فصل دوم:

تنش و کرنش ناشی از نیروی محوری

Chapter 2: Stress and strain-Axial loading

Contents + فهرست مطالب

Introduction - مقدمه

+ Introduction

+ مقدمه

یکی از جنبه‌های مهم تحلیل و طراحی سازه‌ها، میزان تغییر شکل ناشی از نیروهاست. اهمیت این موضوع در این است که الف) باید از ایجاد تغییر شکل‌های بزرگ در سازه‌ها که سبب می‌شوند آنها هدفی که برای آن طراحی شده‌اند را نتوانند انجام دهند، جلوگیری شود؛ ب) تحلیل تغییر شکل‌های یک سازه می‌تواند در تعیین تنش کمک نماید.

باید به این نکته توجه کرد که همیشه این امکان وجود ندارد که بتوان نیروهای درون یک سازه را با استفاده از قوانین استاتیک تعیین نمود. این امر بخاطر این است که مبنای استاتیک بر این است که سازه‌ها صلب و تغییر شکل ناپذیر باشند.

با تحلیل تغییر شکل در سازه‌های مهندسی، می‌توان نیروها در سازه‌هایی که از نظر استاتیکی نامعین می‌باشند را تعیین نمود. باید دقت نمود که توزیع تنش‌ها در یک عضو از نظر استاتیکی نامعین می‌باشند حتی اگر نیرو در آن عضو مشخص باشد.

در این فصل، تغییر شکل‌های اعضای سازه‌ای مثل میله، تیر و صفحه بررسی می‌شوند. ابتدا کرنش نرمال، ε، تعریف می‌شود. سپس نمودار تنش-کرنش یک ماده تفسیر می‌شود. از روی این نمودار، بعضی ویژگی‌های ماده مانند مدول الاستیسیته، و اینکه آیا ماده نرم یا ترد است قابل تعیین می‌باشد. علاوه بر این، این نمودار می‌تواند پیش‌بینی کند که آیا کرنش در یک ماده، بعد از برداشتن بار، حذف می‌شود یا در آن باقی می‌ماند.

2.1) مقدمه‌ای بر تنش و کرنش

2.1) An introduction to stress and strain

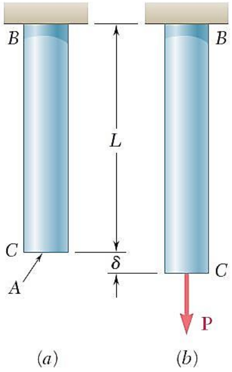
2.1A) کرنش محوری (نرمال) ناشی از بارگذاری محوری

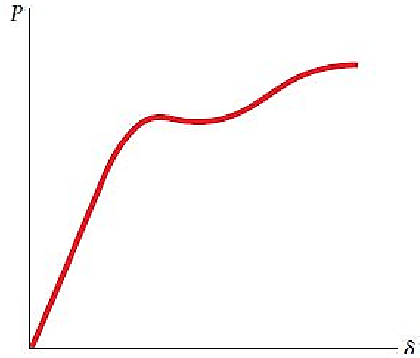
2.1A) Normal strain under axial loading

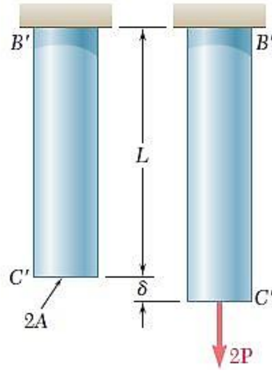
میله BC به طول L و سطح مقطع یکنواخت A را که از انتهای B خود آویزان است در نظر بگیرید (شکل 1a). اگر بر انتهای C میله، نیروی P اعمال شود میله به اندازه δ تغییر طول خواهد داد (شکل 1b). اگر نمودار نیروی P برحسب تغییر شکل δ (دلتا) رسم شود نموداری بدست می‌آید که شامل اطلاعاتی است که برای تحلیل میله تحت بررسی مفید می‌باشد (شکل 2). اما نمی‌توان از این نمودار برای تحلیل میله‌ای با جنس مشابه اما ابعاد متفاوت استفاده نمود. به عنوان مثال، اگر بخواهیم در میله دیگری با سطح مقطع $2A$، تغییر شکلی به اندازه میله BC، یعنی δ، ایجاد شود باید به میله $B'C'$ با طول L، نیرویی به اندازه $2P$ وارد نماییم (شکل 3

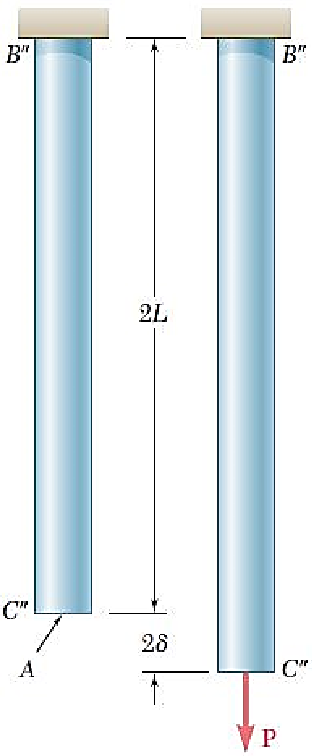
در دو حالت ذکر شده ، با اینکه ابعاد و نیروی وارده متفاوت است اما تنش یکسان است و برابر است با: $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2P}{2A}$.

اکنون این حالت را در نظر بگیرید که به میله‌ای بنام $B''C''$ با طول $2L$ و سطح مقطع A، اگر نیروی P اعمال شود آن گاه تغییر طولی به اندازه 2δ در میله ایجاد خواهد شد (شکل 4)









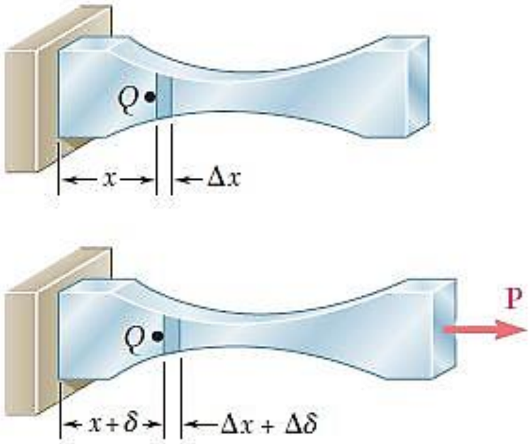
در سه حالت بررسی شده، ابعاد، بارگذاری و میزان تغییر طول متفاوت بوده است. اما می‌توان کمیت‌هایی تعریف یا پیدا نمود که برای هر سه حالت یکسان باشد. به عنوان مثال، اگر نسبت تغییر طول ایجاد شده بر طول اولیه میله تقسیم شود خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{2\delta}{2L} \qquad \text{(I)}$$

و برای تنش در سه حالت داریم:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2P}{2A} \qquad \text{(II)}$$

رابطه (I) معرف کمیت جدیدی بنام کرنش (strain) می‌باشد که براساس نسبت تغییر طول ایجاد شده در میله به ازای واحد طول تعریف می‌شود و کمیتی بی‌بعد است. اکنون اگر بجای اینکه نیرو برحسب تغییر طول رسم شود مقدار تنش ـ کرنش رسم گردد منحنی‌ای را نتیجه می‌دهد که ضمن اینکه مستقل از ابعاد نمونه تحت بارگذاری می‌باشد، شامل مشخصات فیزیکی یک ماده خاص می‌باشد.



در شکل‌های قبل، میله‌های بررسی شده دارای سطح مقطع یکنواخت در سرتاسر طول میله بوده‌اند. به همین دلیل فرض می‌شود که تنش $\frac{P}{A}$ در سرتاسر میله، دارای مقدار ثابت باشد. و از آنجا که کرنش بر اساس نسبت تغییر شکل کل میله بر طول میله تعریف می‌شود بنابراین تعریف فوق برای هر نقطه از میله نیز صادق می‌باشد. اما برای میله‌ای که دارای سطح مقطع متغیر می‌باشد تنش نرمال در طول میله تغییر می‌کند. به همین دلیل باید تعریف متفاوتی برای تعیین کرنش در هر نقطه بیان شود. در این حالت، یک المان کوچک به طول اولیه Δx در نظر گرفته می‌شود و تغییر شکل آن در اثر اعمال بار P تعیین می‌شود که داریم (شکل 5):

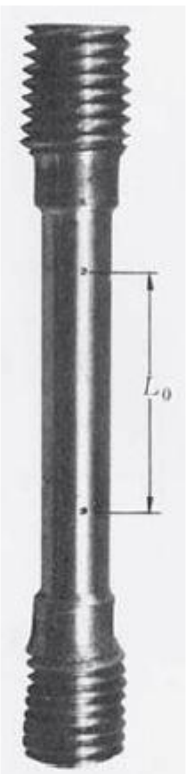
$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \qquad \text{III}$$

2.1B) دیاگرام تنش - کرنش

2.1B) stress - strain diagram

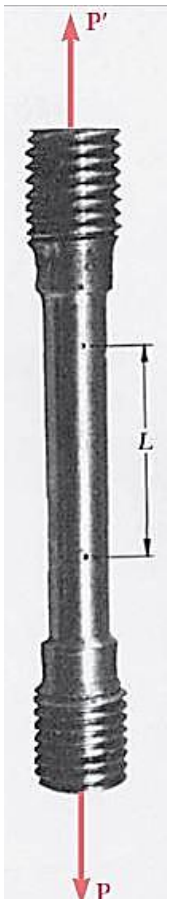
برای ترسیم دیاگرام‌های تنش - کرنش، از تست‌های کشش یا فشار استفاده می‌شود.

