DGP در سال ۲۰۰۰ میلادی توسط دوالی، گابادادزه و پوراتی ارائه شد. کنش گرانشی این مدل به صورت زیر است

$$(49.1)$$

$$S = \frac{M_{pl5D}^3}{2} \int \sqrt{-g_5} R_5 d^5x + \frac{M_{pl4D}^2}{2} \int \sqrt{-g_4} R_4 d^4x + S_m(g_{\mu\nu}) + S_B(g_{AB}),$$

جملات دوم و سوم مربوط به کنش در فضای چهار بعدی و بقیه جملات ناشی از بعد پنجم هستند. بدین صورت که در فواصل کوچکتر از r_c جمله چهار بعدی و در فواصل بزرگتر از آن جمله پنج بعدی غالب است و $(g_{\mu\nu})g_{AB}$ متریک توده (شامه)، $(R_4)R_5$ در توده (شامه) است و در رابطه (۴۹.۱)

^{۲۹} Bulk

^{۳۰} Brane

^{۳۱} G.Dval-G.Gabadadze-M.Porrati

اندیس‌های $3, \dots, 0$ و $\mu, \nu = 0, \dots, 4$ هستند. دو جمله سوم و چهارم کنش ماده در شامه و توده را نشان می‌دهد. $g_{\mu\nu}$ متریک القایی روی شامه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_{\mu\nu} = g_{AB}(x^\mu, y = 0) \quad (50.1)$$

شامه در $y = 0$ قرار گرفته است.

معادله فریدمان در این مدل به صورت زیر است [۱۱] و [۱۲]:

$$H^2 + \frac{K}{a^2} \pm \frac{1}{r_c} \sqrt{H^2 + \frac{K}{a^2}} = \frac{\Lambda\pi G}{3} \Sigma\rho_i, \quad (51.1)$$

که $H = \frac{\dot{a}}{a}$ ثابت هابل ρ_i مولفه‌های انرژی کیهان هستند که می‌توانند شامل تابش، ماده‌ی باریونی و ماده تاریک سرد باشند و K که نشان دهنده انحنای کیهان است و می‌تواند مقادیر $K = 0$ ، $K < 0$ و $K > 0$ را بگیرد که به ترتیب به کیهان تخت، باز و بسته اشاره دارد. برای راحتی کار، روابط را در کیهان تخت در نظر می‌گیریم

$$H^2 \pm \frac{H}{r_c} = \frac{\Lambda\pi G}{3} \Sigma\rho_i. \quad (52.1)$$

معادله بالا که با علامت مثبت و منفی بدست آمده، مربوط به جایگذاری شامه در توده است. علامت منفی که $sDGP$ یا فاز خود شتابی نام دارد تنها با اثر بعد اضافه شتاب کیهان را نتیجه می‌دهد، ولی با علامت مثبت که فاز نرمال یا $nDGP$ نام دارد، نمی‌تواند تنها با بعد اضافه این شتاب را نتیجه دهد و نیاز به اضافه کردن انرژی تاریک دارد. در اینجا نگاهی گذرا بر این دو شاخه داریم [۱۳].

فاز نرمال: در فاز نرمال معادله فریدمان به صورت زیر است

$$H^2 + \frac{H}{r_c} = \frac{\Lambda\pi G}{3} \Sigma\rho_i, \quad (53.1)$$

هنگامی که جمله مثبت $\frac{H}{r_c}$ به طرف راست آورده شود به دلیل منفی شدن علامتش نمی‌تواند شتاب تند شونده کیهان را بدهد بنابراین نیاز به انرژی تاریک داریم که به این منظور ثابت کیهان شناسی را اضافه می‌کنیم [۱۱] و [۱۲]

$$H^2 + \frac{H}{r_c} = \frac{\Lambda\pi G}{3} \Sigma\rho_i + \frac{\Lambda}{3}, \quad (54.1)$$

که با مرتب کردن معادله و انتقال $\frac{H}{r_c}$ به سمت دیگر معادله به رابطه زیر می‌رسیم [۱۱]

$$H^2 = \frac{\Lambda\pi G}{3} \Sigma\rho_i + \frac{\Lambda}{3} - \frac{H}{r_c}, \quad (55.1)$$

که اگر در آن

$$\rho_{eff} = \frac{1}{\Lambda\pi G}(\Lambda - \frac{3}{r_c}H), \quad (56.1)$$

باشد، داریم

$$H^2 = \frac{\Lambda\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{eff}). \quad (57.1)$$

ρ_{eff} نقش انرژی تاریک را بر عهده دارد و ρ_m چگالی ماده است.

فاز خود شتابی: در فاز خود شتابی معادله فریدمان به صورت زیر نوشته می شود

$$H^2 - \frac{H}{r_c} = \frac{\Lambda\pi G}{3}\Sigma\rho_i, \quad (58.1)$$

این معادله را به صورت زیر نیز می توان نوشت

$$H^2 = \frac{\Lambda\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{eff}), \quad (59.1)$$

که در آن

$$\rho_{eff} = \frac{3H}{\Lambda\pi Gr_c}. \quad (60.1)$$

این جمله که می تواند نقش انرژی تاریک را ایفا کند شتاب تندشونده کیهان را توجیه می کند، از جنس هندسه است، و با اصلاح هندسه بدست آمده است. ولی این مدل دارای مشکل ناپایداری شبح است به این معنی که مدهایی در نظریه وجود دارند که جمله انرژی جنبشی برای آن ها با علامت مخالف ظاهر می شود. این ناپایداری باعث مردود شدن این مدل شده است [۱۳].

۵-۱ حد جداسازی DGP

به زبان ساده برای اعمال حد جداسازی به یک نظریه، حدی را انتخاب می کنیم که در آن متریک غیر دینامیکی شود و تنها میدان اسکالر پویا باقی بماند، به طور مثال قدرت میدان گرانشی که M_{pl} است را به بینهایت برده و ضریب میدان اسکالر را صفر قرار می دهیم به طوری که ضرب این دو متناهی باقی بماند و تنها جملاتی که شامل جفت شدگی این دو می باشد باقی مانده و باقی جملات حذف می شوند و در آخر به لاگرانژی می رسمیم که میدان دینامیکی اش، میدان اسکالر است.

قصد داریم به وسیله معادلات حرکت غیرخطی حد جداسازی مدل DGP را بررسی کنیم و نشان دهیم که جملات جفت شده اسکالر و تانسور باقی می ماند، برای این کار از کنش مدل DGP در

فرمالیسم ADM شروع می‌کنیم [۱۴]

$$S = \frac{M_{pl}^2}{2} \int d^4x dy \sqrt{g} (R\delta(y) + \frac{m_c}{2} N(R + K^\nu - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu})), \quad (۶۱.۱)$$

در این جا مختصات $۴ + ۱$ بعدی است و با $x^M = (x^\mu, y)$ و $\mu = ۰, \dots, ۳$ نشان داده می‌شود، که R و g به ترتیب دترمینان و انحنای ذاتی مربوط به متریک چهار بعدی القایی $g_{\mu\nu}(x, y)$ هستند. m_c نقش جرم گرویتون را بازی می‌کند و برابر با معکوس r_c می‌باشد. $K = g^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$ رد تانسور انحنای خارجی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N} (\partial_y g_{\mu\nu} - \nabla_\mu N_\nu - \nabla_\nu N_\mu), \quad (۶۲.۱)$$

∇_μ مشتق هموردا نسبت به متریک $g_{\mu\nu}$ است. میدان اسکالر گذار N و بردار انتقال N_μ معرفی می‌کنیم

$$g_{\mu y} \equiv N_\mu = g_{\mu\nu}N^\nu, \quad g_{yy} \equiv N^2 + g_{\mu\nu}N^\mu N^\nu. \quad (۶۳.۱)$$

معادلات حرکت نظریه با وردش کنش نسبت به $g_{\mu\nu}$ ، N و N_μ بدست می‌آید. با وردش کنش نسبت به $g_{\mu\nu}$ داریم

$$G_{\mu\nu} - m_c(K_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}K) = T_{\mu\nu}/M_{pl}^2, \quad (۶۴.۱)$$

$G_{\mu\nu}$ تانسور اینشتین چهار بعدی از متریک القایی و $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تکانه است. وردش کنش نسبت به N به شکل زیر است

$$R = K^2 - K_{\mu\nu}^2. \quad (۶۵.۱)$$

می‌توان معادله (۶۲.۱) را به گونه‌ای نوشت که تنها شامل متریک القایی چهار بعدی باشد. از معادله (۶۴.۱) K و $K_{\mu\nu}$ را برحسب R و $R_{\mu\nu}$ بدست می‌آوریم و با جایگذاری در رابطه (۶۵.۱) داریم

$$R = \frac{R^2 - 3R_{\mu\nu}^2}{3m_c^2}. \quad (۶۶.۱)$$

حال حد جداسازی را برای معادله بالا بررسی می‌کنیم. هدف این است که نشان دهیم در حد جداسازی مدل DGP برهم‌کنش‌های غیرخطی میدان تانسوری حذف نمی‌شوند. حد جداسازی برای مدل DGP در نزدیکی یک سیاهچاله به جرم M به شرح زیر است

$$M_{pl} \longrightarrow \infty, \quad m_c \longrightarrow 0, \quad M \longrightarrow \infty, \quad (۶۷.۱)$$

مقادیر زیر ثابت و متناهی نگه داشته می‌شوند

$$\Lambda \equiv (M_{pl} m_c^2)^{1/3}, \quad \frac{M}{M_{pl}}. \quad (68.1)$$

برای اعمال این حد به معادله (66.1) باید دو طرف معادله را در M_{pl} ضرب کنیم و داریم

$$\bar{R} = \frac{\bar{R}^2 - 3\bar{R}\bar{R}_{\mu\nu}}{3\Lambda^3}, \quad (69.1)$$

که $\bar{R} \equiv M_{pl}R$ و $\bar{R}_{\mu\nu} \equiv M_{pl}R_{\mu\nu}$ هستند. حد جداسازی را مستقیماً در معادله (69.1) اعمال می‌کنیم و بسط R را به این صورت داریم

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \square\bar{h} - \partial^\mu\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{h}\square\bar{h}}{M_{pl}}\right), \\ \bar{R}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\square\bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\alpha\bar{h}_{\alpha\mu} - \partial_\nu\partial^\alpha\bar{h}_{\alpha\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\bar{h}) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{h}\square\bar{h}}{M_{pl}}\right), \end{aligned} \quad (70.1)$$

بعد جرمی میدان $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv M_{pl}(g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})$ واحد است و در این حد ثابت نگه داشته می‌شود. ما عبارات غیرخطی \bar{R} و $\bar{R}_{\mu\nu}$ را بر حسب توان‌های \bar{h} بسط دادیم و حد جداسازی را اعمال کردیم. جملاتی که شامل M_{pl} نمی‌باشند باقی می‌مانند. حال یک انتقال روی $h_{\mu\nu}$ می‌زنیم

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\pi, \quad (71.1)$$

بعد جرمی میدان π نیز واحد است و در حد جداسازی ثابت نگه داشته می‌شود. با جایگذاری

معادله (71.1) در (69.1) به معادله زیر می‌رسیم

$$3\square\pi + \tilde{R} = \frac{(\square\pi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2}{\Lambda^3} + \frac{\tilde{R}^2 - 3\tilde{R}\tilde{R}_{\mu\nu}}{3\Lambda^3} + \frac{\tilde{R}\square\pi - 2\tilde{R}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\pi}{\Lambda^3} \quad (72.1)$$

\tilde{R} و $\tilde{R}_{\mu\nu}$ جملات خطی سمت راست معادله (70.1) را نشان می‌دهد که تا زمانی که قیدی برای صفر کردن $\tilde{R}_{\mu\nu}$ ها نداشته باشیم در حد جداسازی جملات غیرخطی داریم اما اگر \tilde{R} و $\tilde{R}_{\mu\nu}$ صفر شوند یعنی در فضای تخت باشیم معادله بالا به

$$3\square\pi = \frac{(\square\pi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2}{\Lambda^3}, \quad (73.1)$$

تقلیل می‌یابد که همانطور که در فصل بعدی خواهیم دید معادله حرکت گالیلئون مرتبه سه است [14].

۶-۱ نتیجه گیری

در این فصل ابتدا به تاریخچه نسبیت خاص و عام پرداختیم. گفتیم که اینشتین گرانش را مانند یک نیرو در نظر نگرفت بلکه به شکل یک عامل هندسی مطرح کرد. معادلات اینشتین و جواب‌های معادلات اینشتین که منجر به سیاه‌چاله می‌شود را بررسی کردیم و نگاهی گذرا به متریک شوارتزشیلد انداختیم. در ادامه بیان کردیم که نسبیت عام برای توجیه برخی از مشاهدات رصدی اخیر که نشان از شتاب تندشونده عالم دارد، ناتوان مانده است و به همین منظور نظریات جایگزینی مطرح شد، که به دو دسته‌ی اصلاح بخش مادی و اصلاح بخش هندسی معادلات اینشتین تقسیم می‌شوند. ما برای دسته‌ی اول ثابت کیهان شناسی را بیان نمودیم و برای دسته‌ی دوم مدل DGP را به صورت مختصر توضیح دادیم. در نهایت حد جداسازی را بر این مدل اعمال کردیم و نشان دادیم برای این مدل در این حد جملات جفت شده اسکالر تانسوری باقی می‌مانند.

فصل ۲

معرفی گالیئون

۱-۲ مقدمه

همان‌طور که در فصل قبل گفته شد شاخه خود شتابی مدل DGP با شبیح همراه است که این مدل را نامعتبر می‌سازد. این مشکل در قالب یک لاگرانژی چهار بعدی مؤثر قابل حل می‌باشد که این لاگرانژی تا مقیاس شعاع هابل معتبر است. در این نظریه یک میدان اسکالر وجود دارد که ما آن را با نماد π نشان خواهیم داد. چون کنش این نظریه تحت تبدیل گالیله‌ای $C_\mu \rightarrow \partial_\mu \pi + C_\mu$ ، که در آن C_μ یک بردار ثابت است، ناورد است، به میدان π میدان گالیئون می‌گوئیم و این نظریه، نظریه گالیئون نام دارد. نظریه گالیئون از مدل DGP الهام گرفته شده و شتاب جهان را بدون نیاز به انرژی تاریک و یا ثابت کیهان شناسی توضیح می‌دهد. در معادلات حرکت آن به ازای هر میدان حداکثر مشتق مرتبه‌ی دوم زمانی وجود دارد ولی لاگرانژی آن شامل مشتقات مرتبه‌ی بالاتر است. در فواصل منظومه شمسی به علت وجود اثرات غیر خطی π ، این نظریه قسمت‌های منظومه شمسی را برآورده نمی‌کند برای حل این مشکل از اثر واینشتاین^۱ برای از بین بردن اثرات غیر خطی π در فواصل مورد نظر استفاده می‌شود. طبق این نظریه در چهار بعد فقط پنج جمله غیر خطی می‌توان ساخت که شبیح نداشته باشد.

ابتدا نظریه گالیئون را در فضا-زمان تخت بررسی می‌کنیم و سه فرض برای میدان π در نظر می‌گیریم که طبق آن‌ها لاگرانژی‌ها در چهار بعد و معادله حرکت مربوطه را بدست می‌آوریم. در آخر میدان گالیئون را در فضا زمان دینامیکی در نظر می‌گیریم. با فرض جفت شدگی کمینه‌ی گالیئون و متریک، معادلات گالیئون و متریک حداکثر دارای مشتقات مرتبه‌ی سوم هستند و نشان خواهیم داد

^۱Vainshtein effect

که جفت شدگی غیرکمیته گالیئون با تانسورهای انحنا تمام مشتقات زمانی مرتبه‌ی بالاتر از دو معادله حرکت را حذف می‌کند و در این صورت فقط معادلات مرتبه‌ی دوم بدون هیچ درجه آزادی جدیدی بدست می‌آید و باعث انحراف از مدل اصلی گالیئون می‌شود [۱۵].

۲-۲ ساختار π

نشان می‌دهیم که در مقیاس‌های کوتاه‌تر از شعاع هابل یک حل کیهان‌شناسی را می‌توان مانند یک اختلال کوچک از فضای مینکوفسکی در نظر گرفت و در ادامه عامل این انحراف از متریک مینکوفسکی را میدان π می‌دانیم و ساختار π را مشخص می‌کنیم.

ما در این‌جا برای داشتن یک حل با تقریب دوسویه مختصاتی را انتخاب می‌کنیم که انحراف از متریک مینکوفسکی را با ضریب $H^2 |\vec{x}|^2$ داشته باشد که $|\vec{x}|$ فاصله فیزیکی از ناظر همراه است. انتخاب چنین مختصاتی منحصر به فرد نیست و ما پیمانه‌ی نیوتنی را انتخاب می‌کنیم که $g_{,i}$ ها حذف و متریک فضایی متقارن می‌شود

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\psi)d\vec{x}^2, \quad (1.2)$$

به طور دقیق‌تر اگر τ و \vec{y} مختصات همراه FRW باشند

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 d\vec{y}^2, \quad (2.2)$$

برای رسیدن انحراف با ضریب $H^2 |\vec{x}|^2$ تغییر مختصات زیر را اعمال می‌کنیم

$$\tau = t - \frac{1}{4} H |\vec{x}|^2, \quad \vec{y} = \frac{\vec{x}}{a} \left[1 + \frac{1}{4} H^2 |\vec{x}|^2 \right], \quad (3.2)$$

به صورت موضعی به طور مثال برای $|\vec{x}| \ll H^{-1}$ ، متریک را به صورت زیر داریم

$$ds^2 \simeq - \left[1 - (\dot{H} + H^2) |\vec{x}|^2 \right] dt^2 + \left[1 - \frac{1}{4} H^2 |\vec{x}|^2 \right] d\vec{x}^2, \quad (4.2)$$

با مقایسه متریک (۱.۲) و (۴.۲) مشخص می‌شود که

$$\Phi = -\frac{1}{4} (\dot{H} + H^2) |\vec{x}|^2, \quad \Psi = \frac{1}{4} H^2 |\vec{x}|^2. \quad (5.2)$$

جهت راحت‌تر شدن مسئله Ψ را بر حسب Φ می‌نویسیم بنابراین با مختصات اندکی متفاوت که در آن متریک با یک ضریب هم‌مدیس انحراف از متریک مینکوفسکی را دارد، کار می‌کنیم. ضعف چنین

متریکی این است که در همه‌ی زمان‌ها به متریک مینکوفسکی نزدیک نیست. حول $t = 0$ و $\vec{x} = 0$ تبدیلات پیمانه‌ای بینهایت کوچک مورد نیاز است که عبارتند از

$$\xi_i = -\frac{1}{4}(\dot{H} + H^2)(|\vec{x}|^2 t + \frac{1}{3}t^3), \quad \xi_i = \frac{1}{4}(\dot{H} + H^2)x_i t^2, \quad (6.2)$$

که تحت آن متریک (۱.۲) به صورت زیر در می‌آید

$$ds^2 \simeq \left[1 - \frac{1}{4}H^2|\vec{x}|^2 + \frac{1}{4}(\dot{H} + H^2)t^2\right](-dt^2 + d\vec{x}^2), \quad (7.2)$$

و پتانسیل نیوتنی شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$\Phi = -\frac{1}{4}H^2|\vec{x}|^2 + \frac{1}{4}(\dot{H} + H^2)t^2, \quad \Psi = -\Phi. \quad (8.2)$$

حال این انحراف از متریک مینکوفسکی را با یک درجه آزادی سبک π که به صورت جنبشی با متریک جفت شده است توضیح می‌دهیم. برای رسیدن به ساختار π یک تصحیح از نسبت عام به صورت موضعی در فواصل زیاد و میدان گرانشی ضعیف در نظر می‌گیریم. ابتدا کنش مربوط به این نظریه را می‌نویسیم که در آن مقدار $\sqrt{-g}(1 - 2\pi)R$ جایگزین کنش اینشتین هیلبرت $\sqrt{-g}R$ می‌شود و یک جمله نیز که مربوط به دینامیک π می‌باشد اضافه می‌شود. بنابر دلایلی که در ادامه روشن خواهد شد در مقدار π جملات غیر خطی نیاز داریم در حالی که ما میدان گرانشی و سهم π را در معادلات حرکت در مرتبه خطی بررسی می‌کنیم. برای اینکه π فعل و انفعالات گرانشی جهانی را تحت تاثیر قرار ندهد ما آن را به صورت کمینه با متریک $h_{\mu\nu}$ جفت می‌کنیم و سپس π و $h_{\mu\nu}$ را جدا می‌کنیم

$$h_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} + 2\pi\eta_{\mu\nu}, \quad (9.2)$$

کنش به صورت زیر در می‌آید

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4}M_{pl}^2(\sqrt{-\hat{g}}\hat{R})^{(2)} + \frac{1}{4}\hat{h}_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + \mathcal{L}_\pi + \pi T_\mu^\mu \right]. \quad (10.2)$$

ضریب M_{pl} بسط تا مرتبه‌ی دوم لاگرانژی اینشتین هیلبرت حول فضای تخت است. جمله اول کنش به صورت زیر است

$$(\sqrt{-\hat{g}}\hat{R})^{(2)} = -\frac{1}{4}(\square h_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu}\partial_\alpha h_{\nu)}^\alpha) + \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\square h - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) \quad (11.2)$$

\hat{g} و \hat{R} از متریک تبدیل یافته ساخته شده‌اند. جمله \mathcal{L}_π جمله مربوط به دینامیک π است که در ادامه بررسی خواهد شد و جمله آخر جفت شدگی میدان اسکالر با ماده است که اگر بخواهیم اصلاحات گرانشی که توسط π ایجاد شده است جالب توجه باشد به حضور این جمله در کنش احتیاج است.