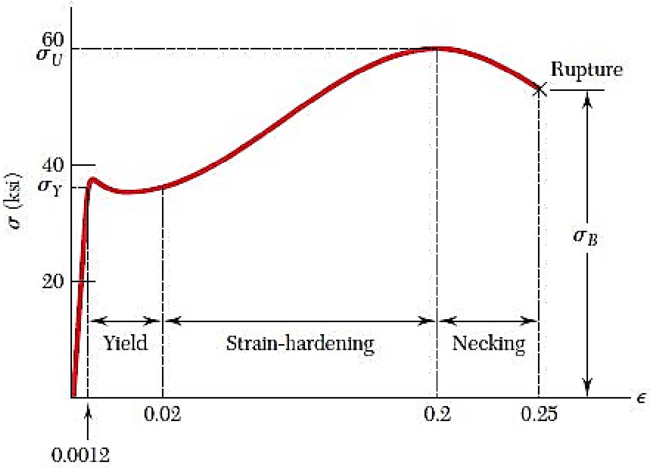
A+ تست کشش (Tensile test)



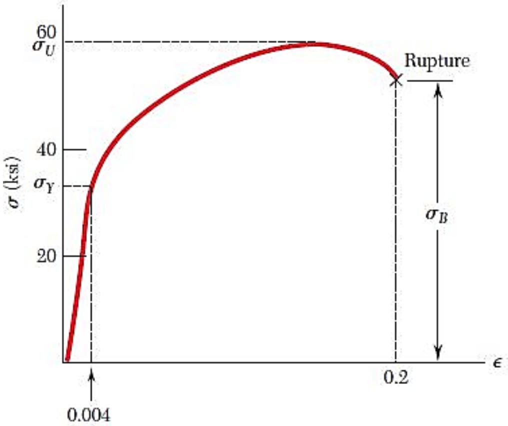
برای به دست آوردن دیاگرام تنش-کرنش یک ماده مشخص، از تست کشش بر روی نمونه‌هایی از جنس مورد نظر استفاده می‌شود. یک نمونه رایج از نمونه‌های مورد استفاده در تست کشش را مشاهده می‌کنید (شکل 6).

قبل از انجام تست کشش، ابتدا مساحت سطح مقطع میانی میله به صورت دقیق اندازه‌گیری می‌شود. سپس توسط دو گیج (gage) روی میله به اندازه L_0 نشانه‌گذاری می‌شود. نمونه فوق در داخل دستگاه تست قرار داده می‌شود (شکل 7) و تحت نیروی P قرار می‌گیرد. به تدریج نیروی P افزایش داده می‌شود و در هر لحظه، فاصله بین دو نقطه، اندازه‌گیری و ثبت می‌شود (شکل 8). در قدم بعدی، تفاضل طول لحظه‌ای میله با طول اولیه آن $\delta = L - L_0$ به دست می‌آید. با داشتن δ می‌توان کرنش لحظه‌ای را نیز ثبت نمود ($\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$). با داشتن نیروی لحظه‌ای، می‌توان تنش لحظه‌ای ($\sigma = \frac{P}{A_0}$) را نیز تعیین نمود. نهایتاً با رسم داده‌های (σ و ε) می‌توان دیاگرام تنش-کرنش یک ماده مشخص را رسم نمود.





(*a*) Low-carbon steel



(*b*) Aluminum alloy

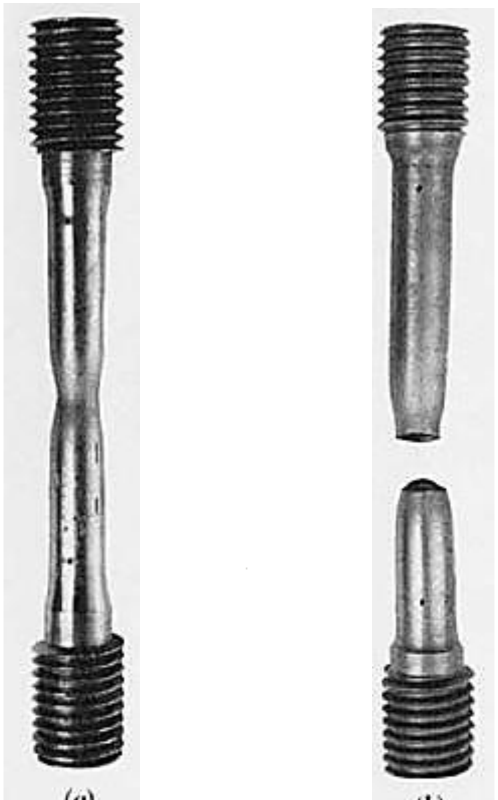
- دیاگرام های تنش - کرنش مواد مختلف، متفاوت می باشد و دیاگرام تنش - کرنش یک ماده مشخص اگر در سرعت های بارگذاری متفاوت و دماهای متفاوت رسم شود نتیجه متفاوتی را حاصل می شود. همان طور که قبلا بیان شد یکی از مواردی که از روی دیاگرام های تنش - کرنش قابل تشخیص می باشد ترد یا نرم بودن ماده می باشد.

ویژگی دیاگرام تنش - کرنش مواد نرم عبارت است از:

① قابلیت تسلیم دارند. (شکل های ۹ و ۱۰)

② پس از شروع بارگذاری، طول نمونه افزایش می یابد. این منطقه از دیاگرام تنش - کرنش، تشکیل یک خط راست می دهد که دارای شیب تندی است.

③ با افزایش بیشتر بارگذاری، تنش به یک حد بحرانی می رسد که به آن تنش تسلیم می گویند (σ_Y). درست در این نقطه، تحت یک افزایش بار نسبتاً کوچک، تغییر شکل نسبتاً بزرگی در نمونه مشاهده می شود که ناشی از لغزش در صفحات مورب ناشی از تنش برشی می باشد.



(a) (b)

۴) با افزایش بارگذاری، تنش و کرنش داخل نمونه افزایش می یابد (ناحیه کرنش سختی) (strain hardening) تا اینکه بارگذاری به ماکزیمم خود می رسد. در این لحظه، سطح مقطع نمونه، شروع به باریک شدن می کند. این افزایش از ناپایداری موضعی است که پدیده گلویی شدن (necking) را به همراه دارد (شکل 11a).

۵) بعد از ظاهر شدن پدیده گلویی شدن، بدلیل کوچک شدن سطح مقطع، با نیروی کمتری نسبت به قبل می توان افزایش طول در نمونه ایجاد نمود تا جایی که نمونه می شکند.

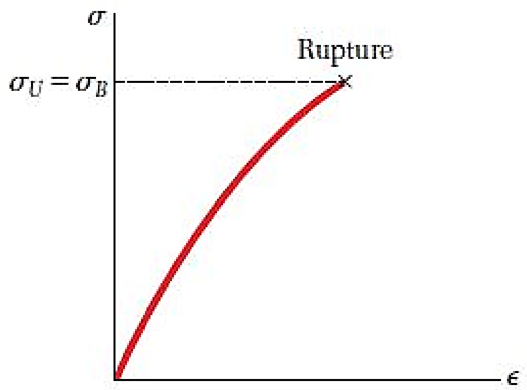
۶) سطح مقطع شکست ماده نرم، مخروطی یا کاسه مانندی است با زاویه تقریبی $\pm 45^\circ$. همان طور که قبلا اشاره شد در صفحات با زاویه $\pm 45^\circ$، تنش برشی ماکزیمم می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که نمونه های از جنس مواد نرم، نسبت به برش حساس بوده و در صفحاتی می شکنند که تنش برشی ماکزیمم باشد (شکل 11b).

چند نکته:

الف) لزوماً نمودار تنش - کرنش مواد نرم، مشابه نمی باشد (شکل های 9 و 10).

ب) شیب قسمتی از دیاگرام تنش - کرنش که بصورت خط راست می باشد نشان دهنده مدول الاستیسیته (Young's modulus) می باشد.

ج) پدیده کرنش سختی:



• ویژگی‌های دیاگرام تنش-کرنش مواد ترد (Brittle) عبارت است از:

① تغییر قابل توجهی در نرخ افزایش طول آن مشاهده نمی‌شود.

② اختلافی بین مقاومت نهایی و مقاومت شکست وجود ندارد.

③ کرنش لحظه شکست مواد ترد بسیار کم‌تر از کرنش لحظه شکست مواد نرم می‌باشد (شکل ۱۲)

④ پدیده گلویی شدن در مواد ترد اتفاق نمی‌افتد.

⑤ سطح مقطع شکست، عمود بر بارگذاری اتفاق می‌افتد و از آنجاکه تنش محوری در زاویه $\theta=0$ ماکزیمم می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت نمونه‌های از جنس مواد ترد، نسبت به تنش محوری حساس بوده و در صفحاتی شکست اتفاق می‌افتد که تنش محوری (نرمال) ماکزیمم باشد (شکل 13).

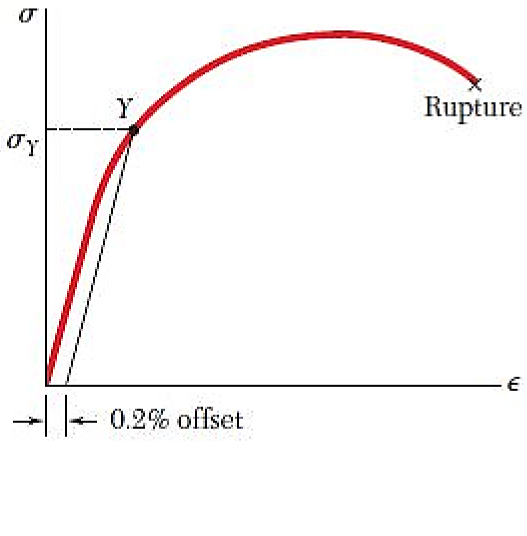
+ چند نکته:

الف) اگر برای یک ماده نرم در نمودار تنش-کرنش، نقطه تسلیم نامشخص باشد، برای تعیین تنش تسلیم، از روش 0.2% آفست استفاده می‌شود، مانند ماده آلومینیوم (شکل ۱۴).

ب) برای تعیین نرم یا ترد بودن یک ماده می‌توان از

1) معیار درصد تغییر طول استفاده نمود که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{درصد تغییر طول} = 100 \times \frac{L_B - L_0}{L_0}$$



که L_B طول نمونه در لحظه شکست و L_0 طول اولیه نمونه می‌باشد.

اگر کرنش در لحظه شکست بیش از 0.2 باشد می‌توان نتیجه گرفت که نمونه از جنس ماده نرم می‌باشد در غیر اینصورت، نمونه از جنس ماده ترد ساخته شده است.