باز مقیاس بندی وایل در معادله (۹.۲) پیمانانه ثابت شده کلی را حفظ نمی‌کند. اولین قدم ثابت کردن $h_{\mu\nu}$ و $\hat{h}_{\mu\nu}$ است به طوری که تفاوت آن‌ها در همدیس تخت باشد در غیر این صورت تصحیح گرانشی تحت مطالعه ناشی از جفت کردن اسکالر جنبشی با متریک نیست. معادلات میدان برای میدان $\hat{h}_{\mu\nu}$ مانند معادلات میدان نسبیت عام خالص (بدون هیچ میدان اضافی) است بنابراین اگر در تئوری اصلاح شده خود متریک $h_{\mu\nu}$ را برای $T_{\mu\nu}$ داده شده، بدانیم، می‌توانیم ساختار π را از رابطه زیر بدست آوریم

$$\pi \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (h_{\mu\nu} - \hat{h}_{\mu\nu})_{conformal} . \quad (12.2)$$

چون سمت راست رابطه همدیس است، π نیز همدیس می‌باشد بنابراین می‌توان به آن یک جمله تغییرات بینهایت کوچک اتساع که به صورت یک ثابت ظاهر می‌شود و همچنین یک جمله خطی که تغییرات بینهایت کوچک تبدیلات همدیس فضایی را شامل می‌شود، اضافه کرد

$$\pi \rightarrow \pi + c + b_{\mu} x^{\mu} . \quad (13.2)$$

بنابراین می‌بینیم بدون آنکه دینامیک π را بدانیم، π تا یک بخش خطی و یک ثابت مشخص شد. همان‌طور که گفتیم ما می‌توانیم مختصات را به گونه‌ای انتخاب کنیم که به صورت موضعی اطراف $x = 0$ و $t = 0$ مانند یک اختلال کوچک همدیس از فضای مینکوفسکی باشد (نگاه کنید به معادله (۷.۲)). حال اگر همین کار را در نسبیت عام با همان مقدار ρ و p که برای FRW در نظر گرفتیم، انجام دهیم باید یک ضریب همدیس متفاوت با H و \dot{H} به جای H و \dot{H} بگیریم. سپس برای بدست آوردن ساختار π که به صورت موضعی برای تصحیح رفتار کیهان شناسی معتبر است، تنها از معادله (۷.۲) و (۱۲.۲) استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \pi(\vec{x}, t) = \Phi - \hat{\Phi} = & -\frac{1}{4} (H^2 - H'^2) |\vec{x}|^2 \\ & + \frac{1}{4} [2(\dot{H} - \dot{H}') + (H^2 - H'^2)] t^2 + c + b t, \end{aligned} \quad (14.2)$$

با توجه به همسانگردی حل FRW بخش خطی می‌تواند تنها متناسب با t باشد.

۳-۲ ساختار \mathcal{L}_{π}

حال ساختار \mathcal{L}_{π} را برای یک تعمیم بالقوه گرانشی مشخص می‌کنیم. می‌خواهیم در مقیاس‌های کیهانی π منجر به یک تعمیم مرتبه اول از مقدار هابل شود. البته در سیستم‌های خورشیدی انحرافات از گرانش اینشتینی از مرتبه 10^{-3} می‌باشد. بنابراین بدیهی است که دینامیک π نمی‌تواند به صورت

جهان شمول خطی باشد بلکه باید کنش π به گونه‌ای نوشته شود که در فواصل کیهانی از مرتبه یک و در فواصل پایین‌تر از مرتبه کمتر از یک باشد. بنابراین اولین نتیجه ما این است که دینامیک π غیر خطی باشد. فرض کنیم در فواصل زیر افق هابل رفتار π با یک تقریب درجه دوم داده شود

$$\pi_c = C + B_\mu x^\mu + A_{\mu\nu} x^\mu x^\nu + \mathcal{O}(x^3 H^3). \quad (15.2)$$

یادآوری می‌کنیم که یک حل با تقریب درجه دو تحت ترکیبی از انتقال فضا-زمانی و یک انتقال $\pi(x) \rightarrow \pi(x) + b_\mu x^\mu + c$ به طور دقیق‌تر

$$\pi_c(x) = \pi_c(x + \delta) - 2A_{\mu\nu} \delta^\mu x^\nu - B_\mu \delta^\mu, \quad (16.2)$$

که $b_\mu = -2A_{\mu\nu} \delta^\nu$ و $c = -B_\mu \delta^\mu$ را داریم. می‌دانیم که در حالت کلی تقارن روی حل از نوردایی معادله حرکت و نوردایی معادله حرکت از نوردایی لاگرانژی می‌آید، بنابراین نتیجه می‌گیریم که در این‌جا لاگرانژی تحت انتقال $\pi(x) \rightarrow \pi(x) + b_\mu x^\mu + c$ ناوردا است. ما به دنبال معادله حرکت غیرخطی هستیم. در ادامه ما فرض می‌کنیم که معادله حرکت π تحت انتقال $\pi(x) \rightarrow \pi(x) + b_\mu x^\mu + c$ ناوردا باشد که در نتیجه باید در معادلات حرکت حداقل با دو مشتق ظاهر شود.

در ادامه برای جلوگیری از مزاحمت درجات آزادی شبح ما یک فرض نهایی خواهیم داشت به این صورت که معادلات حرکت π را تنها از مشتقات مرتبه دوم روی π می‌سازیم. با داشتن این سه فرض معادله حرکت باید به فرم زیر باشد

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\pi}{\delta \pi} = F(\partial_\mu \partial_\nu \pi), \quad (17.2)$$

این طبقه محدود از لاگرانژی‌ها یک تعمیم DGP برای مقیاس‌های زیر هابل است، این عجیب نیست چون سه قید ما در واقع سه خصوصیت اصلی مدل DGP در فواصل منظومه شمسی را تضمین می‌کند. تبدیل $\pi(x) \rightarrow \pi(x) + b_\mu x^\mu + c$ یک تعمیم گالیه ای $x \rightarrow x + vt + x$ در مکانیک نیوتنی است بنابراین π را گالیلئون^۲ می‌نامیم.

حال جملات ناوردا تحت تبدیلات لورنتس برای معادله‌ی (۱۷.۲) را طبقه بندی می‌کنیم. در هر جمله لاگرانژی اگر تعداد n ، π داشته باشیم باید $2n - 2$ مشتق ظاهر شود. دلیل این ادعا این است که ما می‌خواهیم جملاتی بسازیم که نوردایی گالیه‌ای داشته باشد برای این کار باید پشت هر π دو مشتق ظاهر شود و یک π بدون مشتق نیز باید باشد چون می‌خواهیم بعد از وردش‌گیری از لاگرانژی به معادله حرکتی برسیم که هر π شامل دو مشتق باشد. بنابراین این مستلزم آن است که ناوردهای ویژه را در هر مرتبه از n پیدا کنیم. ساده‌ترین حالت $n = 1$ است که تبدیل^۳ نامیده می‌شود

^۲Galileon

^۳tadpole

و $\mathcal{L}_1 = \pi$ می‌شود، توجه داشته باشید که تبدیل تا حد یک مشتق کامل تحت تبدیلات گالیله‌ای ناورداست $\delta\mathcal{L}_1 = b_\rho x^\rho + c = \partial_\mu (b_\rho x^\rho x^\mu / 5 + cx^\mu / 4)$. و این باعث می‌شود معادله حرکت متناظرش نیز ناوردا باشد. بعد از این انرژی جنبشی استاندارد $(\partial\pi)^2$ است که تحت تبدیل گالیلئونی زیر ناورداست

$$\delta(\partial\pi)^2 = -4c^\mu \partial_\mu \pi, \quad (18.2)$$

و مجدداً رابطه بالا یک مشتق کامل است. یک مثال غیر بدیهی و سخت‌تر برهم‌کنش مرتبه سه DGP یعنی $\square\pi(\partial\pi)^2$ است که وردش آن به این صورت است

$$\delta(\square\pi(\partial\pi)^2) = -4c^\mu \partial_\mu \pi \square\pi = -4c^\mu \partial^\alpha [\partial_\alpha \pi \partial_\mu \pi - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\mu} (\partial\pi)^2]. \quad (19.2)$$

در مرتبه n ساختار کلی لاگرانژی ناوردا گالیلئونی π به صورت $\partial\pi \partial\pi (\partial^2\pi)^{n-2}$ وجود دارد. در حالت خاص در چهار بعد جملات ناوردا گالیله‌ای تا مرتبه‌ی پنجم به صورت زیر در می‌آیند [۱۵]

$$\mathcal{L}_1 = \pi, \quad (20.2)$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} \partial\pi \cdot \partial\pi, \quad (21.2)$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} [\Pi] \partial\pi \cdot \partial\pi, \quad (22.2)$$

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{4} ([\Pi]^2 \partial\pi \cdot \partial\pi - 2[\Pi] \partial\pi \cdot \Pi \cdot \partial\pi - [\Pi^2] \partial\pi \cdot \partial\pi + 2\partial\pi \cdot \Pi^2 \cdot \partial\pi), \quad (23.2)$$

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{5} ([\Pi]^3 \partial\pi \cdot \partial\pi - 3[\Pi]^2 \partial\pi \cdot \Pi \cdot \partial\pi - 3[\Pi][\Pi^2] \partial\pi \cdot \partial\pi + 6[\pi] \partial\pi \cdot \Pi^2 \cdot \partial\pi + 2[\Pi^3] \partial\pi \cdot \partial\pi + 3[\Pi^2] \partial\pi \cdot \Pi \cdot \partial\pi - 6\partial\pi \cdot \Pi^3 \cdot \partial\pi). \quad (24.2)$$

برای ساده سازی Π به صورت $\Pi_\nu^\mu \equiv \partial^\mu \partial_\nu \pi$ تعریف شده و همچنین $[\Pi] = \Pi_\mu^\mu$ است. بنابراین کنش به صورت

$$S = \int d^4x \sum_{i=1}^5 \mathcal{L}_i, \quad (25.2)$$

که از وردش کنش نسبت به π معادلات حرکت زیر را خواهیم داشت که تا مشتقات مرتبه‌ی دوم را

شامل می‌شود

$$\mathcal{E}_1 = 1, \quad (26.2)$$

$$\mathcal{E}_2 = \square\pi, \quad (27.2)$$

$$\mathcal{E}_3 = (\square\pi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2, \quad (28.2)$$

$$\mathcal{E}_4 = (\square\pi)^3 - 3\square\pi(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2 + 2(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^3, \quad (29.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_5 = & (\square\pi)^4 - 6(\square\pi)^2(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2 + 8\square\pi(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^3 + 3[(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2]^2 \\ & - 6(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^4. \end{aligned} \quad (30.2)$$

لاگرانژی کلی برای π یک ترکیب خطی از ناورداهای بالاست

$$\mathcal{L}_\pi = \sum_{i=1}^5 c_i \mathcal{L}_i. \quad (31.2)$$

c_i ضریب کلی و ثابت است و معادله حرکت کلی را به این شکل داریم

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_\pi}{\delta\pi} = \sum_i^5 c_i \mathcal{E}_i = -T_\mu^\mu. \quad (32.2)$$

۴-۲ گالیلئون هموردا

تاکنون درباره نظریه میدان در فضای تخت صحبت شد، برای رسیدن به یک نظریه میدان در فضای خمیده باید مشتقات جزئی به مشتقات هموردا تبدیل شوند. همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، تمام کنش‌های چهار بعدی برای میدان π که خواص مشابهی با نظریه موثر DGP دارد طبقه بندی شده است: داشتن معادلات حرکت ناوردای لورنتس که تنها شامل مشتقات مرتبه‌ی دوم π روی پس‌زمینه‌ی مینکوفسکی باشد. علاوه بر لاگرانژی‌های $\mathcal{L}_1 = \pi$ ، $\mathcal{L}_2 = \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi$ ، $\mathcal{L}_3 = \square\pi\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi$ که به ترتیب لاگرانژی خطی نسبت به π ، لاگرانژی جمله جنبشی نسبت به π و لاگرانژی درجه سه که از حد جداسازی DGP بدست آمده هستند، دو لاگرانژی چهار بعدی دیگر وجود دارد. \mathcal{L}_4 که ترکیب خطی از چهار جمله که هر کدام شامل ضرب چهار π و شش مشتق روی هر π است و \mathcal{L}_5 که از ترکیب خطی هفت جمله که هر کدام شامل ضرب پنج π و هشت مشتق روی هر π است. ما در این بخش نشان خواهیم داد که ترکیب خطی \mathcal{L}_4 و \mathcal{L}_5 تا حد مشتق کامل به گونه‌ای انتخاب می‌شود که معادله حرکت بدست آمده از کنش مربوطه فقط شامل مشتق مرتبه‌ی دوم روی π باشد. تمام بررسی‌ها در بخش قبل در فضا زمان تخت انجام شده است و می‌توان انتظار داشت که در فضا زمان انحنادار تغییرات شدیدی رخ دهد که در ادامه این کار را انجام می‌دهیم. در حقیقت با وردش از کنش نسبت

به π مشتق‌های مرتبه‌ی سوم در \mathcal{L}_4 و \mathcal{L}_5 بر روی متریک ظاهر می‌شوند که به شکل گرادیان تانسور ریمان هستند. در واقع در \mathcal{L}_4 و \mathcal{L}_5 مشتقات چهارم π داشتیم که بعد از جابجا کردن مشتق‌های هموردا روی π ها، این مشتقات چهارم حذف می‌شوند و مشتق‌های مرتبه‌ی سوم روی متریک ظاهر می‌شوند. هنگامی که نسبت به متریک وردش می‌گیریم انتظار داریم که لاگرانژی‌هایی با مشتق مرتبه‌ی سوم π ظاهر شوند.

در این جا هدف این است که آیا می‌توان مدل گالیئون را هموردا کرد در حالی که تمام ویژگی‌های مطلوب (تقارن‌ها و عدم حضور شبح) حفظ شود؟ [۱۶]

برای رسیدن به یک کنش هموردا در فضا-زمان خمیده از همتای آن در فضای تخت، ساده‌ترین راه این است که مشتقات جزئی را به مشتقات هموردا تبدیل کنیم. بنابراین برای \mathcal{L}_4 و \mathcal{L}_5 را در فضای خمیده خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & (\square\pi)^2 (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) - 2 (\square\pi) (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu\nu} \pi_{;\nu}) \\ & - (\pi_{;\mu\nu} \pi^{i\mu\nu}) (\pi_{;\rho} \pi^{i\rho}) + 2 (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu\nu} \pi_{;\nu\rho} \pi^{i\rho}), \end{aligned} \quad (33.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & (\square\pi)^3 (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) - 3 (\square\pi)^2 (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu\nu} \pi_{;\nu}) - 3 (\square\pi) (\pi_{;\mu\nu} \pi^{i\mu\nu}) (\pi_{;\rho} \pi^{i\rho}) \\ & + 6 (\square\pi) (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu\nu} \pi_{;\nu\rho} \pi^{i\rho}) + 2 (\pi_{;\mu}{}^\nu \pi_{;\nu}{}^\rho \pi_{;\rho}{}^\mu) (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) \\ & + 3 (\pi_{;\mu\nu} \pi^{i\mu\nu}) (\pi_{;\rho} \pi^{i\rho\lambda} \pi_{;\lambda}) - 6 (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu\nu} \pi_{;\nu\rho} \pi^{i\rho\lambda} \pi_{;\lambda}), \end{aligned} \quad (34.2)$$

نماد (∇_μ) ؛ مشتق هموردا ∇_μ را نسبت به متریک $g_{\mu\nu}$ نشان می‌دهد. در فضا زمان تخت $\nabla_\mu = \partial_\mu$ می‌باشد و همان‌گونه که در بخش قبل دیدیم معادله حرکت π حاصل از این جمله لاگرانژی تنها شامل مشتق مرتبه‌ی دوم π می‌باشد.