2) معیار درصد کاهش سطح مقطع

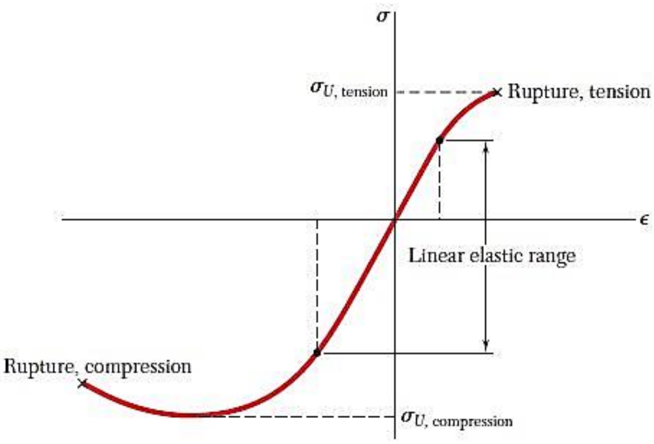
$$\text{درصد کاهش سطح مقطع} = 100 \times \frac{A_0 - A_B}{A_0}$$

که A_0 سطح مقطع نمونه قبل از بارگذاری و A_B سطح مقطع نمونه در لحظه شکست می باشد.
نشان داده شده است که برای فولادهای ساختمانی، کاهش سطح مقطع در لحظه شکست، به اندازه 60 تا 70 درصد می باشد.

B + تست فشار (Compression test)

• دیاگرام تنش-کرنش مواد نرم حاصل از تست فشار

ابتدای نمودار تنش-کرنش تا شروع پدیده کرنش سختی، مشابه آنچه از تست کشش بدست آمده است می باشد. به بیان دیگر، تنش تسلیم مواد نرم، در کشش و فشار یکسان می باشد. به ازای کرنش های بیشتر، نمودار تنش-کرنش حاصل از تست فشار، متفاوت از نمودار تنش-کرنش تست کشش می باشد و در تست فشار، پدیده گلویی شدن مشاهده نمی شود



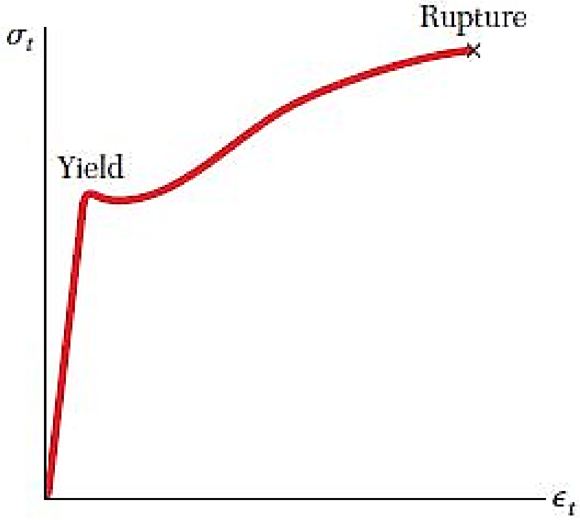
• دیاگرام تنش-کرنش مواد ترد حاصل از تست فشار

مقاومت نهایی در فشار، بیشتر از مقاومت نهایی در کشش می باشد که این امر به خاطر وجود ترک ها و حباب هایی است که در نمونه وجود دارد و سبب ضعیف شدن نمونه در اثر تست کشش می شود در حالیکه تاثیری در مقاومت نمونه تحت فشار ندارد (شکل 15). مدول الاستیسیته مواد ترد، که از روی شیب ناحیه خطی نمودار تنش-کرنش بدست می آید، در هر دو دیاگرام حاصل از تست کشش و فشار یکسان است.

2.1C) تنش حقیقی و کرنش حقیقی

2.1C) True stress and true strain

در نمودارهای تنش-کرنش که تاکنون توضیح داده شده اند تنش از تقسیم نیروی لحظه ای P بر مساحت سطح مقطع اولیه نمونه (A_0) بدست می آید. بنابراین تنش بدست آمده $(\sigma = \frac{P}{A_0})$ تنش واقعی نمی باشد بلکه به آن تنش مهندسی می گویند. این در حالیست که در واقعیت، با افزایش نیروی P، مساحت سطح مقطع کاهش می یابد و تنش واقعی عبارت است از $\sigma_t = P/A$.



اختلاف بین تنش مهندسی و تنش واقعی در نمودارهای تنش - کرنش مواد نرم، بعد از نقطه تسلیم مشهود می‌شود. تنش مهندسی با نیروی P نسبت مستقیم دارد بنابراین در محدوده گلوئی شدن، با کاهش نیروی P، مقدار تنش مهندسی کاهش می‌یابد. اما تنش واقعی که با مساحت سطح مقطع نسبت معکوس و با نیروی P نسبت مستقیم دارد تا لحظه شکست همواره افزایش می‌یابد. برای رسم نمودار تنش - کرنش واقعی (شکل ۱۶) باید علاوه بر تنش واقعی، کرنش واقعی نیز محاسبه گردد. کرنش واقعی از رابطه زیر بدست می‌آید.

کرنش واقعی یا حقیقی

$$\varepsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \qquad (\mathrm{I})$$

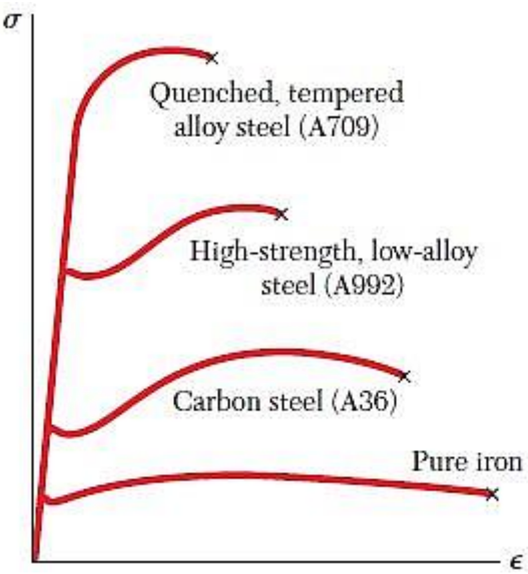
2.1D) Hooke's law: Modulus of elasticity

2.1D) قانون هوک: مدول الاستیسیته

بسیاری از طراحی‌هایی که برای سازه‌های مهندسی انجام می‌گیرد، به این منظور است که تغییر شکل داخل سازه، کوچک باشد. به بیان دیگر، رفتار ماده در محدوده خطی نمودار تنش - کرنش باشد. در این محدوده، رابطه بین تنش - کرنش عبارت است از:

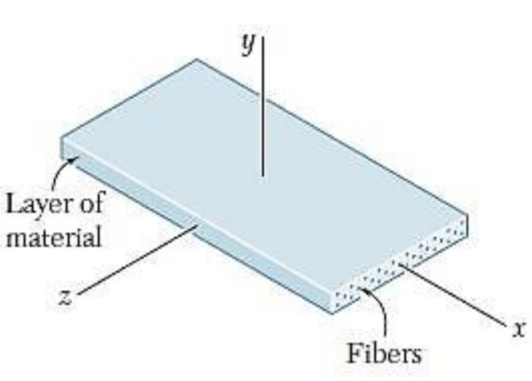
$$\sigma = E\varepsilon \qquad (\mathrm{II})$$

رابطه (II) به قانون هوک معروف است. ضریب E ثابتی است که به آن مدول الاستیسیته می‌گویند. به دلیل بی بعد بودن کرنش، یکای مدول الاستیسیته با یکای تنش یکی می‌باشد.



نکته: ① در بسیاری موارد، با انجام برخی عملیات می‌توان خواص مکانیکی ماده را تغییر داد (شکل ۱۷)

② برای این مواد، رابطه $\sigma = E\varepsilon$ مستقل از جهت بارگذاری می‌باشد که دلیل آن، مستقل بودن خواص ماده از جهت می‌باشد. به اینگونه مواد، همگن (isotropic) می‌گویند. موادی وجود دارند که خواص آنها در جهت‌های مختلف متفاوت می‌باشد. به اینگونه مواد، ناهمگن anisotropic، می‌گویند. مانند مواد کامپوزیتی تقویت شده (شکل ۱۸).



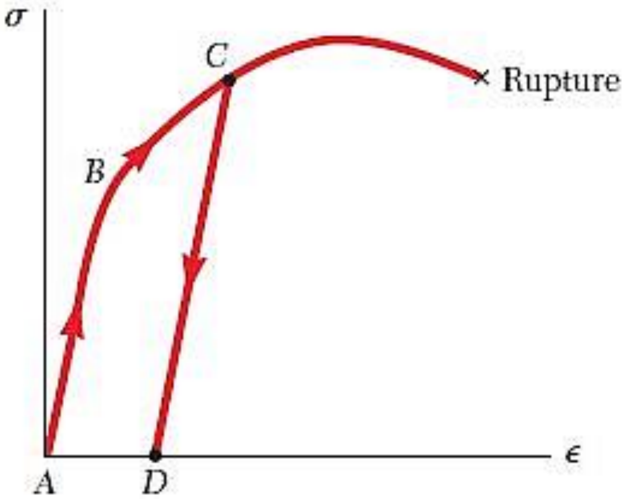
2.1E) رفتار الاستیک در مقایسه با رفتار پلاستیک ماده

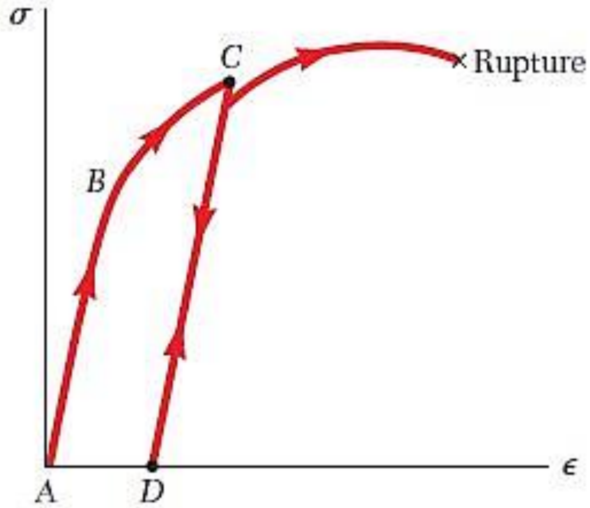
2.1E) Elastic versus plastic behavior of a material