کنش نظریه گالیئون در فضا-زمان خمیده را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{\text{matter}}), \quad (35.2)$$

\mathcal{L}_π ترکیب خطی از \mathcal{L}_1 تا \mathcal{L}_5 است

$$\mathcal{L}_\pi = \sum_{i=1}^{i=5} c_i \mathcal{L}_i, \quad (36.2)$$

c_i ضریب ثابت است و R اسکالر ریچی برای متریک $g_{\mu\nu}$ است. $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ نیز لاگرانژی میدان‌های مادی است که جفت شدگی کیمنه با متریک ساخته شده از متریک در چهارچوب اینشتین و گالیئون π دارند. واضح است که \mathcal{L}_1 ، \mathcal{L}_2 و \mathcal{L}_3 قادر به تولید معادلات حرکت شامل مشتقات مرتبه‌ی بالاتر

از دو نسبت به π و متریک نیستند. در صورتی که این قضیه برای \mathcal{L}_4 و \mathcal{L}_5 متفاوت است. ازکنش مربوط به \mathcal{L}_4 نسبت به π وردش می‌گیریم و معادله حرکت زیر را داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4 \equiv & \ 2 (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) (\pi_{;\nu}^{\nu\rho} - \pi_{;\nu\rho}^{\nu\rho}) + 2 \pi^{i\mu} \pi^{i\nu} (2 \pi_{;\mu\rho\nu}^{\rho} - \pi_{;\mu\nu\rho}^{\rho} - \pi_{;\rho}^{\rho} R^{\mu\nu}) \\ & + 10 (\square\pi) \pi^{i\mu} (\pi_{;\mu\nu}^{\nu} - \pi_{;\nu}^{\nu\mu}) + 12 \pi_{;\mu} \pi^{i\mu\nu} (\pi_{;\rho}^{\rho\nu} - \pi_{;\nu\rho}^{\rho}) \\ & + 8 \pi^{i\mu} \pi^{i\nu\rho} (\pi_{;\nu\rho\mu} - \pi_{;\mu\nu\rho}) \\ & - 4 (\square\pi)^3 - 8 (\pi_{;\mu}^{\nu} \pi_{;\nu}^{\rho} \pi_{;\rho}^{\mu}) + 12 (\square\pi) (\pi_{;\mu\nu} \pi^{i\mu\nu}), \end{aligned} \quad (37.2)$$

همان‌گونه که در رابطه بالا مشاهده می‌کنید جملاتی شامل سه مشتق روی π وجود دارند که این جملات در فضا زمان تخت حذف می‌شوند. با جابجا کردن مشتقات و استفاده از تانسور انحنای \mathcal{E}_4 را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4 = & \ -4 (\square\pi)^3 - 8 (\pi_{;\mu}^{\nu} \pi_{;\nu}^{\rho} \pi_{;\rho}^{\mu}) + 12 (\square\pi) (\pi_{;\mu\nu} \pi^{i\mu\nu}) - (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) (\pi_{;\nu} R^{i\nu}) \\ & + 2 (\pi_{;\mu} \pi_{;\nu} \pi_{;\rho} R^{\mu\nu\rho}) + 10 (\square\pi) (\pi_{;\mu} R^{\mu\nu} \pi_{;\nu}) - 8 (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu\nu} R_{\nu\rho} \pi^{i\rho}) \\ & - 2 (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) (\pi_{;\nu\rho} R^{\nu\rho}) - 8 (\pi_{;\mu} \pi_{;\nu} \pi_{;\rho\sigma} R^{\mu\nu\sigma}). \end{aligned} \quad (38.2)$$

در آخر آنچه باقی می‌ماند مشتقات تانسور ریچی و اسکالر ریچی است و از این رو مشتقات مرتبه‌ی سوم متریک را داریم. برای از بین بردن این مشتقات مرتبه‌ی بالا می‌توان یک جفت شدگی غیر کیمنه میدان π با متریک رابه صورت زیر در نظر بگیریم

$$\mathcal{L}_{4,1} = (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) (\pi_{;\nu} \pi^{i\nu}) R, \quad (39.2)$$

$$\mathcal{L}_{4,2} = (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi_{;\mu} R^{\mu\nu} \pi_{;\nu}). \quad (39.2\text{ب})$$

با اضافه کردن ترکیب $\frac{1}{4} \mathcal{L}_{4,1} - \mathcal{L}_{4,2}$ به \mathcal{L}_4 خواهیم دید که تمام مشتقات مرتبه سوم از معادله حرکت π از بین می‌رود. با اضافه کردن این جمله به کنش زیر

$$S_4 = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_4, \quad (40.2)$$

کنش کلی را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$(41.2)$$

$$S_4 + S_4^{\text{nonmin}} = \int d^4x \sqrt{-g} (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) \left[2 (\square\pi)^2 - 2 (\pi_{;\mu\nu} \pi^{i\mu\nu}) - \frac{1}{4} (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) R \right].$$

معادله حرکت π برای کنش کمینه به این صورت در می‌آید

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_F = & -\mathcal{F} (\square\pi)^2 - \mathcal{L} (\pi_{;\mu}{}^\nu \pi_{;\nu}{}^\rho \pi_{;\rho}{}^\mu) + 12 (\square\pi) (\pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu}) + 2 (\square\pi) (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu}) R \\ & + \mathcal{F} (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu\nu} \pi_{;\nu}) R + \mathcal{L} (\square\pi) (\pi_{;\mu} R^{\mu\nu} \pi_{;\nu}) - \mathcal{F} (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda}) (\pi_{;\mu\nu} R^{\mu\nu}) \\ & - 16 (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu\nu} R_{\nu\rho} \pi^{;\rho}) - \mathcal{L} (\pi_{;\mu} \pi_{;\nu} \pi_{;\rho\sigma} R^{\mu\rho\nu\sigma}). \end{aligned} \quad (42.2)$$

این معادله شامل مشتقات مرتبه‌ی بالاتر از دو روی هر یک از میدان‌ها نیست. از طرف دیگر توجه کنید که $\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c$ تقارن گالیله‌ای است. تقارن گالیله‌ای $\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c$ ثابت هستند). بنابراین با اضافه کردن دو جمله، شبیح از نظریه حذف شد، اما تقارن گالیله‌ای به این دلیل که معادله حرکت دارای مشتق مرتبه‌ی اول از میدان π می‌شود از معادله از بین می‌رود وجود دارد شکست.

اگر از کنش $S_{\mathcal{F}}$ (معادله 40.2) نسبت به متریک وردش بگیریم و تانسور انرژی تکانه را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_F^{\mu\nu} = & (\pi^{;\mu} \pi^{;\nu}) \pi^{;\lambda} (2 \pi_{;\lambda\rho}{}^\rho - \pi^{;\rho}{}_{\rho\lambda}) \\ & + (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda}) \pi^{;\mu} (\pi_{;\rho}{}^{\rho\nu} - \pi^{;\nu\rho}{}_\rho) + (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda}) \pi^{;\nu} (\pi_{;\rho}{}^{\rho\mu} - \pi^{;\mu\rho}{}_\rho) \\ & - \pi^{;\lambda} \pi^{;\rho} (\pi^{;\mu} \pi_{;\lambda\rho}{}^\nu + \pi^{;\nu} \pi_{;\lambda\rho}{}^\mu) + (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda}) (\pi_{;\rho} \pi^{;\mu\nu\rho}) \\ & + (\pi_{;\lambda} \pi_{;\rho} \pi_{;\sigma} \pi^{;\lambda\rho\sigma}) g^{\mu\nu} - (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda}) (\pi_{;\rho} \pi_{;\sigma} \pi^{\sigma\rho}) g^{\mu\nu} \\ & + (\pi^{;\mu} \pi^{;\nu}) \left[3 (\pi_{;\lambda\rho} \pi^{;\lambda\rho}) - 2 (\square\pi)^2 \right] + (\pi^{;\mu\nu}) \pi_{;\lambda} (2 \pi^{;\lambda\rho} \pi_{;\rho} + \pi^{;\lambda} \square\pi) \\ & + 3 (\square\pi) \pi_{;\lambda} (\pi^{;\lambda\mu} \pi^{;\nu} + \pi^{;\lambda\nu} \pi^{;\mu}) - \mathcal{F} \pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda\rho} (\pi_{;\rho}{}^\mu \pi^{;\nu} + \pi_{;\rho}{}^\nu \pi^{;\mu}) \\ & - 2 (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda\mu}) (\pi_{;\rho} \pi^{;\rho\nu}) - \frac{1}{4} (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda}) \left[(\square\pi)^2 + (\pi_{;\rho\sigma} \pi^{;\rho\sigma}) \right] g^{\mu\nu} \\ & + \pi_{;\lambda} \pi_{;\rho} \left[3 \pi^{;\lambda\sigma} \pi_{;\sigma}{}^\rho - 2 (\square\pi) \pi^{;\lambda\rho} \right] g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (43.2)$$

در جملات بالا مشتق مرتبه‌ی سوم از π مشاهده می‌شود، این جملات حتی در فضا-زمان تخت نیز وجود دارند. شایان ذکر است که اضافه کردن کنش غیرکمینه به (40.2) برای از بین بردن تمام مشتقات مرتبه‌ی سوم ظاهر شده در تانسور انرژی تکانه π کافی است. حال اگر از کنش (41.2) وردش بگیریم تانسور انرژی تکانه را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\mathfrak{F}^{\mu\nu} = & \mathfrak{F}(\square\pi) \pi_{;\rho} [\pi^{i\mu} \pi^{i\rho\nu} + \pi^{i\nu} \pi^{i\rho\mu}] - \mathfrak{Y}(\square\pi)^\mathfrak{Y} (\pi^{i\mu} \pi^{i\nu}) \\
& + \mathfrak{Y}(\square\pi) (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi^{i\mu\nu}) + \mathfrak{F}(\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda\rho} \pi_{;\rho}) (\pi^{i\mu\nu}) \\
& - \mathfrak{F}(\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda\mu}) (\pi_{;\rho} \pi^{i\rho\nu}) + \mathfrak{Y}(\pi_{;\lambda\rho} \pi^{i\lambda\rho}) (\pi^{i\mu} \pi^{i\nu}) \\
& - \mathfrak{Y}(\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi^{i\mu} \pi^{i\rho\nu}) - \mathfrak{F} \pi^{i\lambda} \pi_{;\lambda\rho} [\pi^{i\rho\mu} \pi^{i\nu} + \pi^{i\rho\nu} \pi^{i\mu}] \\
& - (\square\pi)^\mathfrak{Y} (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) g^{\mu\nu} - \mathfrak{F}(\square\pi) (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda\rho} \pi_{;\rho}) g^{\mu\nu} \\
& + \mathfrak{F}(\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda\rho} \pi_{;\rho\sigma} \pi^{i\sigma}) g^{\mu\nu} + (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi_{;\rho\sigma} \pi^{i\rho\sigma}) g^{\mu\nu} \\
& + (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi^{i\mu} \pi^{i\nu}) R - \frac{1}{\mathfrak{F}} (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi_{;\rho} \pi^{i\rho}) g^{\mu\nu} R \\
& - \mathfrak{Y}(\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) \pi_{;\rho} [R^{\rho\mu} \pi^{i\nu} + R^{\rho\nu} \pi^{i\mu}] + \frac{1}{\mathfrak{Y}} (\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi_{;\rho} \pi^{i\rho}) R^{\mu\nu} \\
& + \mathfrak{Y}(\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi_{;\rho} R^{\rho\sigma} \pi_{;\sigma}) g^{\mu\nu} - \mathfrak{Y}(\pi_{;\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi_{;\rho} \pi_{;\sigma} R^{\mu\rho\nu\sigma}). \quad (44.2)
\end{aligned}$$

در رابطه بالا دیده می‌شود که مشتقات روی میدان π حداکثر از مرتبه‌ی دو است. بنابراین اضافه کردن کنش $S_\mathfrak{F}^{nonmin}$ جملات شامل مشتق بیشتر از دو را در تانسور انرژی-تکانه نیز حذف می‌کند. تمام مراحل قبلی برای \mathcal{L}_5 نیز قابل انجام است

$$S_5 = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_5. \quad (45.2)$$

از کنش بالا نسبت به π وردش می‌گیریم و بعد از جابجا کردن مشتق هموردا می‌بینیم که معادلات حرکت π شامل مشتقات مرتبه‌ی بالاتر از دو روی π نیست اما شامل مشتقات مرتبه‌ی سوم متریک است. مشتقات اول را با ترکیب زیر داریم

$$\begin{aligned}
& -\mathfrak{Y}(\square\pi) (\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) (\pi_{;\nu} R^{i\nu}) + \mathfrak{Y}(\pi_{;\mu} \pi^{i\mu\nu} \pi_{;\nu}) (\pi_{;\rho} R^{i\rho}) \\
& + \mathfrak{F}(\square\pi) (\pi_{;\mu} \pi_{;\nu} \pi_{;\rho} R^{\mu\nu;\rho}) + \mathfrak{F}(\pi_{;\mu} \pi^{i\mu}) (\pi_{;\nu} \pi_{;\rho\sigma} R^{\rho\sigma;\nu}) \\
& - 12 (\pi_{;\mu} \pi_{;\nu} \pi^{i\rho} \pi_{;\rho\sigma} R^{\mu\sigma;\nu}) - \mathfrak{F}(\pi_{;\mu} \pi_{;\nu} \pi_{;\rho} \pi_{;\sigma\lambda} R^{\mu\sigma\nu\lambda;\rho}). \quad (46.2)
\end{aligned}$$

دوباره مشابه حالت قبل این جملات با اضافه کردن ترکیب خطی از هفت عبارت غیر بدیهی زیر با

تانسورهای هموردا، حذف می‌شوند

$$\mathcal{L}_{5,1} = (\pi_{;\lambda} \pi^{;\lambda}) (\pi_{;\mu} \pi_{;\nu} \pi_{;\rho\sigma} R^{\mu\rho\nu\sigma}), \quad (147.2)$$

$$\mathcal{L}_{5,2} = (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu}) (\pi_{;\nu} \pi^{;\nu}) (\pi_{;\rho\sigma} R^{\rho\sigma}), \quad (47.2 \text{ ب})$$

$$\mathcal{L}_{5,3} = (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu}) (\pi_{;\nu} \pi^{;\nu\rho} R_{\rho\sigma} \pi^{;\sigma}), \quad (47.2 \text{ ج})$$

$$\mathcal{L}_{5,4} = (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu}) (\square\pi) (\pi_{;\nu} R^{\nu\rho} \pi_{;\rho}), \quad (547.2 \text{ د})$$

$$\mathcal{L}_{5,5} = (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu\nu} \pi_{;\nu}) (\pi_{;\rho} R^{\rho\sigma} \pi_{;\sigma}), \quad (547.2 \text{ ه})$$

$$\mathcal{L}_{5,6} = (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu}) (\pi_{;\nu} \pi^{;\nu}) (\square\pi) R, \quad (47.2 \text{ و})$$

$$\mathcal{L}_{5,7} = (\pi_{;\mu} \pi^{;\mu}) (\pi_{;\nu} \pi^{;\nu\rho} \pi_{;\rho}) R. \quad (47.2 \text{ ز})$$

در واقع در بالا تمام اسکالرهای ممکن با یک R و پنج π را نوشته‌ایم. با استفاده از اتحاد بیانکی^۴ می‌توان نشان داد که ترکیب $R^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{4} R^{;\mu}$

$$\mathcal{L}_{5,2} + 4\mathcal{L}_{5,3} - \frac{1}{4}\mathcal{L}_{5,6} - 2\mathcal{L}_{5,7}$$

مشتق کامل است بنابراین کنش مربوط به این ترکیب ناورداست

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} \left(\mathcal{L}_{5,2} + 4\mathcal{L}_{5,3} - \frac{1}{4}\mathcal{L}_{5,6} - 2\mathcal{L}_{5,7} \right) = 0. \quad (48.2)$$

با استفاده از این عبارت یک ترکیب یکتا بدست می‌آید که به کنش S_5 اضافه می‌کنیم تا تمام مشتقات مرتبه بالاتر را در معادلات حرکت π ، حذف شود. این ترکیب توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$S_5^{\text{nonmin}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-3\mathcal{L}_{5,1} - 18\mathcal{L}_{5,3} + 3\mathcal{L}_{5,4} + \frac{15}{4}\mathcal{L}_{5,7} \right). \quad (49.2)$$

^۴Bianchi

معادله میدان برای π به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}'_{\delta} = & -5(\square\pi)^4 + 30(\square\pi)^2(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}) + \frac{15}{2}(\square\pi)^2(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})R \\
& + 15(\square\pi)^2(\pi_{;\mu}R^{\mu\nu}\pi_{;\nu}) - 40(\square\pi)(\pi_{;\mu}{}^{\nu}\pi_{;\nu}{}^{\rho}\pi_{;\rho}{}^{\mu}) \\
& + 15(\square\pi)(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu})R - 30(\square\pi)(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu\rho}R^{\nu\rho}) \\
& - 60(\square\pi)(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}R_{\nu\rho}\pi^{;\rho}) - 30(\square\pi)(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\pi_{;\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma}) \\
& - 15(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu})(\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\rho\sigma}) + 30(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\nu\rho}\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\sigma\mu}) \\
& - \frac{15}{2}(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu\rho}\pi^{;\nu\rho})R - 15(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu\rho}\pi^{;\rho})R \\
& - 15(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu})(\pi_{;\rho}R^{\rho\sigma}\pi_{;\sigma}) - 30(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu})(\pi_{;\rho\sigma}R^{\rho\sigma}) \\
& + 30(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu}{}^{\rho}R_{\rho}{}^{\sigma}\pi_{;\sigma}{}^{\nu}) + 60(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}\pi_{;\nu\rho}R^{\rho\sigma}\pi_{;\sigma}) \\
& + 30(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}R_{\nu\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma}) + 15(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu\rho}\pi_{;\sigma\lambda}R^{\nu\sigma\rho\lambda}) \\
& + 30(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\sigma}{}_{\lambda}R^{\mu\rho\nu\lambda}) - 60(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda}{}_{\mu}\pi_{;\nu\rho}\pi_{;\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) \\
& - \frac{15}{2}(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu}R^{\nu\rho}\pi_{;\rho})R + 15(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu}R^{\nu\rho}R_{\rho\sigma}\pi^{;\sigma}) \\
& + 15(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu}\pi_{;\rho}R_{\sigma\lambda}R^{\nu\sigma\rho\lambda}) \\
& - \frac{15}{2}(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu})(\pi_{;\nu}\pi_{;\rho}R^{\nu}{}_{\sigma\kappa\lambda}R^{\rho\sigma\kappa\lambda}). \tag{50.2}
\end{aligned}$$

کنش کامل $S_{\delta} + S_{\delta}^{\text{nonmin}}$ را می توان بازنویسی کرد

$$\begin{aligned}
S_{\delta} + S_{\delta}^{\text{nonmin}} = & \frac{5}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda}) [(\square\pi)^2 - 3(\square\pi)(\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}) \\
& + 2(\pi_{;\mu}{}^{\nu}\pi_{;\nu}{}^{\rho}\pi_{;\rho}{}^{\mu}) - 6(\pi_{;\mu}\pi^{;\mu\nu}G_{\nu\rho}\pi^{;\rho})]. \tag{51.2}
\end{aligned}$$

از کنش نسبت به متریک وردش می گیریم. با استفاده از کنش (51.2) می توان تانسور انرژی-

تکانه را بدست آورد

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\delta^{\mu\nu} = & -\frac{\delta}{\Upsilon} (\square\pi)^\Upsilon (\pi^{i\mu} \pi^{i\nu}) - \frac{\delta}{\Upsilon} (\square\pi)^\Upsilon (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) g^{\mu\nu} + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi)^\Upsilon (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi^{i\mu\nu}) \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi)^\Upsilon \pi_{i\rho} [\pi^{i\rho\mu} \pi^{i\nu} + \pi^{i\rho\nu} \pi^{i\mu}] - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi)^\Upsilon (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho\sigma} \pi_{i\sigma}) g^{\mu\nu} \\
& - 1\delta (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi^{i\mu\sigma} \pi_{i\sigma}{}^\nu) + 1\delta (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho\sigma} \pi_{i\sigma}) (\pi^{i\mu\nu}) \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi) (\pi_{i\rho\sigma} \pi^{i\rho\sigma}) (\pi^{i\mu} \pi^{i\nu}) - 1\delta (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho\mu}) (\pi_{i\sigma} \pi^{i\sigma\nu}) \\
& - 1\delta (\square\pi) \pi^{i\rho} \pi_{i\rho\sigma} [\pi^{i\sigma\mu} \pi^{i\nu} + \pi^{i\sigma\nu} \pi^{i\mu}] + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma\lambda} \pi^{i\sigma\lambda}) g^{\mu\nu} \\
& + 1\delta (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho\sigma} \pi_{i\sigma\lambda} \pi^{i\lambda}) g^{\mu\nu} + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi^{i\mu} \pi^{i\nu}) R \\
& - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) \pi_{i\sigma} [R^{\sigma\mu} \pi^{i\nu} + R^{\sigma\nu} \pi^{i\mu}] \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma} R^{\sigma\lambda} \pi_{i\lambda}) g^{\mu\nu} - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\square\pi) (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma} \pi_{i\lambda} R^{\mu\sigma\nu\lambda}) \\
& - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma\lambda} \pi^{i\sigma\lambda}) (\pi^{i\mu\nu}) + 1\delta (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi^{i\mu\sigma} \pi_{i\sigma\lambda} \pi^{i\lambda\nu}) \\
& - 1\delta (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho\sigma} \pi_{i\sigma}) (\pi^{i\mu\lambda} \pi_{i\lambda}{}^\nu) - 1\delta (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho\sigma} \pi_{i\sigma\lambda} \pi^{i\lambda}) (\pi^{i\mu\nu}) \\
& - \delta (\pi_{i\rho}{}^\sigma \pi_{i\sigma}{}^\lambda \pi_{i\lambda}{}^\rho) (\pi^{i\mu} \pi^{i\nu}) - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\sigma\lambda} \pi^{i\sigma\lambda}) \pi_{i\rho} [\pi^{i\rho\mu} \pi^{i\nu} + \pi^{i\rho\nu} \pi^{i\mu}] \\
& + 1\delta \pi_{i\rho} \pi^{i\rho\sigma} \pi_{i\sigma\lambda} [\pi^{i\lambda\mu} \pi^{i\nu} + \pi^{i\lambda\nu} \pi^{i\mu}] + 1\delta \pi^{i\rho} \pi_{i\rho\lambda} \pi_{i\sigma} [\pi^{i\lambda\mu} \pi^{i\sigma\nu} + \pi^{i\lambda\nu} \pi^{i\sigma\mu}] \\
& - \delta (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma}{}^\lambda \pi_{i\lambda}{}^\kappa \pi_{i\kappa}{}^\sigma) g^{\mu\nu} + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho\sigma} \pi_{i\sigma}) (\pi_{i\lambda\kappa} \pi^{i\lambda\kappa}) g^{\mu\nu} \\
& - 1\delta (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho\sigma} \pi_{i\sigma\lambda} \pi^{i\lambda\kappa} \pi_{i\kappa}) g^{\mu\nu} - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) \pi_{i\sigma} [\pi^{i\sigma\mu} \pi^{i\nu} + \pi^{i\sigma\nu} \pi^{i\mu}] R \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma} \pi^{i\sigma\lambda} \pi_{i\lambda}) R g^{\mu\nu} - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma} \pi^{i\sigma\lambda} \pi_{i\lambda}) R^{\mu\nu} \\
& - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma} R^{\sigma\lambda} \pi_{i\lambda}) (\pi^{i\mu\nu}) - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma\lambda} R^{\sigma\lambda}) (\pi^{i\mu} \pi^{i\nu}) \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) \pi^{i\sigma} \pi_{i\sigma\lambda} [R^{\lambda\mu} \pi^{i\nu} + R^{\lambda\nu} \pi^{i\mu}] \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) \pi_{i\lambda} \pi_{i\sigma} [R^{\lambda\mu} \pi^{i\sigma\nu} + R^{\lambda\nu} \pi^{i\sigma\mu}] \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) \pi^{i\sigma} R_{\sigma\lambda} [\pi^{i\lambda\mu} \pi^{i\nu} + \pi^{i\lambda\nu} \pi^{i\mu}] \\
& - 1\delta (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma} \pi^{i\sigma\lambda} R_{\lambda\kappa} \pi^{i\kappa}) g^{\mu\nu} \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) \pi_{i\sigma} \pi_{i\lambda\kappa} [R^{\mu\lambda\sigma\kappa} \pi^{i\nu} + R^{\nu\lambda\sigma\kappa} \pi^{i\mu}] \\
& - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) \pi_{i\sigma} \pi_{i\lambda} [R^{\mu\sigma\lambda\kappa} \pi_{i\kappa}{}^\nu + R^{\nu\sigma\lambda\kappa} \pi_{i\kappa}{}^\mu] \\
& + \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) \pi^{i\sigma} \pi_{i\sigma\lambda} \pi_{i\kappa} [R^{\mu\lambda\nu\kappa} + R^{\nu\lambda\mu\kappa}] \\
& - \frac{1\delta}{\Upsilon} (\pi_{i\rho} \pi^{i\rho}) (\pi_{i\sigma} \pi_{i\lambda} \pi_{i\kappa\tau} R^{\sigma\kappa\lambda\tau}) g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{52.2}$$