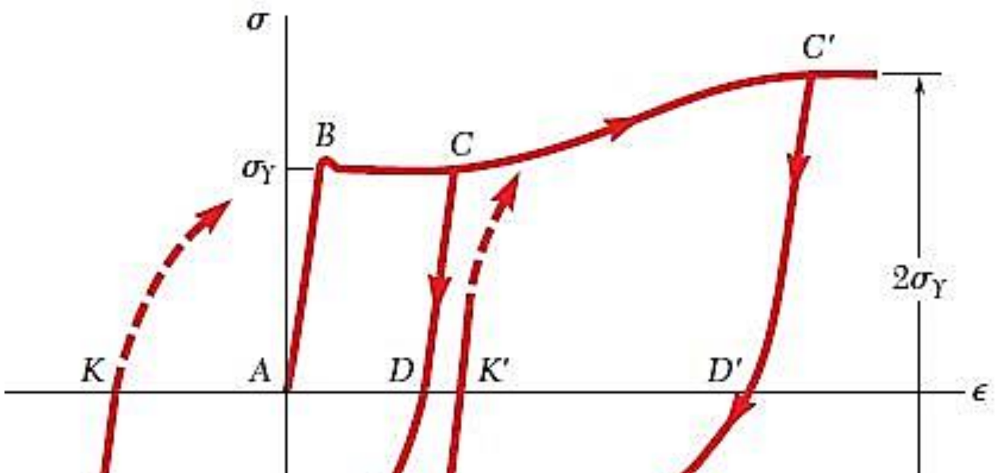
زمانی یک ماده رفتار الاستیک دارد که تغییر شکل ایجاد شده در جسم در اثر اعمال نیرو، با برداشتن نیرو از بین برود.

بزرگترین مقدار تنش که به ازای آن، جسم رفتار الاستیک دارد را حد الاستیک ماده می نامند.

زمانی یک ماده رفتار پلاستیک دارد که بخشی از تغییر شکل ایجاد شده در جسم در اثر اعمال نیرو، با برداشتن نیرو، در جسم باقی بماند (شکل های 19,20).







2.1F) Repeated loadings and fatigue

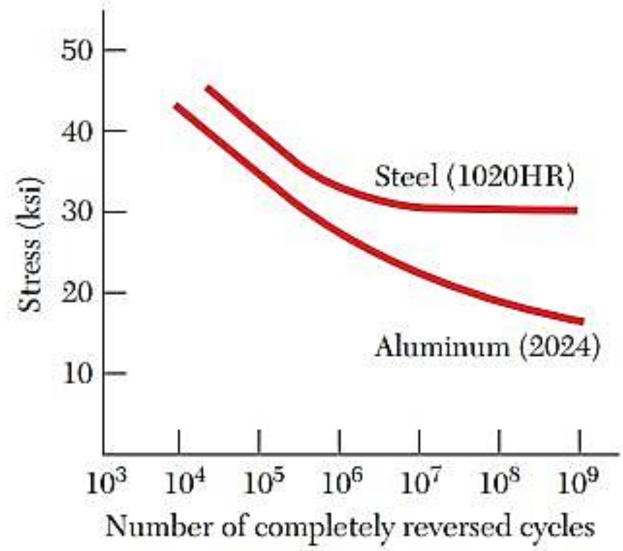
2.1F) بارگذاری تکراری و پدیده خستگی

آنچه تاکنون بیان شد حالت‌هایی از بارگذاری بود که هم مقدار و هم جهت بارگذاری همواره ثابت بوده است.

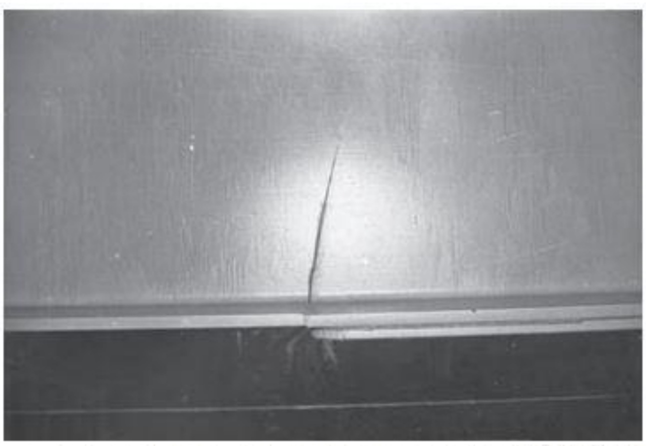
اما حالت‌هایی وجود دارد که به یک سازه یا ماشین بارگذاری‌هایی با مقدار و جهت متغیر اعمال می‌شود. به عنوان مثال، میل لنگ ماشین به ازای 200,000 مایل رانندگی، به اندازه نیم بیلیون (نیم میلیارد) دفعه تحت بارگذاری متغیر قرار می‌گیرد. مثال دیگر، پلی است که با عبور خودروها از روی آن، بارگذاری‌های متغیر به آن اعمال می‌شود.

در یک چنین شرایطی که تعداد دفعات بارگذاری متغیر به هزاران یا میلیون دفعه می‌رسد، آزمایش نشان داده است که شکست در سازه به ازای تنش بسیار کم‌تری در مقایسه با مقاومت ماده در حالت بارگذاری استاتیک، اتفاق می‌افتد. به این پدیده، خستگی (Fatigue) می‌گویند.

برای توصیف پدیده خستگی در یک ماده، از نمودار $\sigma - n$ (تنش-عمر) استفاده می‌شود.



شکل (۲۲)



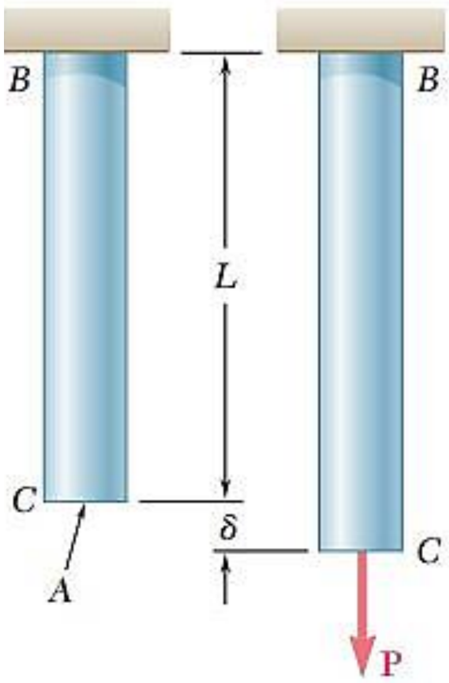
شکل (۲۳)

2.1G) Deformations of members under axial loading

2.1G) تغییر شکل در عضوهای تحت بار محوری

میله BC را که تحت نیروی محوری P می باشد در نظر بگیرید (شکل ۲۴).

میله BC دارای جنس همگن بوده و طول و سطح مقطع آن به ترتیب L و A می باشد. اگر تنش در میله از تنش تسلیم بیشتر نباشد برای تعیین تغییر شکل در میله داریم:



شکل (۲۴)

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{P}{A} & \text{I} \\ \sigma = E\varepsilon & \text{II} \end{cases} \Rightarrow \frac{P}{A} = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{P}{EA} \quad \text{III}$$

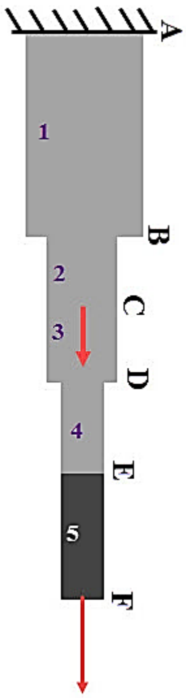
از طرفی می دانیم رابطه بین تغییر شکل و کرنش در میله بصورت زیر می باشد

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} & \text{IV} \\ \varepsilon = \dfrac{P}{EA} & \text{III} \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta}{L} = \frac{P}{EA} \Rightarrow \delta_{C/B} = \frac{PL}{EA} \quad \text{V}$$

$$\Rightarrow \delta_{C/B} = \delta_C - \cancel{\delta_B} = \delta_C = \frac{PL}{EA}$$

رابطه V برای تعیین تغییر شکل در میله‌ای قابل استفاده است که ① جنس میله همگن باشد، ② سطح مقطع میله یکنواخت باشد، ③ فقط در دو انتهای میله، بارگذاری اعمال شده باشد.

اگر هر یک از شرایط فوق برقرار نباشد باید تغییراتی در رابطه V ایجاد نمود.



شکل (۲۵)

اگر میله در چندین نقطه در طول خود تحت بارگذاری قرار گیرد، یا اینکه میله از چندین جنس ساخته شده باشد، یا اینکه سطح مقطع میله در طول آن تغییر کند، آن گاه باید میله به قسمت‌های کوچکتر تقسیم شود تا برای هر قسمت بتوان از رابطه V استفاده نمود. در این شرایط برای قسمت i ام برابر نیروی درونی P_i، طول L_i، سطح مقطع A_i و مدول الاستیسیته E_i، تغییر شکل در کل میله، از جمع تغییر شکل‌های ایجاد شده در هر قسمت i ام بدست می‌آید.