دیده می‌شود که به دلیل اضافه کردن کنش غیرکمینه، تانسور انرژی-تکانه مربوط به کنش کلی عاری از مشتق مرتبه‌ی سوم می‌باشد.

۵-۲ نتیجه‌گیری

ما در این‌جا نظریه‌هایی که رفتار فرسرخ‌گرانش را به صورت موضعی در زیر افق کیهان شناسی اصلاح می‌کنند، در نظر گرفتیم: (آ) این تصحیح برهم‌کنش گرانشی به واسطه درجه آزادی اسکالر نسبیتی موثر π است که به صورت جنبشی با متریک و یا به طور هم‌ارز به صورت سراسری با ماده جفت شده است πT_{μ}^{μ} . (ب) این درجه آزادی اسکالر در مقیاس‌های کوتاه به دلیل خود برهم‌کنش‌های مشتقی مهم که خودمان تعیین کردیم از ماده جدا می‌شود (اثر واینشتاین). در این طبقه از نظریه‌ها، دینامیک π باید تقارن گالیه‌ای داخلی داشته باشد. در ۴ بعد تنها ۵ جمله لاگرانژی احتمالی با چنین تقارنی وجود دارد.

در ادامه نشان دادیم که تمام مشتقات مرتبه‌ی بالاتر ظاهر شده در معادلات میدان جفت شده گالیئون با متریک توسط یک جفت شدگی غیر کمینه مناسب با انحنا می‌توانند حذف شوند که این اطمینان را می‌دهد که درجه آزادی اضافی تولید نشود و به دنبال این نتیجه یک طبقه از نظریات اسکار تانسوری خالص تعریف می‌شود که تنها شامل یک درجه آزادی همراه با میدان‌های ماده و گرویتون^۵ استاندارد می‌شود. با این حال توجه کنید که عدم وجود مشتقات بالاتر پایداری تئوری را اثبات نمی‌کند و بر عکس، حضور آنها ممکن است در برخی مدل‌های پایدار رخ دهد.

^۵Graviton

فصل ۳

سیاه‌چاله در نظریه گالیئون مرتبه سه

۱-۳ مقدمه

در این بخش حل سیاه‌چاله را برای یک زیر گروه از نظریه هورندسکی^۱ که شامل جمله گالیئون مرتبه سه است بررسی می‌کنیم. این تئوری شامل تقارن انتقالی برای میدان اسکالر می‌باشد در حالی که برای این میدان تقارن بازتابی ندارد. گالیئون را به صورت خطی وابسته به زمان در نظر می‌گیریم که این وابستگی با پارامتر سرعت مشخص می‌شود. حل مورد بحث مانند BTZ ^۲ است با این تفاوت که شامل یک میدان اسکالر غیربدیهی می‌باشد که این میدان اسکالر غیربدیهی ثابت کیهان‌شناسی را تغییر می‌دهد.

در این فصل حل‌های چهار بعدی که در بینهایت به صورت مجانبی حل دوسیده و یا مینکوفسکی می‌شوند را مطالعه می‌کنیم. این حل‌ها در نزدیک افق سیاه‌چاله رفتاری متفاوت از نسبیت عام دارند در حالی که رفتار مجانبی آن‌ها دوسیده است. لازم به ذکر است که پارامتر سرعت موی سیاه‌چاله است.

نظریه هورندسکی این اجازه را می‌دهد که حل سیاه‌چاله با یک میدان اسکالر غیربدیهی داشته باشیم که در این حالت میدان اسکالر موی سیاه‌چاله است. نظریه هورندسکی عمومی‌ترین نظریه اسکالر تانسوری است که معادله حرکت آن مشتقات مرتبه‌ی بالاتر از دو را دارا نیست که به همین دلیل ناپایداری استروگرادسکی^۳ که به دلیل مشتقات مرتبه‌ی بالاتر از دو می‌باشد در نظریه ظاهر نمی‌شود و همچنین به دلیل ساختار این نظریه، به این صورت که شامل جفت شدگی‌های جنبشی

^۱Horndeski theory

^۲سیاه‌چاله سه بعدی

^۳Ostrogradsky

اسکالر تانسوری است، از لحاظ پدیده‌شناسی^۴ نسبت به نسیت عام که جفت شدگی کمینه با میدان اسکالر دارد، قوی‌تر است.

از آنجا که یکی از اصلی‌ترین انگیزه‌های نظریه هورندسکی توضیح انرژی تاریک است، بنابراین طبیعی است که انتظار داشته باشیم گالیئون در مجانب‌هایش وابستگی زمانی داشته باشد. با در نظر گرفتن این موارد حل سیاه‌چاله که در مجانب‌هایش به یکی از حل‌های کیهان‌شناسی گالیئون تبدیل می‌شود را پیدا می‌کنیم.

انگیزه ما در این جا سه چیز است:

۱. روشی که برای ساختن جواب‌های سیاه‌چاله در اینجا به کار گرفته شده است تنها در مورد لاگرانژی‌هایی که قسمت مشتقات مرتبه بالاتر آن‌ها از نوع جان^۵ است، می‌باشد [۱۹].
۲. گالیئون درجه سه به عنوان ساده‌ترین گالیئون با مشتقات مرتبه بالاتر در نظر گرفته می‌شود. در موارد مختلف جمله سوم گالیئون را می‌توان دید، مانند حد خاصی از مدل DGP .
۳. گالیئون درجه سه در مباحث کیهان‌شناسی از جمله انرژی تاریک مورد بررسی قرار گرفته است و به خوبی جواب داده است [۱۷].

۲-۳ معرفی مدل

در این فصل کنش را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} [\zeta(R - 2\Lambda) - \eta(\partial\phi)^2 + \gamma\Box\phi(\partial\phi)^2], \quad (1.3)$$

در این جا D تعداد ابعاد است. ζ ، η ، Λ و γ پارامترهای ثابت لاگرانژی هستند. برای بدست آوردن معادله حرکت متریک از کنش بالا نسبت به متریک وردش می‌گیریم

$$\begin{aligned} & -\xi(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) - \eta \left[\frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \right] \\ & + \gamma \left[-\Box\phi\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_{(\mu}\phi\partial_{\nu)}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho[(\partial\phi)^2] \right] = 0. \quad (2.3) \end{aligned}$$

از آنجا که کنش تقارن انتقالی دارد، معادله حرکت اسکالر می‌تواند برحسب جریان پایا J^μ نوشته شود

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (3.3)$$

^۴Phenomenology

^۵John: لاگرانژی جان به این شکل است $G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$ که $V_{John} = \sqrt{-g} V_{John}(\phi)$ که V_{John} یک ثابت دلخواه است.

که جریان وابسته به تقارن انتقالی اسکالر با وردش گرفتن کنش نسبت به $\partial_\mu \phi$ بدست می‌آید:

$$J^\mu = \partial_\nu \phi [g^{\mu\nu} (\gamma \square \phi - \eta) - \gamma \nabla^\mu \nabla^\nu \phi]. \quad (4.3)$$

برای متریک یک حدس متقارن کروی و برای میدان اسکالر یک حدس وابسته به زمان در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \phi(t, r) &= qt + \int dr \frac{\chi(r)}{h(r)}, \\ ds^2 &= -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

که q یک پارامتر ثابت است و آن را سرعت می‌نامیم و $h(r)$ در داخل انتگرال برای سهولت در مشتق گیری معرفی شده است. برای $q \neq 0$ ها، $J^r = 0$ همان مولفه tr متریک است [21].

۳-۳ سیاه‌چاله سه بعدی

در سه بعد جایگزین کردن حدس (5.3) معادلات حرکت زیر را می‌دهد:

$$\gamma q (r^2 h)' \left(\frac{f}{h} \chi^2 - q^2 \right) + 2\gamma q^3 r h - 2\eta q r^2 h \chi = 0, \quad (6.3)$$

$$\eta r \left(\frac{f}{h} \chi^2 - q^2 \right) + \zeta f h' + 2\zeta \Lambda h r = 0, \quad (7.3)$$

$$\left(\frac{f}{h} \chi^2 - q^2 \right) \left[\eta r \sqrt{\frac{h}{f}} - \gamma \left(r \sqrt{\frac{f}{h}} \chi \right)' \right] = \zeta h^2 \left(\sqrt{\frac{f}{h}} \right)', \quad (8.3)$$

پرایم مشتق نسبت به r است. معادله (6.3) معادله tr متریک است. معادلات (7.3) و (8.3) ترکیبی از معادلات tt ، rr هستند. معادلات متریک $\theta\theta$ و $\phi\phi$ با توجه به اتحاد بیانکی^۶ اضافه هستند.

حال فرض می‌کنیم که $f = h$ باشد و بعد از انتگرال گیری از معادلات حرکت حل‌های زیر را

داریم

$$h(r) = f(r) = -M + \frac{\eta^2}{4\lambda \pm \gamma^2} r^2, \quad (9.3)$$

$$\chi(r) = \frac{\eta r}{2\gamma}, \quad (10.3)$$

^۶Bianchi identity

که

$$\lambda_{\pm} = \frac{\zeta\eta^2}{-2\zeta\Lambda\gamma^2 \pm \sqrt{-2\gamma^2\zeta\eta^3 + 4\gamma^4\zeta^2\Lambda^2}}, \quad (11.3)$$

M ثابت انتگرال گیری است و متناظر با جرم سیاهچاله می باشد. افق رویداد نیز تا زمانی که $\lambda_{\pm} > 0$ باشد وجود دارد.

این گروه از حل ها رفتاری شبیه BTZ دارند و ثابت کیهان شناسی برای این حل ها به شکل

$$\Lambda_{eff} = -\eta^2 / (4\lambda_{\pm}\gamma^2),$$

می باشد، اما بر خلاف حل BTZ شامل یک میدان اسکالر غیر بدیهی می باشد که همان موی سیاهچاله است و به صورت موثر ثابت کیهان شناسی را اصلاح می کند. برای ثابت کیهان شناسی موثر سه حالت زیر ممکن است

$$\Lambda_{eff} = \begin{cases} \Lambda_{<} = \frac{1}{\zeta}(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + 3\Lambda^2}) & \text{اگر } \eta < 0 \\ \Lambda_{>}^+ = \frac{1}{\zeta}(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 3\Lambda^2}) & \text{اگر } \eta > 0 \text{ و } |\Lambda| > \sqrt{3}\Lambda_0, \\ \Lambda_{>}^- = \frac{1}{\zeta}(\Lambda - \sqrt{\Lambda^2 - 3\Lambda^2}) & \text{اگر } \eta > 0 \text{ و } |\Lambda| > \sqrt{3}\Lambda_0. \end{cases} \quad (12.3)$$

$\zeta > 0$ فرض می شود و پارامتر Λ_0 را به صورت زیر تعریف کرده ایم

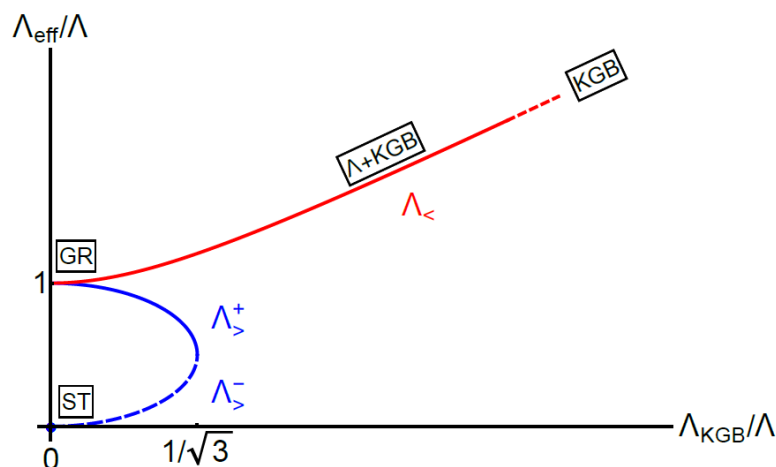
$$\Lambda_0 \equiv \left(\frac{|\eta|^3}{6\zeta\gamma^2} \right)^{1/2}. \quad (13.3)$$

شاخه های مختلف ثابت کیهان شناسی موثر در شکل (3-1) نشان داده شده است. حل های نسبت عام به ازای $\Lambda = \Lambda_{eff}$ بدست می آیند که در این صورت حضور جمله گالیئون در متریک بی تاثیر است. در واقع حد نسبت عام از طریق $\Lambda_{<}$ یا $\Lambda_{>}^+$ بدست می آید. شاخه $\Lambda_{<}$ همچنین هنگامی که $\Lambda \rightarrow 0$ باشد از طرف دیگر حد Λ_0 را می دهد و برای $\Lambda_{eff} \propto \Lambda$ یک حل خودشتابی داریم.

۴-۳ سیاهچاله در چهار بعد

با توجه به این که معادلات حرکت در چهار بعد پیچیده تر از سه بعد می باشد ما قادر به حل تحلیلی سیاهچاله ها نیستیم، بنابراین به حل عددی در حدود مختلف بسنده خواهیم کرد. با حدس (5.3) معادلات حرکت در چهار بعد را به صورت زیر بدست می آیند

$$\gamma q(r^f h)' \frac{f}{h} \chi^2 - \gamma q^3 r^f h' - 2\eta q r^f h \chi = 0, \quad (14.3)$$



شکل ۳-۱: زمانی که $\Lambda_{eff} \approx \Lambda$ باشد حل شبیه نسبیت عام رفتار می‌کند. انتهای دیگر شاخه قرمز مربوط به حل خودشتابی است. قسمت خط چین شاخه آبی مربوط به حل خود تنظیم می‌باشد. برای کیهان‌شناسی همگن در چهار بعد این شکل تقریباً یکسان است [۱۷].

$$\eta r^2 \left(\frac{f}{h} \chi^2 - q^2 \right) + 2\zeta r f h' + 2\zeta h (f - 1 + \Lambda r^2) = 0, \quad (15.3)$$

$$\left(\frac{f}{h} \chi^2 - q^2 \right) \left[\eta r^2 \sqrt{\frac{h}{f}} - \gamma \left(r^2 \sqrt{\frac{f}{h}} \chi \right)' \right] = 2\zeta r h^2 \left(\sqrt{\frac{f}{h}} \right)'. \quad (16.3)$$

۳-۴-۱ حل اینشتین-دوسیه

حل اینشتین-دوسیه را برای مدل (۵.۳) بررسی می‌کنیم. این حل‌ها در واقع حل مجانبی سیاه‌چاله است. متریک (۵.۳) را با $\Lambda \neq 0$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. حل همگن در مختصات کروی را به این صورت داریم

$$f(r) = h(r) = 1 - \frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2, \quad (17.3)$$

$$\chi(r) = \frac{\eta r}{3\gamma}, \quad (18.3)$$

Λ_{eff} بوسیله معادلات (۱۴.۳) تا (۱۶.۳) تعیین می‌شود. با توجه به تبدیل مختصات زیر

$$\tau = t + \sqrt{\frac{3}{a\Lambda_{eff}}} \ln \left(1 - \frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2 \right), \quad (19.3)$$

$$\rho = r e^{-\sqrt{3/\Lambda_{eff}} t} \left(1 - \frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2 \right)^{-1/2}, \quad (20.3)$$

و نگاشت معادلات (۱۷.۳) و (۱۸.۳) در متریک FRW به متریک همگن زیر می‌رسیم

$$ds^2 = -d\tau^2 + e^{2H\tau} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_D^2), \quad (21.3)$$

از آنجایی که در مختصات FRW ، $\phi(\tau, \rho) = q \cdot \tau$ ، است در نتیجه میدان اسکالر همگن می‌باشد.

معادلات (۱۴.۳) تا (۱۶.۳) نشان می‌دهد که q باید حل معادله زیر باشد

$$\frac{\eta^2}{3\gamma^2 q^2} = \frac{2\zeta\Lambda - \eta q^2}{2\zeta}. \quad (22.3)$$

همان‌طور که می‌بینیم برخلاف حل سه بعدی q آزاد نیست و مقدار خاص q از معادله (۲۲.۳) بدست می‌آید. برای q دو حل وجود دارد (q تنها به صورت q^2 در معادلات حرکت ظاهر می‌شود بنابراین علامت عمومی آن اهمیتی ندارد)

$$q^{\pm} \equiv \left[\frac{\zeta\Lambda}{\eta} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta\Lambda}{\eta}\right)^2 - \frac{2\eta\zeta}{3\gamma^2}} \right]^{1/2}, \quad (23.3)$$

ثابت کیهان‌شناسی موثر متناظر با این دو احتمال را به شکل زیر بدست می‌آید

$$\Lambda_{eff} = \frac{\eta^2}{3\gamma^2 (q^{\pm})^2} = \frac{2\zeta\Lambda - \eta (q^{\pm})^2}{2\zeta}, \quad (24.3)$$

برای $\Lambda = 0$ داریم

$$\Lambda_{eff} = \left(\frac{|\eta|^3}{6\zeta\gamma^2} \right)^{1/2} = \Lambda_0, \quad (25.3)$$

و η در توافق با [۲۶] باید منفی باشد.

ثابت کیهان‌شناسی موثر به صورت زیر به پارامترهای مدل وابسته است

$$\Lambda_{eff} \begin{cases} \Lambda_{<} = \frac{1}{3}(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + 4\Lambda^2}) & \text{اگر } \eta < 0 \\ \Lambda_{>}^+ = \frac{1}{3}(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 4\Lambda^2}) & \text{اگر } \eta > 0 \text{ و } \Lambda > 2\Lambda_0, \\ \Lambda_{>}^- = \frac{1}{3}(\Lambda - \sqrt{\Lambda^2 - 4\Lambda^2}) & \text{اگر } \eta > 0 \text{ و } \Lambda > 2\Lambda_0. \end{cases} \quad (26.3)$$

معادله بالا شبیه به معادله (۱۲.۳) در سه بعد است؛ با توجه به این شباهت، شکل (۱-۳) تمام

ویژگی‌های مهم حل‌های همگن را در چهار بعد داراست.

با این حال تفاوت اصلی سه بعد و چهار بعد این است که در سه بعد یک خانواده از سیاه‌چاله‌ها

داریم که به طور مجانبی AdS هستند در حالی که در چهار بعد یک سری خانواده از سیاه‌چاله‌ها داریم

که به صورت مجانبی دوسیده هستند.

۳-۴-۲ حد میدان آزمون

قبل از حل معادلات سیستم بهتر است یک حد خاص برای سیستم در نظر بگیریم. به این صورت که میدان اسکالر روی متریک بازواکنش نداشته باشد بنابراین فرض می‌کنیم که معادلات (۱۴.۳) تا (۱۶.۳) به صورت $\eta = \epsilon\eta$ و $\gamma = \epsilon\gamma$ و $\epsilon \rightarrow 0$ باشند. در این صورت متریک توسط بخش اینشتین هیلبرت کنش تعیین می‌شود.

دو معادله (۱۵.۳) و (۱۶.۳) در این حد با ثابت کیهان‌شناسی Λ ، متریک شوارتزشیلد دوسیته را می‌دهد. معادله (۱۴.۳) مولفه tr متریک است و از معادلات (۱۵.۳) و (۱۶.۳) جدا می‌شود و در یک پس زمینه ثابت معادله میدان اسکالر را می‌دهد. به روشنی داریم

$$f(r) = h(r) = 1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (27.3)$$

که μ پارامتر جرم است و با قرار دادن عبارت فوق در مولفه tr متریک داریم

$$\chi = \frac{\eta rh \pm \sqrt{\Delta}}{\gamma(4h + rh')}, \quad (28.3)$$

که

$$\begin{aligned} \Delta(r) = & \mu^2 + r^4 \left(\frac{4\gamma^2 \Lambda^2 q^2}{3\eta^2} - \frac{2\Lambda}{3} \right) + r^2 \left(1 - \frac{\Lambda\gamma^2 \Lambda q^2}{3\eta^2} \right) \\ & - \frac{3\gamma^2 \mu^2 q^2}{\eta^2 r^2} + \frac{4\gamma^2 \mu q^2}{\eta^2 r} + \frac{\Lambda^2 r^6}{9} + \frac{2\Lambda\mu r^3}{3} - 2\mu r, \end{aligned} \quad (29.3)$$

که بسته به انتخاب‌های مختلف برای پارامترهای لاگرانژی، $\Delta(r)$ برای برخی از حدود r ، می‌تواند منفی شود که به میدان اسکالر موهومی منجر می‌شود. اگر فیزیک مسئله برای ما جالب توجه باشد به ازای $\mu \gg \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ ، Δ در همه جا خارج از افق مثبت است به شرط آنکه داشته باشیم

$$\left(\frac{\gamma q}{\eta} \right)^2 < \frac{1}{3\Lambda}. \quad (30.3)$$

میدان اسکالر به ازای $r \lesssim 3/4\mu$ یا به طور دقیق‌تر داخل افق سیاه‌چاله موهومی می‌گردد. در اینجا علاقه‌مندیم که نکته‌ای را در مورد مفهوم فیزیکی حدس (۵.۳) خاطر نشان کنیم، با توجه به این که میدان اسکالر وابسته به زمان است متریک فضازمان استاتیک یک فرض غیر بدیهی است. نیاز به یک فضازمان استاتیک دلالت بر آن دارد که هیچ شاری وارد سیاه‌چاله نمی‌شود، این حالت برای مواد معمولی عادی نیست و میدان‌های اسکالر زمانی که ماده شروع به سقوط در یک سیاه‌چاله می‌کند جریان ماده غیر صفر را ارائه می‌دهند و این جریان به ناچار منجر به یک متریک غیر ایستا می‌شود.

برای لاگرانژی (۱.۳) یک جواب برافزایشی غیر استاتیک نیز می‌توان یافت. در حقیقت در [۲۷] فرآیند برافزایشی گالیئون به سیاهچاله دارای تقارن کروی استاتیک، مطالعه شده است که در آن از باز واکنش میدان اسکالر بر روی سیاهچاله صرف نظر شده است، دقیقاً شرایطی که در این بخش یعنی حد میدان آزمون در نظر گرفتیم. تفاوت کلیدی بین جواب برافزایشی در [۲۷] با جواب ما در معادله (۱.۳) در یک ثابت انتگرال گیری است که برای جواب‌ها در این جا حذف می‌شود.

همان گونه که در بالا بحث کردیم جواب حد میدان آزمون از معادله tr اینشتین (۱۴.۳) تبعیت می‌کند، که معادل با معادله $J^r = 0$ است. ملاحظات فوق پیشنهاد می‌دهد که زمانی که بازواکنش در نظر گرفته شود جواب‌های دیگر با شار غیر صفر ممکن است وجود داشته باشد بنابراین حدس (۵.۳) یکتا نیست بلکه تا حدی متناسب با حالت خاص جریان گالیئون صفر است.

۳-۴-۳ رفتار مجانبی در های r بزرگ و کوچک

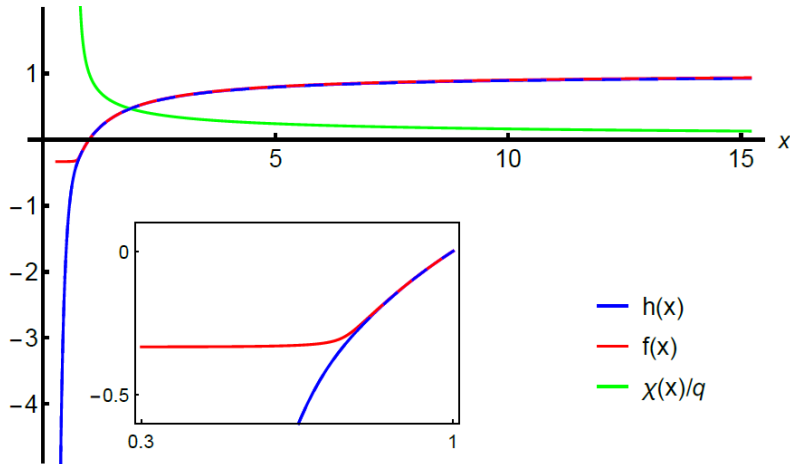
اگر معادلات (۱۴.۳) تا (۱۶.۳) را در $r \rightarrow 0$ حل کنیم و رفتار مجانبی زیر را پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} h(r) &\simeq -br^{-4} + cr^{-8/3}, \\ f(r) &\simeq -\frac{1}{3} + ar^{4/3}, \\ \chi(r) &\simeq dr^{-13/3}, \end{aligned} \quad (31.3)$$

که a, b, c و پارامترهای وابسته به نظریه هستند. توجه کنید برخلاف سیاهچاله‌های نسبت عام، مولفه $f(r)$ متریک در مبدا متناهی است. به صورت تحلیلی می‌توان نشان داد که رفتار جواب‌ها پیرامون تکینگی سیاهچاله فقط به بخش شعاعی میدان اسکالر وابسته است و به بخش زمانی وابسته نیست. پس اگر شرایط استاتیک را به میدان اسکالر تحمیل کنیم ($q = 0$)، با در نظر گرفتن $\eta = 0$ می‌توان یک حل برای تمام r ها پیدا کرد که رفتاری مشابه معادله (۳۱.۳) در ناحیه $r \rightarrow 0$ داشته باشد.

نتیجه می‌گیریم که برای $r \rightarrow 0$ رفتار جمله پیش‌تاز حل (۱.۳)، به جای اینکه توسط $(\partial\phi)^2$ یا Λ تعیین شود، توسط جملات گالیئون $\square\phi(\partial\phi)^2$ تعیین می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت جملات DGP مرتبه بالاتر در نزدیکی تکینگی شامل مشتقات بیشتری نسبت به η و Λ هستند.

انتگرال عددی که در ادامه ارائه شده است رفتار (۳۱.۳) را تایید می‌کند. به شکل‌های (۲-۳) و (۳-۳) نگاه کنید. حال ما به دنبال رفتار مجانبی r بزرگ از حل معادلات (۱۴.۳)، (۱۵.۳) و (۱۶.۳) هستیم. فرض می‌کنیم که در بینهایت فضایی، حل دارای بسط توانی $1/r$ به صورت زیر



شکل ۳-۲: سیاه‌چاله مجانباً تخت در حالت $\eta = 0$ و $\Lambda = 0$. برای این حل $\alpha_1, \alpha_2 = 10^{-3}$ و جواب‌ها در $x = 0.3$ برای دقت عددی با ۱۴ رقم متوقف می‌شوند. بخش بزرگ شده نمودار نشان می‌دهد که برای f کاسپ (*cusp*) وجود ندارد [۱۷].

باشد

$$\begin{aligned}
 h(r) &= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{c_h^{(n)}}{r^n} \\
 f(r) &= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{c_f^{(n)}}{r^n} \\
 \chi(r) &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{c_\chi^{(n)}}{r^n}, \quad (32.3)
 \end{aligned}$$

که در r بزرگ رفتار دوسویه گونه دارد، یعنی $c_h^{(-2)} = c_f^{(-2)}$. با قرار دادن این حل‌ها در معادله حرکت بسط مجانبی را به این شکل بدست می‌آوریم [۱۷]

$$\begin{aligned}
 h(r) &= -\frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2 + 1 + O\left(\frac{\mu}{r}\right) \\
 f(r) &= -\frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2 + c_f^{(\cdot)} + O\left(\frac{\mu}{r}\right) \\
 \chi(r) &= \frac{\eta r}{3\gamma} + \frac{c_\chi^{(-1)}}{r} + O\left(\frac{\eta\mu}{\Lambda_{eff}\gamma r^2}\right), \quad (33.3)
 \end{aligned}$$

که $c_f^{(\cdot)}$ و $c_\chi^{(-1)}$ تابع‌های مشخصی از پارامترهای لاگرانژی هستند (عبارت دقیق برای این دو ارائه نمی‌دهیم چون دست و پا گیر هستند). μ ثابت انتگرال‌گیری و مربوط به جرم سیاه‌چاله است و باید از مرتبه‌ی شعاع سیاه‌چاله شوارتزشیلد تعیین شود.

تاکید می‌شود که متریک در بسط (۳۳.۳) به صورت مجانبی به حل کیهان‌شناسی همگن نزدیک می‌شود به این دلیل که Λ_{eff} در معادلات (۳۳.۳) توسط معادله (۲۴.۳) داده می‌شود. در این بسط پارامتر سرعت q دلخواه باقی می‌ماند و ممکن است دقیقاً بر q که توسط حل کیهان‌شناسی ثابت شده است، منطبق نشود.

این سوال پیش می‌آید که آیا جواب مجانبی (۳۳.۳) همگن است یا خیر؟ چون در بخش وابسته به زمان میدان اسکالر یک سرعت دلخواه q وارد شده است که الزاماً با جواب‌های کیهان‌شناسی منطبق نیست. برای بررسی همگنی میدان اسکالر، با انتگرال‌گیری از (۳۳.۳) داریم

$$\phi(t, r)_{r \rightarrow \infty} = qt - \frac{\eta}{\Lambda_{eff} \gamma} \ln \left(\sqrt{\frac{\Lambda_{eff}}{3}} r \right) + O \left(\frac{q \Lambda_{eff}}{r} \right), \quad (34.3)$$

با تغییر مختصات فریدمان داریم

$$\phi(\tau, \rho)_{\rho \rightarrow \infty} = q \cdot \tau + (q - q) \sqrt{\frac{3}{\Lambda_{eff}}} \ln \left(\sqrt{\frac{\Lambda_{eff}}{3}} \rho \right) + O \left(\frac{q \Lambda_{eff}}{\rho e^{\tau \sqrt{\Lambda_{eff}/3}}} \right), \quad (35.3)$$

بنابراین نشان می‌دهد که $\phi(\tau, \rho)$ اگرچه در ρ های بزرگ به سمت غیر همگنی می‌رود اما مجانباً همگن است.^۷

در حالت $q = q$ بسط قبلی به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} h(r) &= 1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2 + O \left(\frac{\mu^2 \Lambda_{eff}^2}{\Lambda_{eff}^2 (\Lambda_{eff}^2 + \Lambda_{eff}^2) r^6} \right), \\ f(r) &= 1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\Lambda_{eff}}{3} r^2 + O \left(\frac{\mu^2 \Lambda_{eff}^2}{\Lambda_{eff}^2 (\Lambda_{eff}^2 + \Lambda_{eff}^2) r^6} \right), \\ \chi(r) &= \frac{\eta r}{3 \gamma} + \frac{3 \gamma q^2 \mu}{2 \eta r^2} + O \left(\frac{q \cdot \mu^2 \Lambda_{eff}^{1/2}}{(\Lambda_{eff}^2 + \Lambda_{eff}^2) r^5} \right), \end{aligned} \quad (36.3)$$

که Λ ، q و Λ_{eff} را در معادلات (۱۳.۳)، (۲۳.۳) و (۲۴.۳) داریم و μ یک ثابت آزاد است. در اینجا به اهمیت نقش قسمت وابسته به زمان میدان اسکالر می‌توان پی برد که رفتار مجانبی جواب‌های سیاه‌چاله و بعلاوه مقدار تصحیح شده ثابت کیهان‌شناسی موثر را تعیین می‌کند. در این حالت حل مجانبی برای ϕ در مختصات فریدمان به صورت زیر است

$$\phi(\tau, \rho)_{\rho \rightarrow \infty} = q \cdot \tau + O \left(\frac{q \cdot \mu}{e^{3\tau \sqrt{\Lambda_{eff}/3}} \Lambda_{eff}^{3/2} \rho^3} \right). \quad (37.3)$$

^۷ به نظر می‌رسد که جواب همیشه غیر همگن است چون بخش لگاریتمی در ρ بزرگ از بین نمی‌رود، اما باید در نظر داشت که به خاطر تقارن انتقالی، ϕ یک مشاهده‌گر فیزیکی نیست و تنها مشتقات آن وارد معادله حرکت می‌شوند. به راحتی می‌توان از (۳۵.۳) نتیجه گرفت که $\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \rho^{-1}$ است که در مقابل $\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = q$ قابل چشم‌پوشی است.

در این جا قسمت همگن برخلاف حالت $q \neq q$ بسیار سریع تر فرو می پاشد.

۵-۳ سیاه چاله در چهار بعد: حل عددی

در این بخش انتگرال عددی را برای معادلات (۱۴.۳) تا (۱۶.۳) انجام خواهیم داد. بدین منظور از پارامترهای بی بعد استفاده خواهیم کرد. نظریه (۱.۳) شامل چهار پارامتر بعددار Λ, γ, η و ζ است. علاوه بر این حدسی که برای میدان اسکالر در نظر گرفته بودیم نیز دارای یک پارامتر بعد دار دیگر q بود بنابراین به طور کلی پنج پارامتر بعددار وجود دارد که باید با تعدادی از مولفه های بی بعد ترکیب شوند. ابتدا شعاع بدون بعد $x = r/r$ را تعریف می کنیم که r افق سیاه چاله است. سپس سه ثابت بدون بعد زیر را تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{\gamma q}{r \cdot \eta}, \\ \alpha_2 &= -\frac{\eta q r^2}{\zeta}, \\ \alpha_3 &= \Lambda r^2.\end{aligned}\quad (38.3)$$

در نهایت تابع بدون بعد χ/q را نیز در نظر می گیریم. معادلات حرکت (۱۴.۳) تا (۱۶.۳) را با این مقادیر جدید بازنویسی می کنیم

$$\alpha_1 (x^4 h)' \frac{f}{h} \left(\frac{\chi}{q}\right)^2 + 2x^4 h \left(\frac{\chi}{q}\right) - \alpha_1 x^4 h' = 0, \quad (39.3)$$

$$\alpha_2 x^2 \left[1 - \frac{f}{h} \left(\frac{\chi}{q}\right)^2 \right] + 2x f h' + 2h(-1 + f + \alpha_3 x^2) = 0, \quad (40.3)$$

$$\left[1 - \frac{f}{h} \left(\frac{\chi}{q}\right)^2 \right] \left[\alpha_2 x^2 \sqrt{\frac{h}{f}} - \alpha_1 \alpha_2 \left(x^2 \sqrt{\frac{f \chi}{h q}} \right)' \right] = 2x h^2 \left(\sqrt{\frac{f}{h}} \right)', \quad (41.3)$$

پریم مشتق نسبت به شعاع بدون بعد x است. از این پس مقیاس طول را r انتخاب می کنیم که شعاع سیاه چاله شوارتز شیلد است یعنی بر حسب x افق سیاه چاله در $x = 1$ است. دو معادله (۳۹.۳) و (۴۰.۳) معادله جبری نسبت به f و χ هستند و ما با حل دوباره این معادلات f و χ را نسبت به h و h' می یابیم. با جایگزین کردن معادله بدست آمده در معادله (۴۱.۳) به معادله دیفرانسیلی معمولی مرتبه دو در h می رسیم.

برای بدست آوردن یک جواب یکتا، دو شرط مرزی باید اعمال شود: شرط مرزی اول را به افق
 تحمیل می‌کنیم: به دلیل اینکه h برابر با ضریب جمله اول متریک می‌باشد، نیاز داریم که تابع شعاعی
 h در نقطه $x = 1$ صفر شود (که به سادگی می‌تواند به عنوان تعریفی از افق سیاه‌چاله در نظر گرفته
 شود). به عنوان شرط مرزی دوم ما مقدار مشتق h در $x = 1$ (h'_1) را به دلخواه مشخص می‌کنیم.
 با انتگرال گیری از $x = 1$ تا x های بزرگ ما h'_1 را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که جواب در x های
 بزرگ رفتار مجانبی کیهان شناسی مطلوبی داشته باشد.

۳-۵-۱ حالت $\eta = \Lambda = 0$

ابتدا فرض می‌کنیم که η و Λ صفر باشند. در این نمونه کنش (۱.۳) تنها شامل جمله اینشتین هیلبرت
 و گالیئون درجه سه می‌باشد و تنها پارامتر مربوطه بی بعد α_1, α_2 است. در غیاب سیاه‌چاله، حل
 کیهان‌شناسی مربوطه، فضا زمان مینکوفسکی است که توسط خط چین آبی در مبدا شکل (۳-۱)
 نشان داده شده است.

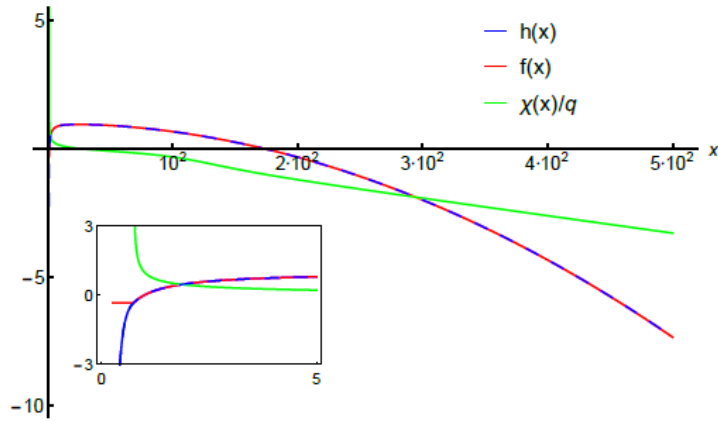
حل عددی معادلات (۳۹.۳) تا (۴۱.۳) به صورت مجانبی سیاه‌چاله تخت می‌دهد، همان‌طور که
 در شکل (۳-۲) می‌بینیم. در شرایط مرزی کلی در مورد معادلات دیفرانسیل معمولی، f و h به
 ثابت‌های متفاوتی در بینهایت میل می‌کنند، اگرچه آن‌ها می‌توانند با تنظیم مقدار عددی مشتق h در
 نقطه‌ای در مکان افق رویداد هماهنگ شوند. حل‌های عددی همواره در جهت افزایش r خوش رفتار
 هستند و ما انتگرال عددی را از افق انجام می‌دهیم.