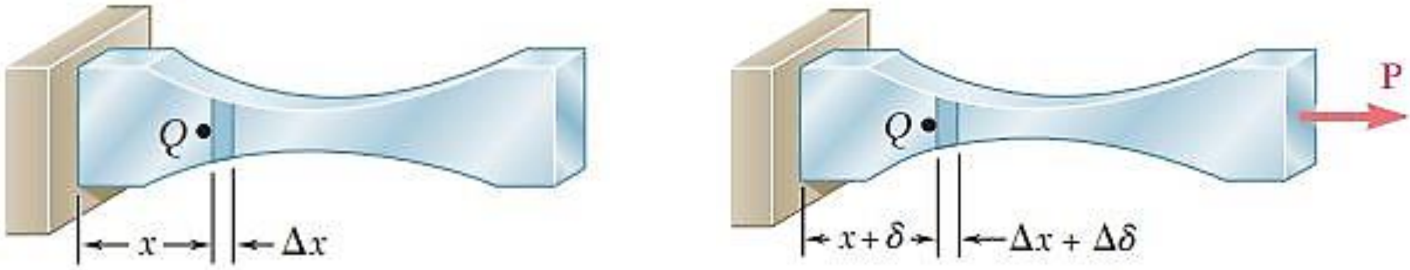
$$\delta_{\text{کل}} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} + \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} + \cdots + \frac{P_5 L_5}{E_5 A_5} = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

$$\Rightarrow \delta_{F/A} = \delta_{F/E} + \delta_{E/D} + \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

$E = E(x)$ ؟ $P = P(x)$ ؟ $A = A(x)$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)}{E(x)\,A(x)}\,dx$$

درصورتیکه هریک از عوامل P، E و A ها برحسب تابعی از x باشند برای تعیین تغییر شکل درمیله باید از رابطه VI استفاده شود (شکل ۲۶)



شکل (۲۶)

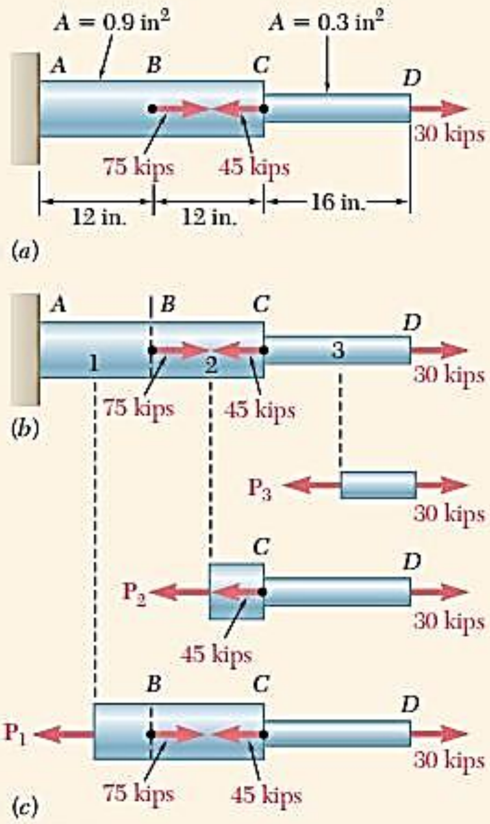


Fig. 2.19 (*a*) Axially-loaded rod. (*b*) Rod divided into three sections. (*c*) Three sectioned free-body diagrams with internal resultant forces P_1, P_2, and P_3.

Concept Application 2.1

Determine the deformation of the steel rod shown in Fig. 2.19*a* under the given loads ($E = 29 \times 10^6$ psi).

The rod is divided into three component parts in Fig. 2.19*b*, so

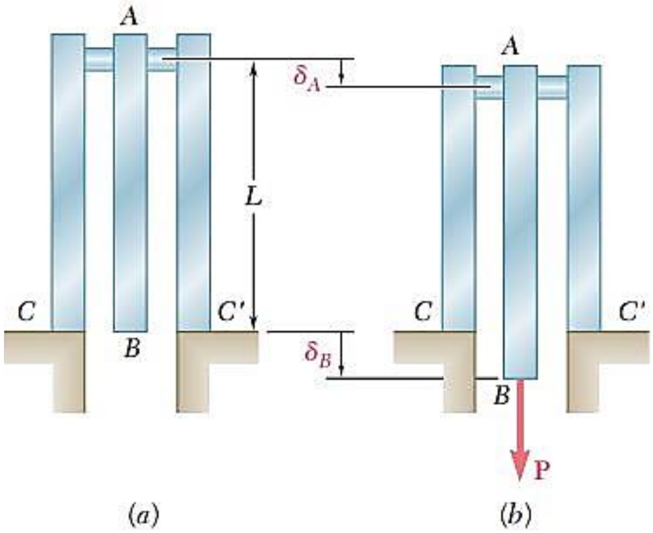
$$L_1 = L_2 = 12 \text{ in.} \qquad L_3 = 16 \text{ in.}$$
$$A_1 = A_2 = 0.9 \text{ in}^2 \qquad A_3 = 0.3 \text{ in}^2$$

To find the internal forces P_1, P_2, and P_3, pass sections through each of the component parts, drawing each time the free-body diagram of the portion of rod located to the right of the section (Fig. 2.19*c*). Each of the free bodies is in equilibrium; thus

$$P_1 = 60 \text{ kips} = 60 \times 10^3 \text{ lb}$$
$$P_2 = -15 \text{ kips} = -15 \times 10^3 \text{ lb}$$
$$P_3 = 30 \text{ kips} = 30 \times 10^3 \text{ lb}$$

Using Eq. (2.10)

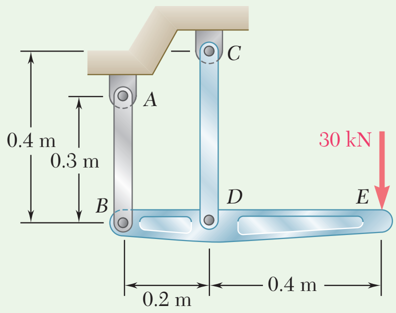
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$
$$= \frac{1}{29 \times 10^6}\left[\frac{(60 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(-15 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(30 \times 10^3)(16)}{0.3}\right]$$
$$\delta = \frac{2.20 \times 10^6}{29 \times 10^6} = 75.9 \times 10^{-3} \text{ in.}$$



شکل (۲۷)

تذکر: در تحلیل سازه‌ها، برای یافتن میزان تغییر شکل یک نقطه از سازه، باید دقت نمود که آیا جابجایی نقطه مورد نظر نسبت به یک نقطه ثابت نوشته می‌شود یا یک نقطه متغیر. (شکل ۲۷)

$$
\begin{cases}
\delta_B = \delta_{B/A} + \delta_{A/C} \\[2ex]
\delta_{B/A} = \dfrac{P_{BA} L_{BA}}{E_{BA} A_{BA}} \\[2ex]
\delta_{A/C} = \dfrac{P_{AC} L_{AC}}{E_{AC} A_{AC}}
\end{cases}
$$



Sample Problem 2.1

The rigid bar *BDE* is supported by two links *AB* and *CD*. Link *AB* is made of aluminum ($E = 70$ GPa) and has a cross-sectional area of 500 mm^2. Link *CD* is made of steel ($E = 200$ GPa) and has a cross-sectional area of 600 mm^2. For the 30-kN force shown, determine the deflection (*a*) of *B*, (*b*) of *D*, and (*c*) of *E*.

STRATEGY: Consider the free body of the rigid bar to determine the internal force of each link. Knowing these forces and the properties of the links, their deformations can be evaluated. You can then use simple geometry to determine the deflection of E.

MODELING: Draw the free body diagrams of the rigid bar (Fig. 1) and the two links (Fig. 2 and 3)

ANALYSIS:

Free Body: Bar BDE (Fig. 1)

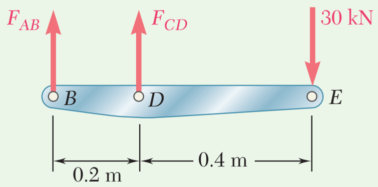


Fig. 1 Free-body diagram of rigid bar *BDE*.

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$: $\quad -(30\text{ kN})(0.6\text{ m}) + F_{CD}(0.2\text{ m}) = 0$

$F_{CD} = +90\text{ kN} \qquad F_{CD} = 90\text{ kN}$ *tension*

$+\circlearrowleft\Sigma M_D = 0$: $\quad -(30\text{ kN})(0.4\text{ m}) - F_{AB}(0.2\text{ m}) = 0$

$F_{AB} = -60\text{ kN} \qquad F_{AB} = 60\text{ kN}$ *compression*

a. Deflection of B. Since the internal force in link *AB* is compressive (Fig. 2), $P = -60$ kN and

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3\text{ N})(0.3\text{ m})}{(500 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(70 \times 10^9\text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6}\text{ m}$$

The negative sign indicates a contraction of member *AB*. Thus, the deflection of end *B* is upward:

$$\delta_B = \mathbf{0.514\ mm} \uparrow$$

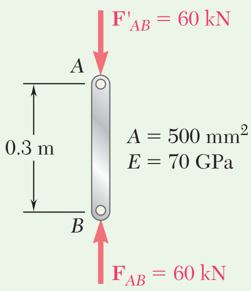


Fig. 2 Free-body diagram of two-force member *AB*.

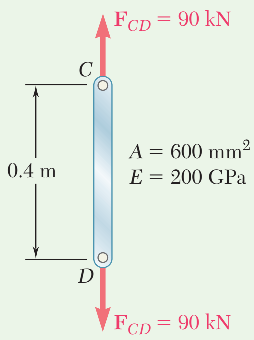


Fig. 3 Free-body diagram of two-force member *CD*.

(continued)

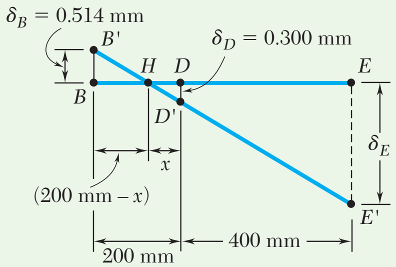


Fig. 4 Deflections at B and D of rigid bar are used to find δ_E.

b. Deflection of D. Since in rod CD (Fig. 3), $P = 90$ kN, write

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3\ \text{N})(0.4\ \text{m})}{(600 \times 10^{-6}\ \text{m}^2)(200 \times 10^9\ \text{Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6}\ \text{m} \qquad \boldsymbol{\delta_D = 0.300\ \text{mm}} \downarrow$$

c. Deflection of E. Referring to Fig. 4, we denote by B' and D' the displaced positions of points B and D. Since the bar BDE is rigid, points B', D', and E' lie in a straight line. Therefore,

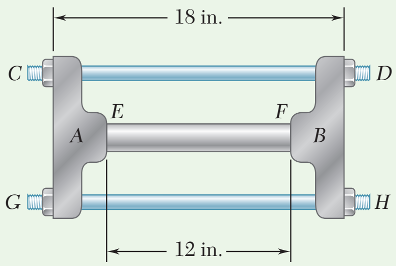
$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \qquad \frac{0.514\ \text{mm}}{0.300\ \text{mm}} = \frac{(200\ \text{mm}) - x}{x} \qquad x = 73.7\ \text{mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \qquad \frac{\delta_E}{0.300\ \text{mm}} = \frac{(400\ \text{mm}) + (73.7\ \text{mm})}{73.7\ \text{mm}}$$

$$\boldsymbol{\delta_E = 1.928\ \text{mm}} \downarrow$$

REFLECT and THINK: Comparing the relative magnitude and direction of the resulting deflections, you can see that the answers obtained are consistent with the loading and the deflection diagram of Fig. 4.