۳-۵-۲ حالت کلی

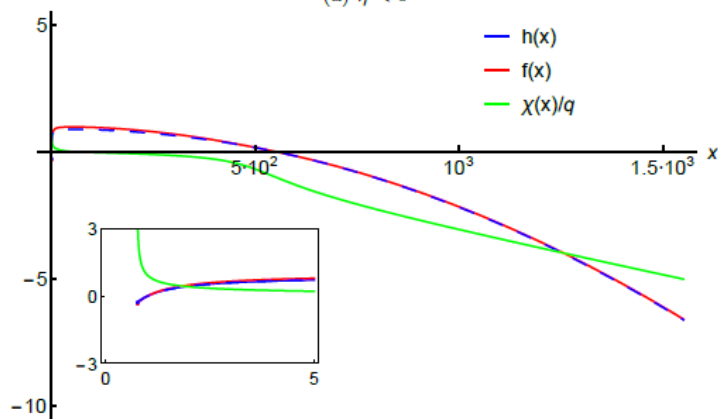
در این بخش ما تمام مقادیر را غیر صفر در نظر می‌گیریم. برخلاف حالت قبل در این‌جا رفتار مجانبی
 حل دیگر تخت نیست و ما به دنبال جواب‌های مجانباً دوسویه می‌گردیم.
 در ادامه ما بر روی حل‌هایی تمرکز می‌کنیم که در r بزرگ $f/h = 1$ باشد و حل عددی رفتار
 مجانبی شبه دوسویه دارد

$$\begin{aligned} h(r)_{r \rightarrow \infty} &\sim f(r)_{r \rightarrow \infty} \sim -C_1 r^2, \\ \chi(r)_{r \rightarrow \infty} &\sim -C_2 r, \end{aligned} \quad (42.3)$$

علاوه بر این‌ها مقدار اندازه مشتق اسکالر $(\partial\phi)^2$ در بینهایت به یک مقدار ثابت نزدیک می‌شود.
 درمی‌یابیم که به ازای مجموعه مقادیر ثابت η ، ξ ، Λ و γ ، جواب‌های عددی برای $\eta < 0$
 مجانباً به سمت حل کیهان شناسی $\Lambda <$ میل می‌کند و برای $\eta > 0$ به حل کیهان‌شناسی $\Lambda >$ نزدیک



(a) $\eta < 0$



(b) $\eta > 0$

شکل ۳-۳: a) یک سیاه‌چاله معمولی در جهان دوسویه برای گالیئون درجه سه. پارامترهای این حل $\alpha_1 = 50$ ، $\alpha_2 = 2/5 \times 10^{-7}$ و $\alpha_3 = 10^{-4}$ هستند. برای انتخاب این پارامترها، $\eta < 0$ ، سرعت $q = 0.87q$ می‌باشد و ثابت کیهان‌شناسی برهنه Λ ، برابر بزرگتر از Λ است. بنابراین این حل در شاخه Λ_- قرار دارد و به رژیم نسبیت عام نزدیک است (شکل ۴ را ببینید). طرح داخلی مستطیل یک بزرگنمایی از ناحیه سیاه‌چاله است. b) جواب دیگر در شاخه Λ_+ قرار دارد و پارامترهای این حل $\alpha_1 = 10^2$ ، $\alpha_2 = -3 \times 10^{-7}$ و $\alpha_3 = 10^{-5}$ هستند؛ $q \simeq 0.53q$ و $\Lambda \simeq 5\Lambda$. [۱۷]

می‌شود. این به این معنی است که در معادله (۴۲.۳) ثابت‌های C_1 و C_2 به ترتیب $\Lambda_{eff}/3$ و $\eta/3\gamma$ هستند. در شکل (۳-۴) ثابت کیهان‌شناسی که از حل‌های عددی ما بدست آمده در مقابل نتایج تحلیلی حل‌های کیهان‌شناسی همگن، نشان داده شده است.

همانطور که از بخش قبل انتظار داشتیم مقدار q جزئیات حل‌های سیاه‌چاله را تعیین می‌کند اما رفتارشان را نه، بنابراین همان‌گونه که در شکل (۳-۵) نشان داده شده است یک خانواده کامل از حل‌ها وجود دارد که برای مجموعه داده شده از پارامترها در لاگرانژی و مهم‌تر از آن برای جرم سیاه‌چاله داده شده، با q پارامتربندی شده است. در شکل (۳-۵) موقعیت افق ثابت نگه داشته شده است بنابراین پارامتر سرعت q مشخصه موی اولیه را دارد.

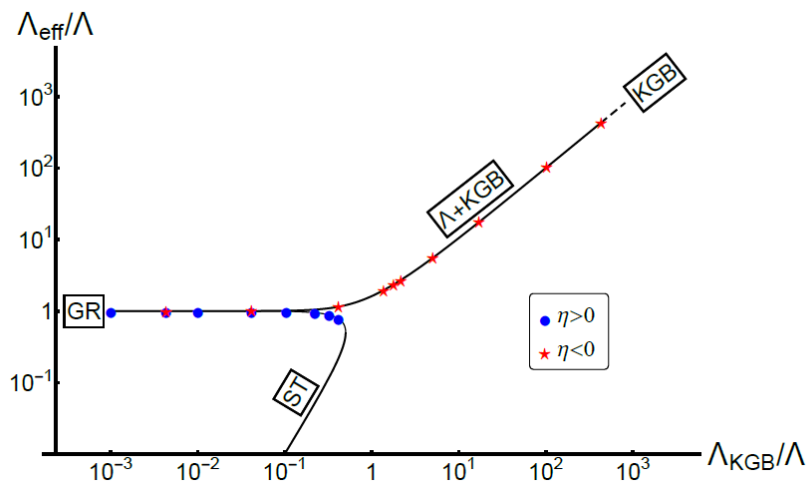
ارزشمند است که یادآوری کنیم که از حل‌های عددی که در بالا توضیح دادیم، با $h \sim f$ در r بزرگ، می‌توان حل‌های معادل فیزیکی با $f \neq h$ در بینهایت ساخت. با تغییر پارامتر زمان $t' = t/\sqrt{c}$ داریم

$$\begin{aligned} \phi(t', r) &= q\sqrt{C}t' + \int dr \frac{\chi(r)}{h(r)}, \\ ds^2 &= -Ch(r)dt'^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (43.3)$$

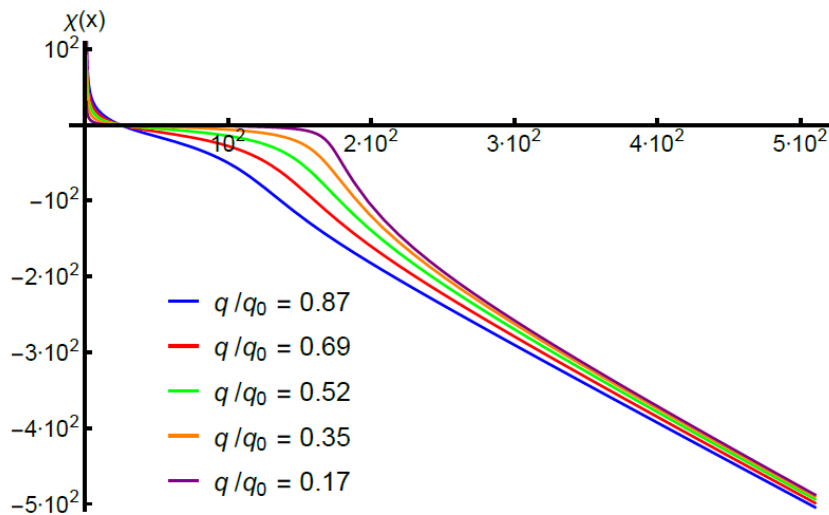
$\tilde{\chi} = C_\chi$ و $\tilde{h} = Ch$ را تعریف می‌کنیم و در حدس (۵.۳)، تعویض $q \rightarrow q\sqrt{C}$ را انجام می‌دهیم. اگر حل در بینهایت در مختصات (r, t) ، رفتار $h \sim f$ را داشته باشد یک حل مشابه در مختصات (t', r) رفتار مجانبی $\tilde{h} \sim Cf$ را دارد. بر حسب پارامترهای بی بعد این متناسب با آن است که (α_1, α_2) را با $(\sqrt{C}\alpha_1, C\alpha_2)$ جایگزین کنیم. این واضح است که تمام حل‌ها با مقدار C دلخواه به صورتی فیزیکی معادل هستند.

۳-۶ نتیجه گیری

در این فصل حل‌ها سیاه‌چاله را برای یک زیر طبقه از نظریه هورندسکی که شامل جمله اینشتین هیلبرت، ثابت کیهان‌شناسی و جملات گالیلئون درجه دو و سه بود مطالعه کردیم. به دلیل وابستگی زمانی میدان اسکالر غیر بدیهی، حل‌های سیاه‌چاله و نسبیت عام هم‌خوانی ندارند. ما ابتدا نمونه سه بعدی را مطالعه کردیم به این دلیل که معادلات ساده‌تری دارند که شبیه BTZ هستند با این تفاوت مهم که یک میدان اسکالر غیر بدیهی دارند که ثابت کیهان‌شناسی را به صورت موثر اصلاح می‌کند. میدان اسکالر به جرم سیاه‌چاله وابسته است. در ادامه حل‌های چهار بعدی را بررسی کردیم و دیدیم که قادر به انتگرال‌گیری معادلات کلی سیستم نیستیم و مجبور به در نظر گرفتن حدود خاصی از این حل‌ها هستیم.



شکل ۳-۴: مقایسه بین متریک فاصله دور حل سیاه‌چاله با حل‌های کیهان‌شناسی وابسته را نشان می‌دهد. خط پیوسته سیاه مقدار انتظاری Λ_{eff}/Λ از کیهان‌شناسی به عنوان تابعی از $\Lambda - 0$ است. نقاط آبی (ستاره‌های قرمز) بیانگر مقادیر مشابه بدست آمده از شبیه‌سازی‌های عددی با $\eta > 0$ ($\eta < 0$) است. مطابقت عالی بین نتایج عددی و پیش‌بینی‌های نظری قابل‌رویت است [۱۷].



شکل ۳-۵: تابع مقدار اسکالر χ برای مقادیر سرعت q متفاوت است. پارامترهای لاگرانژی به صورت ثابت نگه داشته شده‌اند. در این جا χ در واحد $\eta/(3\gamma)$ اندازه‌گیری شده است. تمام جواب‌ها رفتار یکسانی در فاصله خیلی دور از سیاه‌چاله دارند [۱۷].

فصل ۴

سیاه‌چاله باردار گالیئونی مرتبه سه

۴-۱ مقدمه

حالت مانای سیاه‌چاله‌ی نظریه‌ی نسبیت عام توسط تعداد محدودی از کمیت‌های وابسته تعیین می‌شوند: جرم، بار الکتریکی و تکانه‌ی زاویه‌ای. اگر ماده‌ای به سمت سیاه‌چاله سقوط کند بعد از اینکه سیستم به حالت مانا برسد پارامترهای کلی سیاه‌چاله تغییر می‌کند اما مو^۱ بوجود نمی‌آید. این قضیه به عنوان الگوی بی مویی^۲ برای سیاه‌چاله‌ها شناخته می‌شود [۲۰].

به طور کلی قضیه بی مویی را برای هر نوع ماده‌ای نمی‌توان فرمول بندی کرد، بلکه باید مفروضات دقیقی در رابطه با ماده و چگونگی جفت شدن ماده و گرانش ایجاد کرد با این شرایط می‌توان قضیه بی مویی را در شرایط خاص فرمول بندی کرد. در این فصل ما یک جواب دارای تقارن کروی در نظر می‌گیریم که برای متریک و میدان پیمانه‌ای استاتیک است و برای میدان اسکالر وابسته به زمان است [۲۱].

۴-۲ معادلات میدان و حدس

ابتدا کنش، معادلات میدان و یک حدس برای متریک و میدان اسکالر انتخاب می‌کنیم. کنش را شامل یک متریک، میدان اسکالر و یک میدان پیمانه‌ای جابجایی^۳ در نظر می‌گیریم. یک حدس متقارن کروی

^۱ به جز سه پارامتر گفته شده تمام اطلاعات دیگر به مو تشبیه شده است

^۲ no-hair

^۳ Abelian gauge field

و استاتیک برای فضا زمان و همچنین میدان پیمانه‌ای مطرح می‌کنیم. همچنین یک وابستگی زمانی خطی برای میدان اسکالر در نظر می‌گیریم.

۴-۲-۱ ساختن کنش

از کنشی که شامل جمله اینشتین هیلبرت، ثابت کیهان شناسی و میدان پیمانه‌ای ماکسول است شروع می‌کنیم

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (1.4)$$

که $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ قدرت میدان است. وردش هرکدام از جملات کنش بالا نسبت به متریک به ترتیب تانسور اینشتین $G_{\mu\nu}$ ، متریک $g_{\mu\nu}$ و تانسور انرژی تکانه میدان ماکسول را می‌دهد

$$T_{\mu\nu}^{(M)} \equiv \frac{1}{4} \left(F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (2.4)$$

تانسور اینشتین $G_{\mu\nu}$ ، متریک $g_{\mu\nu}$ و تانسور انرژی تکانه میدان ماکسول بدست آمده از کنش بالا را در تانسور $\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi$ که از مشتقات میدان اسکالر ساخته شده است ضرب می‌کنیم و جملات زیر را می‌سازیم

$$R \rightarrow G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi, \quad (3.4)$$

$$\Lambda \rightarrow (\partial\phi)^2, \quad (4.4)$$

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu}^{(M)} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi. \quad (5.4)$$

با ضرایب دلخواه جملات بدست آمده‌ی بالا را در کنش (۱.۴) وارد می‌کنیم

$$S[g_{\mu\nu}, \phi, A_\mu] = \int \sqrt{-g} d^4x \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \beta G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - \eta (\partial\phi)^2 - \gamma T_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right], \quad (6.4)$$

که η, β, γ و Λ ثابت هستند. برای ساده تر شدن محاسبات M_{pl} را از کنش حذف کردیم. میدان اسکالر و میدان پیمانه‌ای بدون بعد هستند. با این تعاریف η ثابت و بدون بعد است در حالی که β و γ ثابت و با بعد $(length)^2$ هستند و Λ بعد $(mass)^2$ دارد. جمله $\beta G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi$ یک جفت شدگی غیر کمینه بین میدان اسکالر و گرانش را می‌دهد. آخرین جمله در کنش (۶.۴) ترکیب میدان اسکالر و میدان پیمانه‌ای است.

میدان اسکالر در این کنش، دینامیک گرانش را اصلاح می‌کند و میدان پیمانه‌ای را می‌توان به عنوان

یک اصلاح اضافی در نظر گرفت، از طرف دیگر می‌توان $F_{\mu\nu}$ را مانند یک میدان الکترومغناطیس استاندارد در نظر گرفت. کنش (۶.۴) را می‌توان مانند نظریه اسکالر تانسوری هورندسکی به علاوه ماده در نظر گرفت که میدان الکترومغناطیس نقش ماده را بازی می‌کند.

۲-۲-۴ معادلات میدان و حدس

معادلات حرکت را برای کنش (۶.۴) می‌نویسیم. معادله میدان اسکالر که از وردش نسبت به ϕ بدست می‌آید به صورت زیر است

$$\nabla_{\mu} \left[\left(\beta G^{\mu\nu} - \eta g^{\mu\nu} - \gamma T_{(M)}^{\mu\nu} \right) \nabla_{\nu} \phi \right] = 0. \quad (7.4)$$

معادله بالا برحسب معادله جریان بقادار بازنویسی می‌شود

$$\nabla_{\mu} J^{\mu} = 0, \quad (8.4)$$

که جریان J^{μ} را به وسیله معادله زیر تعریف کرده‌ایم

$$J^{\mu} := J^{\mu} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{,\mu}} = \left(\beta G^{\mu\nu} - \eta g^{\mu\nu} - \gamma T_{(M)}^{\mu\nu} \right) \nabla_{\nu} \phi. \quad (9.4)$$

این جریان بقادار به دلیل تقارن انتقالی ($\phi \rightarrow \phi + cte$) کنش (۶.۴) است. وردش نسبت به A_{μ} معادله میدان پیمانهای را می‌دهد

$$\partial_{\mu} \left\{ \sqrt{-g} \left[F^{\mu\nu} - \gamma \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} \nabla_{\sigma} \phi + (F_{\sigma}^{\mu} \nabla^{\nu} \phi - F_{\sigma}^{\nu} \nabla^{\mu} \phi) \right) \nabla^{\sigma} \phi \right] \right\} = 0. \quad (10.4)$$

و در نهایت وردش کنش نسبت به متریک، معادله اصلاح شده اینشتین را به فرم زیر می‌دهد

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (11.4)$$

که داریم

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^{(1)} &= -\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(M)}, \\
 T_{\mu\nu}^{(2)} &= \beta \left\{ \frac{1}{4} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - \frac{1}{2} \nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \right. \\
 &\quad - (\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi) (\nabla_\nu \nabla_\lambda \phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \square \phi + \frac{1}{4} G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \\
 &\quad \left. - g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} (\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi) (\nabla_\lambda \nabla_\rho \phi) + \frac{1}{4} (\square \phi)^2 - \nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi R^{\lambda\rho} \right] \right\}, \\
 &\quad + \frac{1}{4} \gamma \left[F_{\mu\sigma} F_{\nu\rho} \nabla^\sigma \phi \nabla^\rho \phi + (F_{\mu\sigma} F^{\beta\sigma} \nabla_\beta \phi \nabla_\nu \phi + F_{\nu\sigma} F^{\beta\sigma} \nabla_\beta \phi \nabla_\mu \phi) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\beta\sigma} F_\tau^\sigma \nabla^\beta \phi \nabla^\tau \phi + \frac{1}{8} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi F_{\tau\beta} F^{\tau\beta} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi - \frac{1}{4} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi F_{\tau\beta} F^{\tau\beta} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \eta \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi. \tag{12.4}
 \end{aligned}$$

$T_{\mu\nu}^{(1)}$ مربوط به جمله Λ و میدان ماکسول است در حالی که $T_{\mu\nu}^{(2)}$ مربوط به سه جمله آخر کنش (۶.۴) است. معادلات میدان فوق بسیار پیچیده هستند، به همین دلیل ما حدسی برای ساده سازی معادلات حرکت در نظر می‌گیریم.

حدس را به صورت متقارن کروی برای متریک فرض می‌کنیم

$$ds^2 = -h(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2), \tag{13.4}$$

میدان اسکالر را به صورت خطی وابسته به زمان می‌گیریم

$$\phi(t, r) = q t + \psi(r). \tag{14.4}$$

در نهایت یک حدس استاندارد برای میدان پیمانه‌ای A_μ انتخاب می‌کنیم

$$A_\mu dx^\mu = A(r) dt + B(\theta) d\varphi. \tag{15.4}$$

زمانی که $B(\theta)$ یک تابع کلی از θ است، حدس فوق متقارن کروی نیست، با این حال یک انتخاب خاص از $B(\theta)$ وجود دارد که حدس فوق را متقارن کروی می‌سازد. در واقع قدرت میدان به صورت $F = \frac{1}{4} A'(r) dt \wedge dr + \frac{1}{4} B_\theta(\theta) d\theta \wedge d\varphi$ است که $B_\theta(\theta) \equiv dB(\theta)/d\theta$ است. اولین جمله از این عبارت تنها به مختصات شعاعی وابسته است و متناظر با میدان الکتریکی است. جمله دوم تنها اگر $B_\theta(\theta) \propto \sin \theta$ باشد متقارن کروی است، زیرا در این حالت $B_\theta(\theta) d\theta \wedge d\varphi$ متناسب با زاویه

فضایی^۴ (المان مساحت در کره‌ای با شعاع واحد) است. در بخش بعدی از حدس (۱۵.۴) شروع می‌کنیم و به طور واضح می‌بینیم که معادله حرکت نیاز دارد که $B(\theta) \propto \cos(\theta)$ ، باشد در نتیجه معادله (۱۵.۴) به

$$A_\mu dx^\mu = A(r)dt - P \cos(\theta)d\varphi, \quad (16.4)$$

تقلیل می‌یابد که P ثابت است.

۳-۴ حل‌های ضمنی و منظم

در این بخش ما مجموعه معادلات (۷.۴)، (۱۰.۴) و (۱۱.۴) را با حدس‌های (۱۳.۴)، (۱۴.۴) و (۱۵.۴) حل می‌کنیم. یک تابع کمکی از مختصات شعاعی به منظور ساده سازی مشکل معرفی خواهیم کرد. توابع متریک، میدان اسکالر و میدان پیمانه ای به طور مستقیم از این تابع کمکی محاسبه می‌شوند.

حل کلی به صورت ضمنی

حدس بخش قبل را در نظر می‌گیریم. $F(r) = A'$ و $C(\theta) = B_\theta$ ، معادله (۱۰.۴) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\left\{ \sqrt{\frac{f}{h}} r^\nu F \left[1 + \frac{\gamma}{\nu} \left(f (\psi')^\nu - \frac{q^\nu}{h} \right) \right] \right\}'}{\left\{ \frac{1}{r^\nu} \sqrt{\frac{h}{f}} \left[1 - \frac{\gamma}{\nu} \left(f (\psi')^\nu - \frac{q^\nu}{h} \right) \right] \right\}} = \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{C}{\sin(\theta)} \right)_\theta. \quad (17.4)$$

حال یک تابع کمکی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S(r) = \frac{\beta(rh(r))' + \frac{\gamma}{\nu} r^\nu F^\nu}{\eta r^\nu + \beta - \frac{\gamma P^\nu}{\nu r^\nu}}, \quad (18.4)$$

و طبق این تابع کمکی معادله

$$\beta G^{rr} - \eta g^{rr} - \gamma T_{(M)}^{rr} = 0, \quad (19.4)$$

به این صورت در می‌آید

$$f(r) = \frac{h(r)}{S(r)}. \quad (20.4)$$

^۴Solid angle

می‌خواهیم تمام توابع مجهول را بر حسب تابع کمکی S بنویسیم. از آنجا که معادله (۱۹.۴) تابع میدان اسکالر و معادله tr را برآورده می‌کند ما تنها مولفه rr و tt متریک را حل می‌کنیم. مولفه rr نسبت به ψ' جبری و به این شکل است

$$(\psi')^2 = \frac{1}{(\mathcal{F}\eta r^{\mathcal{F}} + \mathcal{F}\beta r^2 - \gamma P^2)h(r)} \left\{ \frac{q^2 (\mathcal{F}\beta h'(r) + \gamma r F(r)^2) r^3}{h(r)} \right. \\ \left. + \frac{(\gamma - \beta) r^{\mathcal{F}} F(r)^2}{\beta} + \frac{[P^2(\gamma - \beta) - \mathcal{F}r^{\mathcal{F}}(\eta + \beta\Lambda)] S(r)}{\beta} \right\}, \quad (21.4)$$

و با یک بار انتگرال گیری مولفه tt را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\beta \left[q^2 \beta - \frac{r^2}{\mathcal{F}\beta} (\gamma - \beta) F^2 \right] + C.S(r)^{3/2} \left[\eta r^2 + \beta - \frac{\gamma P^2}{\mathcal{F}r^2} \right] \\ - S(r) \left[(\eta - \beta\Lambda) r^2 + 2\beta - \frac{1}{\mathcal{F}r^2} P^2(\beta + \gamma) \right] = 0, \quad (22.4)$$

که C ثابت انتگرال گیری است.

تنها معادله باقی مانده، مولفه زمان معادله برداری (۱۷.۴) است که با توجه به حدس ما به این

شکل است

$$\sqrt{\frac{f}{h}} r^2 F \left[1 + \frac{\gamma}{2} \left(f(\psi')^2 - \frac{q^2}{h} \right) \right] = Q, \quad (23.4)$$

که Q مربوط به بار الکتریکی و ثابت است.

با استفاده از معادله (۲۲.۴) و اولین مشتق آن، معادله الکتریکی (۲۳.۴) را بازنویسی می‌کنیم

$$\left(\frac{\beta - \gamma}{S(r)^{1/2}} + \frac{\gamma C}{2} \right) \frac{F(r)}{\beta} = \frac{Q}{r^2}. \quad (24.4)$$

معادلات (۲۴.۴) و (۲۲.۴) معادلات جفت شده جبری نسبت به F و S هستند که حل کاملی برای سیستم می‌دهند.

با جایگذاری (۲۴.۴) در (۲۲.۴) یک معادله جبری درجه پنج برای $\sqrt{S(r)}$ بدست می‌آوریم

$$r^2 \left(C.\gamma \sqrt{S(r)} + 2\beta - 2\gamma \right)^2 \left\{ - \left[(\eta - \beta\Lambda) r^2 + 2\beta - \frac{P^2(\beta + \gamma)}{\mathcal{F}r^2} \right] S(r) \right. \\ \left. + \beta^2 q^2 + C.S(r)^{3/2} \left(\eta r^2 + \beta - \frac{\gamma P^2}{\mathcal{F}r^2} \right) \right\} - (\gamma - \beta) Q^2 S(r) \beta^2 = 0. \quad (25.4)$$

C ثابت انتگرال گیری است و رفتار مجانبی حل را تعیین می‌کند. به دلیل اینکه $S(r)$ به مشتق $h(r)$ وابسته است معادله (۲۲.۴) مستقل از جرم سیاه‌چاله است، ثابت انتگرال گیری Q مربوط به بار الکتریکی است در حالی که P مربوط به بار مغناطیسی سیاه‌چاله است. بنابراین ما تمام معادلات میدان را به یک معادله جبری درجه پنج نسبت به تابع کمکی S کاهش می‌دهیم.

۴-۴ حل‌های خاص

حل معادله اصلی (۲۲.۴) کار ساده‌ای نیست بنابراین ما حالت‌های خاصی را برای حل در نظر می‌گیریم.

۱-۴-۴ حالت $C = \Lambda = \eta = 0$

معادلات (۲۲.۴) و (۲۴.۴) برای C ساده شده‌اند، به این دلیل که در این حالت (۲۴.۴)، نشان می‌دهد که $F(r) \propto S(r)^{1/2}$ است و با جایگذاری آن در (۲۲.۴) دومی را به یک معادله خطی جبری نسبت به $S(r)$ تبدیل می‌کند. برای سادگی بیشتر ما حل را در اینجا برای $\Lambda = \eta = 0$ ارائه می‌دهیم. توابع متریک و شکل میدان اسکالر به صورت زیر در می‌آید

$$h(r) = 1 - \frac{\mu}{r} - \left(\frac{\sqrt{2} [P^2 (\gamma - \beta) - (\beta - 3\gamma) \bar{Q}^2]}{4r \sqrt{\beta} [\bar{Q}^2 (\gamma - \beta) - P^2 (\beta + \gamma)]} \right) \times \arctan \left(\frac{2 \sqrt{2} \beta r}{\sqrt{\bar{Q}^2 (\gamma - \beta) - P^2 (\beta + \gamma)}} \right), \quad (26.4)$$

$$f(r) = \left(1 + (\gamma - \beta) \frac{\bar{Q}^2}{\Lambda r^2 \beta} - \frac{P^2 (\gamma + \beta)}{\Lambda \beta r^2} \right) h(r),$$

$$(\psi'(r))^2 = \frac{2}{\beta r^2 f(r)^2} \left(r^2 (1 - f(r)) + \frac{\bar{Q}^2 (\gamma - \beta)}{\Lambda \beta} - \frac{P^2 (\gamma + \beta)}{\Lambda \beta} \right),$$

همراه با

$$F(r) = \pm \frac{\bar{Q}}{r^2} \left(1 + \frac{\bar{Q}^2 (\gamma - \beta)}{\Lambda r^2 \beta} - \frac{P^2 (\beta + \gamma)}{\Lambda \beta r^2} \right)^{-1/2},$$

$$F_{\theta\varphi} = C(\theta) = P \sin(\theta), \quad (27.4)$$

که بار الکتریکی \bar{Q} به صورت $Q = \frac{\bar{Q}(\gamma - \beta)}{\beta}$ باز مقیاس بندی شده است. برای q مقدار خاص زیر را فرض می‌کنیم

$$q^2 \beta = 2, \quad (28.4)$$

به گونه‌ای که برای جواب‌های مجانباً تخت ($h(r) \rightarrow 1$)، مولفه زمان به طور متناسب تعریف می‌شود و ما زاویه فضایی نخواهیم داشت. با توجه به آنچه که در بالا گفته شد ما رابطه زیر را به طور ضمنی فرض کردیم

$$\bar{Q}^2 (\gamma - \beta) > P^2 (\beta + \gamma). \quad (29.4)$$

در این حال حل (۶۶.۴) و (۲۷.۴) به یک سیاهچاله مجانباً تخت با $S > 0$ مربوط می‌شود به طوری که میدان اسکالر توسط شرط $h(r_H) = 0$ به خوبی فراتر از افق رویداد سیاهچاله تعریف شده است. هر دو متریک و میدان الکترومغناطیس نسبت به حل سیاهچاله باردار نسبت عام تغییر کرده‌اند. برای $r \rightarrow \infty$ میدان الکتریکی (۲۷.۴) با بار موثر \bar{Q} به صورت $F \sim 1/r^2$ است. جرم سیاهچاله توسط آخرین جمله‌ی اولین معادله (۶۶.۴) اصلاح می‌شود.

هنگامی که شرایط (۲۹.۴) برقرار نگردد یعنی برای $P^2 (\beta + \gamma) < \bar{Q}^2 (\gamma - \beta)$ ، معادله (۲۷.۴) در r های کوچک موهومی می‌شود بنابراین جواب به صورت فیزیکی قابل اعتماد نیست و ما آن را مورد بحث قرار نمی‌دهیم.

با تنظیم $P = 0$ حالت الکتریکی خالص را بدست می‌آوریم که شرط برای حل تخت مجانبی $\gamma > \beta$ است. حالت مغناطیسی خالص نیز با $Q = 0$ دریافت می‌شود که در این حالت γ مقدار منفی می‌گیرد $-\beta < \gamma$.

۲-۴-۴ حالت $f(r)=h(r)$

یک مورد دیگر که به راحتی قابل حل است را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $f(r) = h(r)$ باشد بنابراین تابع کمکی $S(r)$ مقدار یک را به خود می‌گیرد

$$S(r) = 1. \quad (30.4)$$

با استفاده از معادله بالا روابط زیر را داریم

$$h(r) = 1 - \frac{\mu}{r} + \frac{\eta r^2}{3\beta} + \frac{\gamma(Q^2 + P^2)}{4\beta r^2}, \quad (31.4)$$

$$(\psi'(r))^2 = \frac{1-f(r)}{f(r)^2} q^2, \quad (32.4)$$

$$F_{tr} = F(r) = \frac{Q}{r^2}, \quad (33.4)$$

$$F_{\theta\varphi} = C(\theta) = P \sin(\theta). \quad (34.4)$$

که ثابت‌های جفت شدگی و ثابت‌های انتگرال گیری و سرعت q با یکدیگر مرتبط هستند

$$\begin{aligned} P^2 \beta (\Lambda \gamma + \eta) &= Q^2 \eta (\gamma - \beta) \\ q^2 &= \frac{\eta + \Lambda \beta}{\beta \eta}, \\ C. &= \frac{1}{\eta} (\eta - \beta \Lambda). \end{aligned} \quad (35.4)$$

میدان الکترومغناطیس مشابه حالت حل رایسنر-نوردستروم^۵ است. هنگامی که بار مغناطیسی صفر است اولین معادله از (۳۵.۴) به صورت $\beta = \gamma$ است، از سوی دیگر هنگامی که بار الکتریکی صفر است همان معادله به $\Lambda\gamma + \eta = 0$ می‌رسد اما در این حالت بخش وابسته زمانی میدان اسکالر حذف می‌شود.

حالت استاتیک برای $\beta = \gamma$

اکنون حالت $q = 0$ را در نظر می‌گیریم بنابراین میدان اسکالر هیچ وابستگی زمانی ندارد و ما انتظار داریم که میدان اسکالر در افق تکینگی داشته باشد. البته این حل‌ها مستقیماً رد نمی‌شوند چون کنش تنها به مشتقات اسکالر وابسته است و آن‌ها در افق منظم هستند. ما این حالت را به طور خلاصه بررسی می‌کنیم. $\beta = \gamma$ در نظر می‌گیریم. تابع کمکی $S(r)$ شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$S(r) = \frac{4 [2 (\Lambda \beta - \eta) r^4 - 4 \beta r^2 + P^2 \beta]^2}{C^2 (4 \eta r^4 + 4 \beta r^2 - P^2 \beta)^2}, \quad (36.4)$$

برای سادگی ما تنها حالت الکتریکی را بررسی خواهیم کرد و $P = 0$ را در نظر می‌گیریم. برای $P = 0$

$$\begin{aligned} h(r) &= \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{(\eta - \beta \Lambda)^2 r^2}{3 \eta C^2} + \frac{(3 \eta + \beta \Lambda)(\eta - \beta \Lambda)}{C^2 \eta^2} \\ &\quad + \frac{\beta(\eta + \beta \Lambda)^2}{\sqrt{\eta} \beta C^2 \eta^2 r} \arctan \left(\frac{\eta r}{\sqrt{\eta} \beta} \right), \\ f(r) &= \frac{C^2 (\eta r^2 + \beta)^2}{[(\eta - \beta \Lambda) r^2 + 2 \beta]^2 \beta} h(r), \\ (\psi'(r))^2 &= -\frac{r^2 (\eta + \beta \Lambda)}{\beta (\eta r^2 + \beta) f(r)}, \end{aligned} \quad (37.4)$$

توجه کنید که تابع اسکالر $\psi(r)$ به دلیل اینکه وابستگی زمانی ندارد که تکینگی شعاعی را لغو کند، تکین است، اگرچه اندازه $(\nabla \phi)^2$ ظاهر شده در کنش در افق منظم و متناهی است. قدرت میدان الکتریکی به این صورت است

$$F_{rt} = B(r) = \frac{2Q}{r^2}. \quad (38.4)$$

که این همان میدان ماکسول برای تقارن کروی است.

^۵Reissner-Nordstrom

۵-۴ نظریه‌های هورندسکی

شکل خاص نظریه اسکالر-تانسوری به صورت زیر است

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_{pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right) + \int d^4x \mathcal{L}_m(\psi_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}), \quad (39.4)$$

که اثرات غیر خطی از بخش آخر نشات می‌گیرند. معادله حرکت این نظریه از مرتبه دو می‌باشد. در سال ۱۹۷۴ کلی‌ترین حالت نظریه اسکالر-تانسور که معادله حالت مرتبه دوم داشت توسط هورندسکی^۶

ارائه شد [۳۷]. کنش آن در چهارچوب جردن برابر است با

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_H + \int d^4x \mathcal{L}_m(\psi_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}), \quad (40.4)$$

که \mathcal{L}_H لاگرانژی هورندسکی می‌باشد و به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= K(\phi, X) - G_3(\phi, X) \nabla_\mu \nabla^\mu \phi + G_4(\phi, X) R \\ &+ G_{4X} [(\nabla_\mu \nabla^\mu \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2] + G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \\ &- \frac{1}{6} G_{5X} [(\nabla_\mu \nabla^\mu \phi)^3 - 3 \nabla_\mu \nabla^\mu \phi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 + 2 (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^3], \quad (41.4) \end{aligned}$$

که $X \equiv \frac{1}{2} (\partial\phi)^2$ و $G_{iX} = \frac{\partial G_i}{\partial X}$ هستند. این لاگرانژی کلی‌ترین حالت نظریه اسکالر-تانسور شامل معادله حرکت مرتبه دوم می‌باشد. مکانیزم و اینشتاین برای گروه بزرگی از این نظریه برقرار است. نظریه گالیلئونی درجه سه^۷ ساده‌ترین حالت از لاگرانژی هورندسکی می‌باشد که این مکانیزم برای آن برقرار است.

۱-۵-۴ مکانیزم و اینشتاین

مکانیزم و اینشتاین نقش مهمی در نظریه‌های گرانش جرم‌دار و نظریه‌های مرتبط مانند نظریه گالیلئون دارد [۳۸]. در این جا این مکانیزم را مختصراً توضیح می‌دهیم. لاگرانژی مدل گالیلئون درجه سه به صورت زیر می‌باشد

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{\lambda\pi G} \left[-\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{r_c^2}{3} (\partial\phi)^2 \nabla_\mu \nabla^\mu \phi \right] + \phi T, \quad (42.4)$$

ϕ بی بعد و r_c^2 پارامتری از مرتبه $\mathcal{O}(H^{-1})$ است. در این مکانیزم $r_c^2 \nabla_\mu \nabla^\mu \phi$ در فواصلی کمتر از شعاع و اینشتاین خیلی بزرگ می‌شود بنابراین لاگرانژی به صورت تقریبی زیر در می‌آید

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{\lambda\pi G_{eff}} \left[-\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 \right] + \phi T, \quad (43.4)$$

^۶Horndeski

^۷Cubic Galileon

که $G_{eff} \ll G$ می باشد و در فواصل کمتر از شعاع و اینشتاین جفت شدگی میدان با ماده خیلی کم شده و میدان استتار می شود. معادله حرکت این مدل به این صورت است

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi + \frac{2r_c^2}{3} [(\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi)^2 - (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi)^2] = -8\pi GT, \quad (44.4)$$

معادله بالا را برای یک جسم کروی استاتیک حل می کنیم. نیروی میدان اسکالر را به این شکل داریم

$$F_{\phi} = \partial_r \phi = \frac{3r}{8r_c^2}(-1) + \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{GM r_c^2}{r^3}}, \quad (45.4)$$

شعاع و اینشتاین به صورت زیر تعریف می شود

$$r_V \equiv (GM r_c^2)^{1/3}, \quad (46.4)$$

برای $r \gg r_V$ داریم

$$F_{\phi} \sim \frac{GM}{r^2}, \quad (47.4)$$

برای $r \ll r_V$ داریم

$$F_{\phi} \sim \frac{GM}{r^2} \left(\frac{r}{r_V} \right)^{3/2} \ll \frac{GM}{r^2}, \quad (48.4)$$

در فاصله های $r \ll r_V$ جمله جنبشی $r_c^2 \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi$ بر جمله جنبشی استاندارد غالب شده و باعث سرکوب میدان می شود. همان طور که مشاهده می کنید در فاصله های کمتر از شعاع و اینشتاین نیروی میدان اسکالر استتار می شود اما در فواصل بزرگتر از شعاع و اینشتاین عبارت جنبشی معمول $\frac{1}{4}(\partial\phi)^2$ غالب و نیروی میدان از مرتبه بزرگی نیروی گرانش نیوتنی می شود و به این صورت باعث شتاب تند شونده عالم می شود و این نکته را نیز باید خاطر نشان کرد که برای سازگاری با مشاهدات شعاع و اینشتاین باید از شعاع منظومه شمسی بیشتر باشد [39].

۶-۴ قضیه نوتر

قضیه نوتر نشان می دهد که در یک نظریه میدان همواره تقارن های پیوسته منجر به وجود جریان های پایسته می شوند و تعداد جریان های پایسته نیز دقیقا برابر با بعد گروه تقارن است. حالت ساده ای را در نظر می گیریم که تنها میدان ها تبدیل می شوند. از آنجا که نقاط فضا زمان تغییر نمی کنند یک نظریه میدان وقتی دارای این نوع تقارن است که لاگرانژی اش تغییر نکند. طبیعتا کنش چنین سیستمی نیز تغییر نمی کند.