Sample Problem 2.2



The rigid castings A and B are connected by two $\frac{3}{4}$-in.-diameter steel bolts CD and GH and are in contact with the ends of a 1.5-in.-diameter aluminum rod EF. Each bolt is single-threaded with a pitch of 0.1 in., and after being snugly fitted, the nuts at D and H are both tightened one-quarter of a turn. Knowing that E is 29×10^6 psi for steel and 10.6×10^6 psi for aluminum, determine the normal stress in the rod.

STRATEGY: The tightening of the nuts causes a displacement of the ends of the bolts relative to the rigid casting that is equal to the difference in displacements between the bolts and the rod. This will give a relation between the internal forces of the bolts and the rod that, when combined with a free body analysis of the rigid casting, will enable you to solve for these forces and determine the corresponding normal stress in the rod.

MODELING: Draw the free body diagrams of the bolts and rod (Fig. 1) and the rigid casting (Fig. 2).

ANALYSIS:

Deformations.

Bolts CD and GH. Tightening the nuts causes tension in the bolts (Fig. 1). Because of symmetry, both are subjected to the same

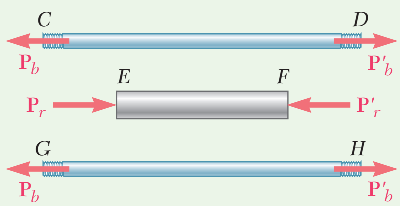


Fig. 1 Free-body diagrams of bolts and aluminum bar.

(continued)

internal force P_b and undergo the same deformation δ_b. Therefore,

$$\delta_b = +\frac{P_b L_b}{A_b E_b} = +\frac{P_b(18 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(0.75 \text{ in.})^2(29 \times 10^6 \text{ psi})} = +1.405 \times 10^{-6} P_b \quad \textbf{(1)}$$

Rod EF. The rod is in compression (Fig. 1), where the magnitude of the force is P_r and the deformation δ_r:

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r(12 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in.})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} = -0.6406 \times 10^{-6} P_r \quad \textbf{(2)}$$

Displacement of D Relative to B. Tightening the nuts one-quarter of a turn causes ends D and H of the bolts to undergo a displacement of $\frac{1}{4}$(0.1 in.) *relative to casting B*. Considering end D,

$$\delta_{D/B} = \tfrac{1}{4}(0.1 \text{ in.}) = 0.025 \text{ in.} \quad \textbf{(3)}$$

But $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$, where δ_D and δ_B represent the displacements of D and B. If casting A is held in a fixed position while the nuts at D and H are being tightened, these displacements are equal to the deformations of the bolts and of the rod, respectively. Therefore,

$$\delta_{D/B} = \delta_b - \delta_r \quad \textbf{(4)}$$

Substituting from Eqs. (1), (2), and (3) into Eq. (4),

$$0.025 \text{ in.} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6} P_r \quad \textbf{(5)}$$

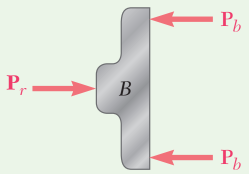


Fig. 2 Free-body diagram of rigid casting.

Free Body: Casting B (Fig. 2)

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F = 0: \qquad P_r - 2P_b = 0 \qquad P_r = 2P_b \quad \textbf{(6)}$$

Forces in Bolts and Rod Substituting for P_r from Eq. (6) into Eq. (5), we have

$$0.025 \text{ in.} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6}(2P_b)$$

$$P_b = 9.307 \times 10^3 \text{ lb} = 9.307 \text{ kips}$$

$$P_r = 2P_b = 2(9.307 \text{ kips}) = 18.61 \text{ kips}$$

Stress in Rod

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A_r} = \frac{18.61 \text{ kips}}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in.})^2} \qquad \sigma_r = \mathbf{10.53 \text{ ksi}} \blacktriangleleft$$

REFLECT and THINK: This is an example of a *statically indeterminate* problem, where the determination of the member forces could not be found by equilibrium alone. By considering the relative displacement characteristics of the members, you can obtain additional equations necessary to solve such problems. Situations like this will be examined in more detail in the following section.

2.2) statically indeterminate problems

2.2) مسائلی که از نظر استاتیکی، نامعین می‌باشند

آنچه که بیشتر برای یافتن تغییرشکل هر نقطه دلخواه از یک سازه مطرح شد به راحتی با استفاده از رسم دیاگرام آزاد و معادلات تعادل می‌توان نیروهای داخلی در هر بخش را بدست آورد. این در حالیست که در مسائل بسیاری، این امکان وجود ندارد. در یک چنین مسائلی، باید از روابط دیگر استفاده نمود که در ادامه چندین مثال در این رابطه ارائه می‌شود.

قابل ذکر است یکی از روش‌هایی که برای حل مسائل نامعین استاتیکی مفید می‌باشد استفاده از روش برهم‌نهی (superposition method) می‌باشد. در این روش، تاثیر مجهولات، بصورت جداگانه در نظر گرفته می‌شود.

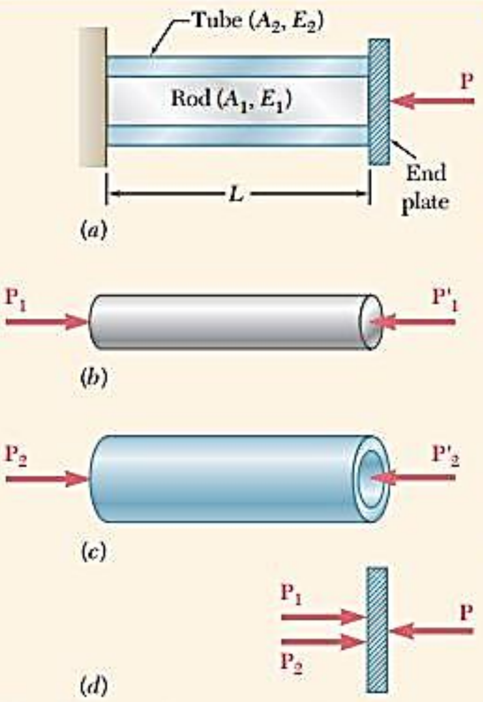


Fig. 2.21 (*a*) Concentric rod and tube, loaded by force *P*. (*b*) Free-body diagram of rod. (*c*) Free-body diagram of tube. (*d*) Free-body diagram of end plate.

Concept Application 2.2

A rod of length L, cross-sectional area A_1, and modulus of elasticity E_1, has been placed inside a tube of the same length L, but of cross-sectional area A_2 and modulus of elasticity E_2 (Fig. 2.21*a*). What is the deformation of the rod and tube when a force **P** is exerted on a rigid end plate as shown?

The axial forces in the rod and in the tube are P_1 and P_2, respectively. Draw free-body diagrams of all three elements (Fig. 2.21*b*, *c*, *d*). Only Fig. 2.21*d* yields any significant information, as:

$$P_1 + P_2 = P \tag{1}$$

Clearly, one equation is not sufficient to determine the two unknown internal forces P_1 and P_2. The problem is statically indeterminate.

However, the geometry of the problem shows that the deformations δ_1 and δ_2 of the rod and tube must be equal. Recalling Eq. (2.9), write

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \qquad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \tag{2}$$

Equating the deformations δ_1 and δ_2,

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \tag{3}$$

Equations (1) and (3) can be solved simultaneously for P_1 and P_2:

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \qquad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

Either of Eqs. (2) can be used to determine the common deformation of the rod and tube.

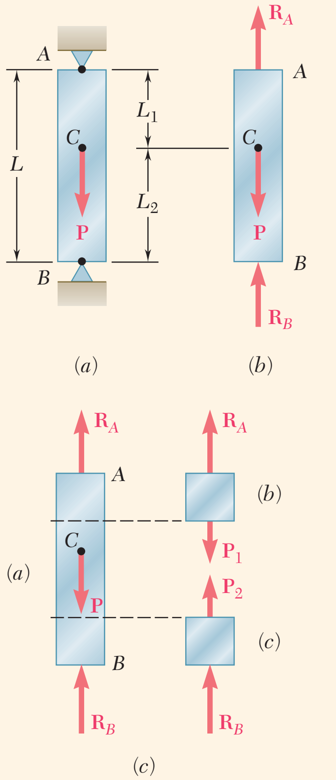


Fig. 2.22 (*a*) Restrained bar with axial load. (*b*) Free-body diagram of bar. (*c*) Free-body diagrams of sections above and below point *C* used to determine internal forces P_1 and P_2.

Concept Application 2.3

A bar AB of length L and uniform cross section is attached to rigid supports at A and B before being loaded. What are the stresses in portions AC and BC due to the application of a load P at point C (Fig. 2.22*a*)?

Drawing the free-body diagram of the bar (Fig. 2.22*b*), the equilibrium equation is

$$R_A + R_B = P \tag{1}$$

Since this equation is not sufficient to determine the two unknown reactions R_A and R_B, the problem is statically indeterminate.

However, the reactions can be determined if observed from the geometry that the total elongation δ of the bar must be zero. The elongations of the portions AC and BC are respectively δ_1 and δ_2, so

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

Using Eq. (2.9), δ_1 and δ_2 can be expressed in terms of the corresponding internal forces P_1 and P_2,

$$\delta = \frac{P_1 L_1}{AE} + \frac{P_2 L_2}{AE} = 0 \tag{2}$$

Note from the free-body diagrams shown in parts *b* and *c* of Fig. 2.22*c* that $P_1 = R_A$ and $P_2 = -R_B$. Carrying these values into Equation (2),

$$R_A L_1 - R_B L_2 = 0 \tag{3}$$

Equations (1) and (3) can be solved simultaneously for R_A and R_B, as $R_A = PL_2/L$ and $R_B = PL_1/L$. The desired stresses σ_1 in AC and σ_2 in BC are obtained by dividing $P_1 = R_A$ and $P_2 = -R_B$ by the cross-sectional area of the bar:

$$\sigma_1 = \frac{PL_2}{AL} \qquad \sigma_2 = -\frac{PL_1}{AL}$$

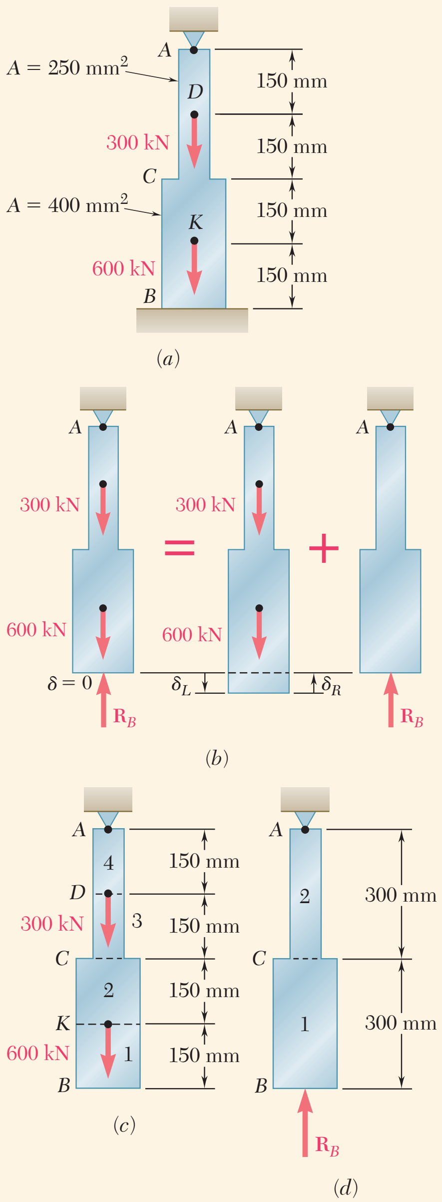


Fig. 2.23 (*a*) Restrained axially-loaded bar. (*b*) Reactions will be found by releasing constraint at point *B* and adding compressive force at point *B* to enforce zero deformation at point *B*. (*c*) Free-body diagram of released structure. (*d*) Free-body diagram of added reaction force at point *B* to enforce zero deformation at point *B*.

Concept Application 2.4

Determine the reactions at A and B for the steel bar and loading shown in Fig. 2.23a, assuming a close fit at both supports before the loads are applied.

We consider the reaction at B as redundant and release the bar from that support. The reaction $\mathbf{R}_B$ is considered to be an unknown load and is determined from the condition that the deformation δ of the bar equals zero.

The solution is carried out by considering the deformation δ_L caused by the given loads and the deformation δ_R due to the redundant reaction $\mathbf{R}_B$ (Fig. 2.23*b*).

The deformation δ_L is obtained from Eq. (2.10) after the bar has been divided into four portions, as shown in Fig. 2.23*c*. Follow the same procedure as in Concept Application 2.1:

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3\,\text{N} \qquad P_4 = 900 \times 10^3\,\text{N}$$
$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 \qquad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$
$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150\,\text{m}$$

Substituting these values into Eq. (2.10),

$$\delta_L = \sum_{i=1}^{4} \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(0 + \frac{600 \times 10^3\,\text{N}}{400 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} + \frac{600 \times 10^3\,\text{N}}{250 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} + \frac{900 \times 10^3\,\text{N}}{250 \times 10^{-6}\,\text{m}^2}\right)\frac{0.150\,\text{m}}{E}$$

$$\delta_L = \frac{1.125 \times 10^9}{E} \tag{1}$$

Considering now the deformation δ_R due to the redundant reaction R_B, the bar is divided into two portions, as shown in Fig. 2.23*d*

$$P_1 = P_2 = -R_B$$
$$A_1 = 400 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 \qquad A_2 = 250 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$
$$L_1 = L_2 = 0.300\,\text{m}$$

Substituting these values into Eq. (2.10),

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = -\frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{E} \tag{2}$$

Express the total deformation δ of the bar as zero:

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \tag{3}$$

and, substituting for δ_L and δ_R from Eqs. (1) and (2) into Eqs. (3),

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{E} = 0$$

(continued)

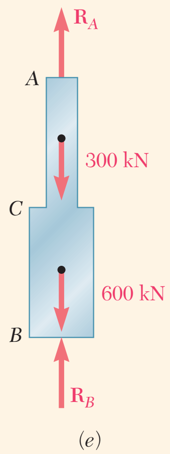


Fig. 2.23 (cont.) (*e*) Complete free-body diagram of *ACB*.

Solving for R_B,

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

The reaction R_A at the upper support is obtained from the free-body diagram of the bar (Fig. 2.23*e*),

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

Once the reactions have been determined, the stresses and strains in the bar can easily be obtained. Note that, while the total deformation of the bar is zero, each of its component parts *does deform* under the given loading and restraining conditions.

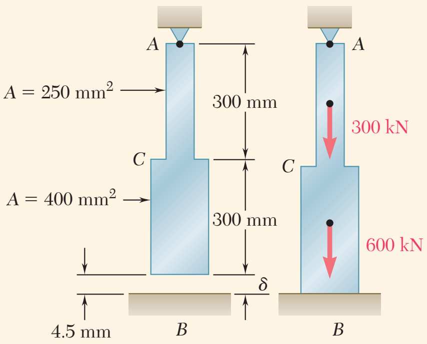


Fig. 2.24 Multi-section bar of Concept Application 2.4 with initial 4.5-mm gap at point *B*. Loading brings bar into contact with constraint.

Concept Application 2.5

Determine the reactions at A and B for the steel bar and loading of Concept Application 2.4, assuming now that a 4.5-mm clearance exists between the bar and the ground before the loads are applied (Fig. 2.24). Assume $E = 200$ GPa.

Considering the reaction at B to be redundant, compute the deformations δ_L and δ_R caused by the given loads and the redundant reaction $\mathbf{R}_B$. However, in this case, the total deformation is $\delta = 4.5$ mm. Therefore,

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m} \tag{1}$$

Substituting for δ_L and δ_R into (Eq. 1), and recalling that $E = 200$ GPa $= 200 \times 10^9$ Pa,

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{200 \times 10^9} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Solving for R_B,

$$R_B = 115.4 \times 10^3 \text{ N} = 115.4 \text{ kN}$$

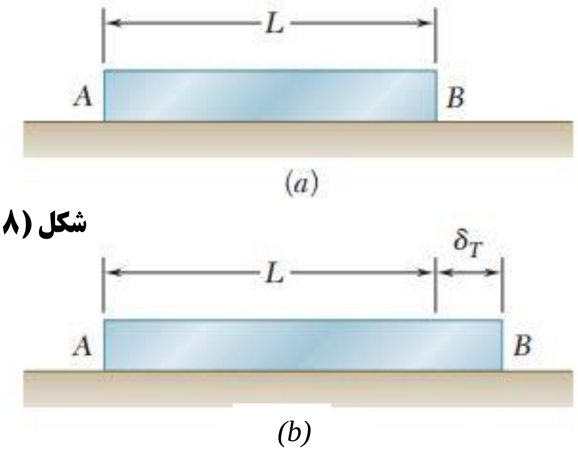
The reaction at A is obtained from the free-body diagram of the bar (Fig. 2.23*e*):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115.4 \text{ kN} = 785 \text{ kN}$$

2.3) Problems involving temperature changes ۲.۳) مسائلی که شامل تغییرات دما می باشند.

مسائلی وجود دارند که در آنها، عامل ایجاد تغییر شکل در میله، بجای نیرو، تغییرات دما می باشد. در این راستا، دو نوع مسئله وجود دارد:



شکل (۲۸)

۱) میله AB از جنس همگن و با سطح مقطع یکنواخت را در نظر بگیرید که آزادانه روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد (شکل ۲۸a).

اگر دمای میله به اندازه ΔT تغییر نماید، میزان تغییر شکل در آن عبارت است از (شکل ۲۸b)

$$\delta_T = \alpha L(\Delta T) \quad (m) \qquad \text{(I)}$$

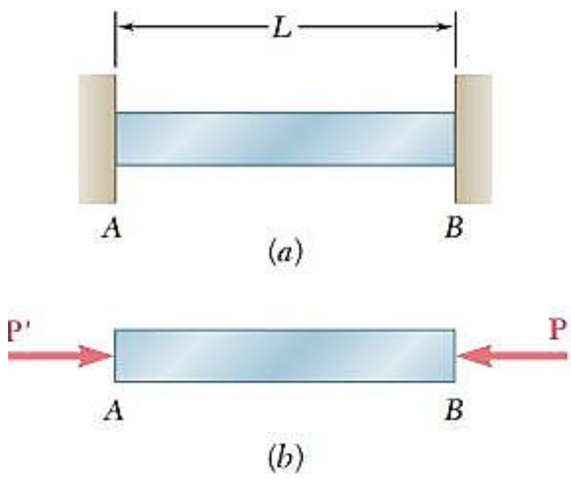
که در رابطه (I)، α ضریب انبساط حرارتی بوده و یکای آن $\frac{1}{^\circ C}$ یا $\frac{1}{^\circ F}$ می باشد و مقدار آن وابسته به جنس میله می باشد.

با استفاده از رابطه (I) می توان کرنش میله را محاسبه نمود که به آن کرنش حرارتی (Thermal strain) می گویند.

$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha.(\Delta T) \qquad \text{(II)}$$

دقت شود در میله با شرایط نشان داده شده در شکل (۲۸a)، هیچ گونه تنشی در میله ایجاد نمی شود!

۲) تیری را در نظر بگیرید که دو طرف آن دارای تکیه گاه گیردار می باشد و در حالت اولیه، هیچ گونه تنش یا کرنشی در آن وجود ندارد (شکل ۲۹a). اگر دمای میله به اندازه ΔT تغییر کند، به دلیل نوع شرایط مرزی، طول میله تغییر نمی کند $\delta_T = 0$. بنابراین هیچ گونه کرنشی در جسم ایجاد نمی شود $\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = 0$. زیرا دو نیروی هم اندازه و مخالف جهت بر دو انتهای میله اثر می گذارند تا مانع تغییر طول میله، ناشی از تغییرات دما گردند (شکل ۲۹b). این نیرو سبب ایجاد تنش در میله می شوند با وجود اینکه کرنشی در آن ایجاد نشده است. در این حالت، مسأله نامعین استاتیکی می باشد و برای تحلیل آن باید از روش برهم نهی استفاده نمود.