قضیه نوتر برای وقتی که فقط میدان ها تبدیل می شوند، از آنجا که این تبدیلات پیوسته هستند حتما می توان تبدیلات بی نهایت کوچک را در نظر گرفت. هر نتیجه ای که برای این تبدیلات بدست بیاوریم برای تبدیلات دلخواه هم درست است زیرا تبدیلات دلخواه چیزی نیستند جز تکرار همین تبدیلات بی نهایت کوچک. لاگرانژی ما شامل میدان هایی است که آنها را با

$$\phi_i, \quad i = 1, \dots, K. \quad (49.4)$$

نشان می دهیم. این میدان ها تحت تبدیل تقارنی بی نهایت کوچک به میدان های زیر تبدیل می شوند:

$$\phi'_i = \phi_i + \delta\phi_i, \quad i = 1, \dots, K. \quad (50.4)$$

دقت کنید که این $\delta\phi_i$ برای هر میدانی یک جور است چرا که ممکن است تبدیل تقارنی میدان های مختلف را به شکل های مختلف تحت تاثیر قرار دهد. فرض ما این است که لاگرانژی تحت این تبدیلات ناورداست. هم چنین فرض دیگر ما این است که لاگرانژی تنها تابع میدان ها و مشتقات مرتبه یک آنهاست. این تقارن را به شکل زیر می نویسم

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \delta\partial_\mu\phi). \quad (51.4)$$

که در آن برای سادگی از نماد ϕ بدون اندیس برای نشان دادن همه میدان ها استفاده کرده ایم. بنابراین داریم

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\partial_\mu\phi = 0. \quad (52.4)$$

در این عبارت و عبارت هایی که در آینده می نویسیم یک جمع روی اندیس میدان ها از $i = 1$ تا $i = K$ مستتر است

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i, \quad (53.4)$$

از معادله حرکت و هم چنین رابطه $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$ استفاده می کنیم و رابطه بالا را به صورت زیر می نویسیم:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\partial_\mu\delta\phi = 0. \quad (54.4)$$

و یا

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi\right) = 0. \quad (55.4)$$

به این ترتیب این تقارن منجر به یک معادله پیوستگی به صورت

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0, \quad (56.4)$$

شده است که در آن

$$J^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi, \quad (57.4)$$

جریان پایسته است [۱۸].

۷-۴ سیاه‌چاله BTZ

سیاه‌چاله BTZ ^۸ در سال ۱۹۹۲ نام گذاری شد. معادلات اینشتین ماکسول استاندارد در فضا-زمان $2+1$ بعدی با یک ثابت کیهان شناسی منفی یک حل سیاه‌چاله ارائه می‌دهد. سیاه‌چاله $1+2$ بعدی قضیه بی‌مویی را می‌پذیرد و به وسیله جرم، بار و تکانه زاویه‌ای مشخص می‌شود و توسط انتگرال شار در بینهایت تعریف می‌شود که شبیه سیاه‌چاله $1+3$ بعدی می‌باشد.

ما می‌خواهیم سیاه‌چاله‌های کلاسیکی را در بعد پایین‌تر بررسی کنیم چون پیچیدگی‌های سیاه‌چاله‌های چهار بعدی را ندارند. اینجا هدف این است که نشان دهیم که در نظریه اینشتین ماکسول استاندارد سه بعدی این حل با ثابت کیهان شناسی منفی وجود دارد. ابتدا برای سادگی جفت شدگی میدان ماکسول را در نظر نمی‌گیریم، بعد از آن تعمیم به بار الکتریکی غیر صفر را نشان می‌دهیم.

کنش به این صورت است

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} [R + 2l^{-2}] d^2x dt + B, \quad (58.4)$$

که B جمله سطح^۹ است و l شعاع است که به ثابت کیهان شناسی مرتبط است $-\Lambda = l^{-2}$. متریک زیر جواب معادله حرکت بدست آمده از معادله بالا می‌باشد

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^{\phi} dt + d\phi)^2, \quad (59.4)$$

که مربع بردار گذار $N^2(r)$ و انتقال زاویه‌ای $N^{\phi}(r)$ به شکل زیر هستند

$$\begin{aligned} N^2(r) &= -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \\ N^{\phi}(r) &= -\frac{J}{2r^2}, \end{aligned} \quad (60.4)$$

^۸Maximo.Banados, Claudio.Teitelboim and Jorje.Zanelli.

^۹Surface

که $-\infty < t < \infty$ ، $0 < r < \infty$ و $0 \leq \phi \leq 2\pi$ است. هدف ما تمرکز بر روی خواص فیزیکی حل است. دو ثابت انتگرال گیری M و J که در معادله (۵۹.۴) ظاهر شدند به ترتیب بارهای پایسته مربوط به ناوردایی مجانبی تحت جابجایی زمان ^{۱۰} (جرم) و ناوردایی دورانی ^{۱۱} (تکانه زاویه‌ای) هستند. تابع گذر $N(r)$ برای دو مقدار r حذف می‌شوند

$$r_{\pm} = l \left[\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (61.4)$$

که از این دو مقدار r_+ افق سیاه‌چاله است. برای اینکه افق وجود داشته باشد باید مقادیر زیر را داشته باشیم

$$M > 0, \quad |J| \leq Ml. \quad (62.4)$$

توجه داشته باشید که شعاع انحنای $l = (-\Lambda)^{-1/2}$ مقیاس طول را به منظور داشتن افق در یک تئوری که جرم بدون بعد است ضروری می‌کند. اگر اجازه دهیم که l خیلی بزرگ شود، بیرون سیاه‌چاله به سمت بینهایت می‌رود و فقط فضای داخل سیاه‌چاله باقی می‌ماند.

اگر سیاه‌چاله را ناپدید کنیم، حالت خلاء پدید می‌آید، یعنی اندازه افق به سمت صفر می‌رود و این با میل کردن M به سمت صفر بدست می‌آید که این نیز به $J \rightarrow 0$ نیاز دارد. بنابراین المان طول به شکل زیر است

$$ds_{vac}^2 = -(r/l)^2 dt^2 + (r/l)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (63.4)$$

اگر M به صورت منفی رشد کند جواب‌های دارای تکینگی به وجود می‌آیند [۲۸]، [۲۹]. اگرچه یک حالت استثنایی مهم وجود دارد زمانی که $M = -1$ و $J = 0$ باشد تکینگی از بین می‌رود تکینگی وجود ندارد اما افق هم وجود ندارد اما افق نیز وجود ندارد که تکینگی پشت آن پنهان شود. متریک مربوطه به شکل زیر است [۳۰]

$$ds^2 = -(1 + (r/l)^2) dt^2 + (1 + (r/l)^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (64.4)$$

۸-۴ نتیجه گیری

در این فصل یک حل دقیق سیاه‌چاله در نظریه بردار-تانسور-اسکالر بوسیله (۶.۴) بدست آوردیم. کنش علاوه بر عبارت اینشتین هیلبرت شامل جمله جنبشی استاندارد برای میدان اسکالر، شامل

^{۱۰} time displacements

^{۱۱} rotational invariance

جمله ماکسول جنبشی استاندارد برای میدان پیمانه‌ای و همچنین شامل دو جمله غیر خطی، توصیف کننده‌ی جفت شدگی جنبشی غیر کمینه‌ی میدان اسکالر و گروتون و جفت شدگی جنبشی میدان اسکالر و میدان پیمانه‌ای نیز است. همچنین کنش برای میدان اسکالر تقارن انتقالی دارد، یعنی کنش به مشتقات میدان اسکالر وابسته است نه به خود میدان اسکالر و همچنین میدان برداری تنها از طریق ترکیب $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ وارد کنش می‌شود، به همین دلیل کنش ناوردای پیمانه‌ای $U(1)$ است. ما حدس‌های یک حل متقارن کروی استاتیک را برای متریک (۱۳.۴) و میدان پیمانه‌ای (۱۶.۴) جستجو کردیم در حالی که برای میدان اسکالر یک وابستگی زمانی و شعاعی (۱۴.۴) در نظر گرفتیم و نشان دادیم که تا زمانی که وابستگی زمانی اسکالر، خطی است، حدس اعتبار دارد.

حل شامل سه ثابت انتگرال گیری است: Q مربوط به بار الکتریکی، P مربوط به بار مغناطیسی و C که رفتار مجانبی حل را تعیین می‌کند. تابع کمکی $S(r)$ را به منظور ساده سازی روابط معرفی کردیم

$$S(r) = \frac{\beta(rh(r))' + \frac{2}{3}r^2 F^2}{\eta r^2 + \beta - \frac{\gamma P^2}{4r^2}}, \quad (65.4)$$

که توابع متریک، میدان اسکالر و میدان پیمانه‌ای را به وسیله آن محاسبه کردیم. یک ثابت انتگرال گیری مربوط به جرم سیاه‌چاله وجود دارد که در معادلات اصلی (۲۲.۴) و (۲۴.۴) دیده نمی‌شود اما با انتگرال گیری از (۱۹.۴) و بدست آوردن $S(r)$ برای رسیدن به $h(r)$ ، ظاهر می‌شود.

حل معادلات اصلی به صورت کلی کار ساده‌ای نبود و ما حالت‌های خاص را حل و بررسی کردیم. ابتدا حالت $C = \Lambda = \eta = 0$ را در نظر گرفتیم و برای q مقدار خاص $(\frac{2}{\beta})^{\frac{1}{2}}$ را فرض کردیم، در این حالت حل به سیاه‌چاله مجانباً تخت با $S > 0$ مربوط می‌شود. متریک و میدان الکترومغناطیس نسبت به حل سیاه‌چاله باردار در نسبت عام تغییر کردند. دیدیم که در $r \rightarrow \infty$ بار الکتریکی موثر با معکوس مجذور فاصله از منبع متناسب است که این مشابه قانون کولن است. جرم سیاه‌چاله توسط جمله آخر معادله زیر اصلاح شد

$$h(r) = 1 - \frac{\mu}{r} - \left(\frac{\sqrt{2} [P^2 (\gamma - \beta) - (\beta - 3\gamma) \bar{Q}^2]}{4r \sqrt{\beta} [\bar{Q}^2 (\gamma - \beta) - P^2 (\beta + \gamma)]} \right) \times \arctan \left(\frac{2\sqrt{2}\beta r}{\sqrt{\bar{Q}^2 (\gamma - \beta) - P^2 (\beta + \gamma)}} \right). \quad (66.4)$$

حالت بعدی که در نظر گرفتیم $f(r) = h(r)$ بود که تابع کمکی $S(r)$ در این حالت یک بدست آمد و دیدیم که میدان الکترومغناطیس در این حالت مشابه حل رایسنر-نوردستروم است. $P = 0$ در این حالت شکل قدرت میدان الکتریکی را مانند ماکسول معمولی می‌دهد. در ادامه حالت استاتیک

$\beta = \gamma$ را بررسی کردیم و $q = 0$ در نظر گرفتیم در نتیجه وابستگی میدان اسکالر از بین رفت و ما انتظار داشتیم میدان اسکالر در افق تکین شود اما به دلیل اینکه کنش تنها به مشتقات میدان اسکالر وابسته است اندازه $(\nabla\phi)^2$ ظاهر شده در افق منظم و متناهی است. در این حالت P را برابر صفر گرفتیم و تنها حالت الکتریکی را بررسی کردیم.

مراجع

- [۱] جورج الیس و روٹ ویلیامز: فضا-زمان تخت و خمیده، مرکز نشر دانشگاهی، ترجمه یوسف امیر ارجمند، سال ۱۹۸۸.
- [2] Reall Harvey. “ General Relativity ” Part 3 Cambridge Lecture note (2013) .
- [3] Grøn Øyvind and Hervik Sigbjorn. “ Einstein’s general theory of relativity: with modern applications in cosmology ” Springer Science , Business Media (2007) .
- [4] Narlikar Jayant V. “ An introduction to relativity ” Cambridge University Press (2010)
- [5] Carroll Sean M. “ Spacetime and geometry, An introduction to general relativity ” Addison-wesley (2004) .
- [6] Townsend Paul K. “ Black holes ” Lecture notes from the University of Cambridge (1997) .
- [7] Ryden Barbara. “ Introduction to cosmology ” Lecture notes from the Department of Astronomy the Ohio State University (2006) .
- [8] Penzias Arno and Robert Woodrow. “ A measurement of the excess antenna temperature at 4080 Mc / s ” The Astrophysical Journal 142: 419-421 (1965).
- [9] Maartens Roy and Elisabetta Majerotto. “ Observational constraints on self-accelerating cosmology ” Physical Review D 74: 023004 (2006) .
- [10] Copeland Edmund, Mohammad Sami and Shinji Tsujikawa. “ Dynamics of dark energy ” International Journal of Modern Physics D 15: 1753-1935 (2006) .

- [11] Xu Lixin. “ Confronting DGP braneworld gravity with cosmico observations after Planck data ” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* D 48: 06406 (2014) .
- [12] Lombriser Lucas, Hu Wayne, Fang Wenjuan and Seljak1 Uroš. “ Cosmological constraints on DGP braneworld gravity with brane tension ” *Physical Review D* 80: 063536 (2009) .
- [13] Clifton Timothy, Pedro Ftona, Padilla Antonio and Skordis Constantinos. “ Modified gravity and cosmology ” *Physics reports* 513: 1-189 (2012) .
- [14] Gabadadze Gregory and Iglesias Alberto. “ (De) coupling limit of DGP ” *Physics Letters B* 639: 88-94 (2006) .
- [15] Nicolis Alberto, Rattazzi Riccardo and Trincherini Enrico. “ Galileon as a local modification of gravity ” *Physical Review D* 79: 064036 (2009) .
- [16] Deffayet Cédric, Gilles Esposito-Farese and Alexander Vikman. “ Covariant galileon ” *Physical Review D* 79: 084003 (2009) .
- [17] Babichev Eugeny, Charmousis Christos, Moskalets Tetiana and Lehebel Antoine. “Black holes in a cubic Galileon universe ” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* D 11: 06406 (2016) .
- [18] Srednicki Mark. “ Quantum field theory ” Cambridge University Press (2007) .
- [19] Babichev Eugeny, Christos Charmousis and Antoine Lehébel. “ Black holes and stars in Horndeski theory ” *Classical and Quantum Gravity* 33: 154002 (2016) .
- [20] Misner Charles, Thorne Kip, Wheeler John and Kaiser David “ Gravitation ” Princeton University Press (2017) .
- [21] Babichev Eugeny, Charmousis Christos and Hassaine Mokhtar . “ Charged Galileon black holes ” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* D 31: 06406 (2015) .
- [22] Deffayet Cedric, Pujolàs Oriol, Sawicki Ignacy and Vikman Alexander. “ Imperfect dark energy from kinetic gravity braiding ” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* D 26: 054306 (2010) .

- [23] Luty Markus, Massimo Porrati and Riccardo Rattazzi. “ Strong interactions and stability in the DGP model ” *Journal of High Energy Physics D* 29: 187 (2003) .
- [24] Deffayet Cedric, Gia Dvali and Gregory Gabadadze. “ Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions ” *Physical Review D* 65: 044023 (2002) .
- [25] Deffayet Cedric. “ Cosmology on a brane in Minkowski bulk ” *Physics Letters B* 502: 199-208 (2001) .
- [26] Babichev Eugeny and Gilles Esposito-Farèse. “ Time-dependent spherically symmetric covariant Galileons ” *Physical Review D* 87: 044032 (2013) .
- [27] Babichev Eugeny. “ Galileon accretion ” *Physical Review D* 83: 024008 (2011) .
- [28] Hooft Gerard, Deser Stanley and Jackiw Roman. “ Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space ” *Annals of Physics* 152: 220-235 (1984) .
- [29] Brown John David. “ Lower Dimensional Gravity ” PhD. Thesis (University of Texas at Austin, 1985.) Published as a book under the same title (World Scientific, Singapore, 1988) .
- [30] Banados Maximo, Claudio Teitelboim and Jorge Zanelli. “ Black hole in three-dimensional spacetime ” *Physical Review Letters* 69: 1849 (1992) .
- [31] Fubini Sergio. “ A new approach to conformal invariant field theories ” *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* 34: 521-554 (1976) .
- [32] Will Clifford M. “ The confrontation between general relativity and experiment ” *Living reviews in relativity* 9: 3 (2006) .
- [33] Brax Philippe, Davis Anne-Christine, Li Baojiu and Winther Hans. “ Unified description of screened modified gravity ” *Physical Review D* 86: 044015 (2012) .
- [34] Weinberg Steven. “ Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell’s and Einstein’s equations ” *Physical Review* 138: B988 (1965) .
- [35] de Rham Claudia. “ Massive gravity ” *Living reviews in relativity* 17: 7 (2014) .

- [36] Hinterbichler Kurt. “ Theoretical aspects of massive gravity ” *Reviews of Modern Physics* 84: 671 (2012) .
- [37] Fujii Yasunori and Kei-ichi Maeda. “ The scalar-tensor theory of gravitation ” Cambridge University Press (2003) .
- [38] Babichev Eugeny and Cédric Deffayet. “ An introduction to the Vainshtein mechanism” *Classical and Quantum Gravity* 30: 184001 (2013) .
- [39] Brax Philippe. “ Screening mechanisms in modified gravity ” *Classical and Quantum Gravity* 30: 214005 (2013) .

ABSTRACT

Black Hole Dynamics in Horndeski Theory

By:

Marjan Heshmatian

In this thesis, we study the black hole dynamics in cubic Galileon theory, the simplest of Horndeski theory, and which is well established in cosmology, such as dark energy. First we reviewed the history of general relativity and modified gravitation, and then we study Galileon theory in flat space. We obtain the Lagrangian and the corresponding equation of motions in the four-dimensional space-time, then we study this theory in Curved space-time. After that, we solve the black hole with an action includes of the Einstein-Hilbert part, the cosmological constant, and the cubic Galileon term. Due to the non-trivial scalar field profile, which results from the time-dependence of the scalar field, the black hole solutions do not coincide with those of GR. Finally, we study Charged black holes in this theory. The action includes the Einstein-Hilbert term, a cosmological constant and the standard Maxwell gauge field and the cubic Galileon term. The solution contains three integration constants: Q is proportional to the electric charge of the black hole, P is related to the magnetic charge of the monopole, and the constant C_0 which determines the asymptotic behavior of the solution. We define the function $S(r)$ for Simplicity and express all the other functions of the theory in terms of $S(r)$, and we also consider particular explicit solutions.

Ministry of Science, Research, and Technology



**Damghan University
School of Physics**

**M.Sc. Thesis
In Physics (Gravitation and Cosmology)**

**Black Hole Dynamics in
Horndeski Theory**

**By:
Marjan Heshmatian**

**Supervisor:
Shahab Shahidi**

**Advisor:
Masoud Jafari**

September 2018

In The Name of God

**Black Hole Dynamics in Horndeski
Theory**

By:

Marjan Heshmatian

THESIS

SUBMITTED TO THE SCHOOL OF GRADUATE STUDIES IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M.Sc.)

In

Physics (Gravitation and Cosmology)

DAMGHAN UNIVERSITY

DAMGHAN, ISLAMIC REPUBLIC OF IRAN

EVALUATED AND APPROVED BY THE THESIS COMMITTEE AS: **EXCELLENT**

Seyed Shahabeddin Shahidi Shadkam. (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS
OF GRAVITATION AND COSMOLOGY, DAMGHAN UNIVERSITY (SUPER-
VISOR)

Masoud Jafari. (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS OF ASTRONOMY AND
ASTROPHYSICS, DAMGHAN UNIVERSITY (ADVISOR)

Zahra Haghani. (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS OF GRAVITATION
AND COSMOLOGY, DAMGHAN UNIVERSITY (EXAMINER)

Leila Shahkarami. (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS OF ELEMENTARY
PARTICLES, DAMGHAN UNIVERSITY (EXAMINER)

Leila Shahkarami. (Ph.D.), ASSISTANT PROF. IN PHYSICS OF ELEMENTARY
PARTICLES, DAMGHAN UNIVERSITY (Representative of the Graduate Studies)

September 2018