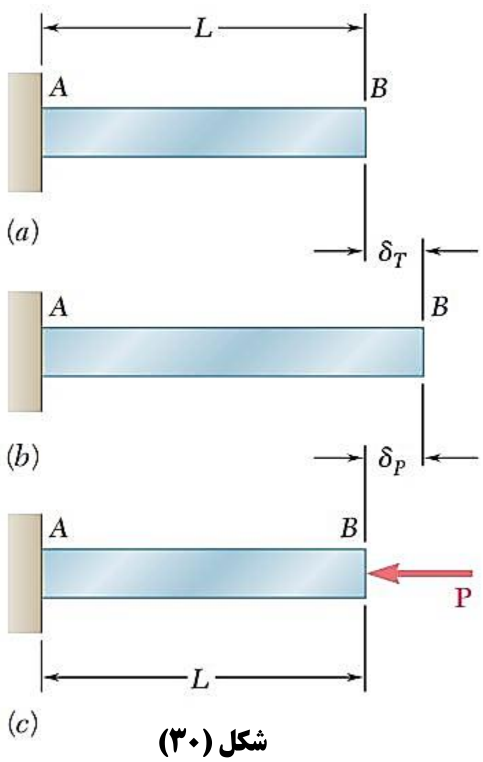


شکل (۲۹)

در این مسئله، دو عامل ΔT و نیروی ناشی از ΔT که در تکیه‌گاه ظاهر می‌شود مجهول می‌باشند. بنابراین باید تاثیر این دو عامل، بصورت جداگانه در نظر گرفته شوند (شکل ۳۰).

الف) ابتدا فقط تاثیر ΔT در نظر گرفته می‌شود و از اثر نیروی P صرفنظر می‌شود. در این حالت میزان تغییر شکل در میله عبارت است از (شکل ۳۰.b).

$$\delta_T = \alpha L (\Delta T) \quad (I)$$



شکل (۳۰)

ب) اکنون فرض می‌شود نیروی P اعمال شده است و تغییر طول میله ناشی از نیروی P باید برابر باشد با (شکل ۳۰.c)

$$\delta_P = \frac{PL}{EA} \quad (II)$$

ج) اکنون تاثیر هر دو عامل ΔT و P بصورت همزمان در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، میزان تغییر شکل در میله باید صفر شود یعنی:

$$\delta_{\text{کل}} = \delta_T + \delta_P = \frac{PL}{EA} + \alpha L (\Delta T) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P = -EA\alpha(\Delta T) \\ \sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T) \end{cases}$$

تذکر: مسئله بررسی شده، یک حالت ساده می‌باشد و نمی‌توان روابط آن را برای تمامی مسائل بسط داد. بلکه باید برای هر مسئله، شرایط خاص آن را در نظر گرفت.

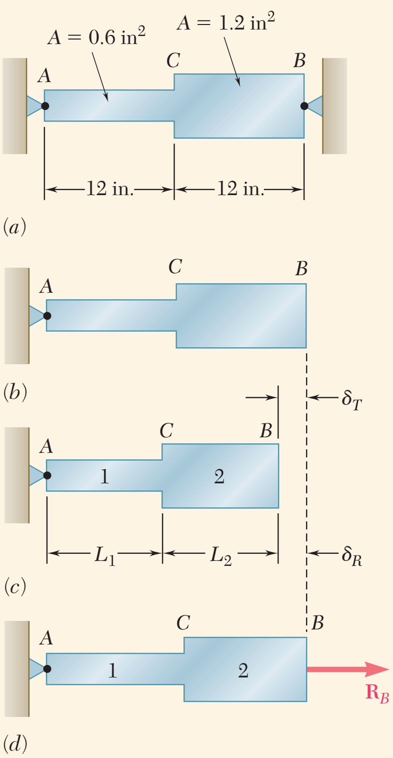


Fig. 2.28 *(a)* Restrained bar. *(b)* Bar at +75°F temperature. *(c)* Bar at lower temperature. *(d)* Force R_B needed to enforce zero deformation at point B.

Concept Application 2.6

Determine the values of the stress in portions AC and CB of the steel bar shown (Fig. 2.28*a*) when the temperature of the bar is $-50°$F, knowing that a close fit exists at both of the rigid supports when the temperature is $+75°$F. Use the values $E = 29 \times 10^6$ psi and $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/°$F for steel.

Determine the reactions at the supports. Since the problem is statically indeterminate, detach the bar from its support at B and let it undergo the temperature change

$$\Delta T = (-50°\text{F}) - (75°\text{F}) = -125°\text{F}$$

The corresponding deformation (Fig. 2.28*c*) is

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L = (6.5 \times 10^{-6}/°\text{F})(-125°\text{F})(24 \text{ in.})$$
$$= -19.50 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

Applying the unknown force $\mathbf{R}_B$ at end B (Fig. 2.28*d*), use Eq. (2.10) to express the corresponding deformation δ_R. Substituting

$$L_1 = L_2 = 12 \text{ in.}$$
$$A_1 = 0.6 \text{ in}^2 \qquad A_2 = 1.2 \text{ in}^2$$
$$P_1 = P_2 = R_B \qquad E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$$

into Eq. (2.10), write

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E}$$
$$= \frac{R_B}{29 \times 10^6 \text{ psi}}\left(\frac{12 \text{ in.}}{0.6 \text{ in}^2} + \frac{12 \text{ in.}}{1.2 \text{ in}^2}\right)$$
$$= (1.0345 \times 10^{-6} \text{ in./lb})R_B$$

Expressing that the total deformation of the bar must be zero as a result of the imposed constraints, write

$$\delta = \delta_T + \delta_R = 0$$
$$= -19.50 \times 10^{-3} \text{ in.} + (1.0345 \times 10^{-6} \text{ in./lb})R_B = 0$$

from which

$$R_B = 18.85 \times 10^3 \text{ lb} = 18.85 \text{ kips}$$

The reaction at A is equal and opposite.

Noting that the forces in the two portions of the bar are $P_1 = P_2 = 18.85$ kips, obtain the following values of the stress in portions AC and CB of the bar:

(continued)

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{18.85 \text{ kips}}{0.6 \text{ in}^2} = +31.42 \text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{18.85 \text{ kips}}{1.2 \text{ in}^2} = +15.71 \text{ ksi}$$

It cannot emphasized too strongly that, while the *total deformation* of the bar must be zero, the deformations of the portions AC and CB *are not zero*. A solution of the problem based on the assumption that these deformations are zero would therefore be wrong. Neither can the values of the strain in AC or CB be assumed equal to zero. To amplify this point, determine the strain ϵ_{AC} in portion AC of the bar. The strain ϵ_{AC} can be divided into two component parts; one is the thermal strain ϵ_T produced in the unrestrained bar by the temperature change ΔT (Fig. 2.28*c*). From Eq. (2.14),

$$\begin{aligned}\epsilon_T &= \alpha\,\Delta T = (6.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{F})(-125^\circ\text{F}) \\ &= -812.5 \times 10^{-6} \text{ in./in.}\end{aligned}$$

The other component of ϵ_{AC} is associated with the stress σ_1 due to the force $\mathbf{R}_B$ applied to the bar (Fig. 2.28*d*). From Hooke's law, express this component of the strain as

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{+31.42 \times 10^3 \text{ psi}}{29 \times 10^6 \text{ psi}} = +1083.4 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Add the two components of the strain in AC to obtain

$$\begin{aligned}\epsilon_{AC} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -812.5 \times 10^{-6} + 1083.4 \times 10^{-6} \\ &= +271 \times 10^{-6} \text{ in./in.}\end{aligned}$$

A similar computation yields the strain in portion CB of the bar:

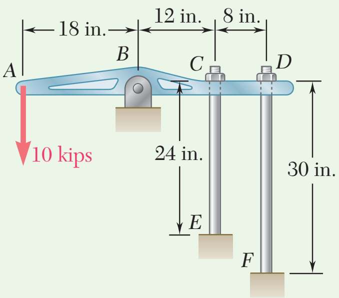
$$\begin{aligned}\epsilon_{CB} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -812.5 \times 10^{-6} + 541.7 \times 10^{-6} \\ &= -271 \times 10^{-6} \text{ in./in.}\end{aligned}$$

The deformations δ_{AC} and δ_{CB} of the two portions of the bar are

$$\begin{aligned}\delta_{AC} &= \epsilon_{AC}(AC) = (+271 \times 10^{-6})(12 \text{ in.}) \\ &= +3.25 \times 10^{-3} \text{ in.} \\ \delta_{CB} &= \epsilon_{CB}(CB) = (-271 \times 10^{-6})(12 \text{ in.}) \\ &= -3.25 \times 10^{-3} \text{ in.}\end{aligned}$$

Thus, while the sum $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ of the two deformations is zero, neither of the deformations is zero.

Sample Problem 2.3



The $\frac{1}{2}$-in.-diameter rod CE and the $\frac{3}{4}$-in.-diameter rod DF are attached to the rigid bar $ABCD$ as shown. Knowing that the rods are made of aluminum and using $E = 10.6 \times 10^6$ psi, determine (*a*) the force in each rod caused by the loading shown and (*b*) the corresponding deflection of point A.

STRATEGY: To solve this statically indeterminate problem, you must supplement static equilibrium with a relative deflection analysis of the two rods.

MODELING: Draw the free body diagram of the bar (Fig. 1)

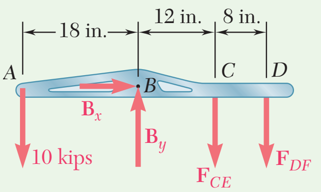


Fig. 1 Free-body diagram of rigid bar *ABCD*.

ANALYSIS:

Statics. Considering the free body of bar $ABCD$ in Fig. 1, note that the reaction at B and the forces exerted by the rods are indeterminate. However, using statics,

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (10 \text{ kips})(18 \text{ in.}) - F_{CE}(12 \text{ in.}) - F_{DF}(20 \text{ in.}) = 0$$

$$12F_{CE} + 20F_{DF} = 180 \qquad \textbf{(1)}$$

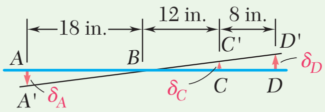


Fig. 2 Linearly proportional displacements along rigid bar *ABCD*.

Geometry. After application of the 10-kip load, the position of the bar is $A'BC'D'$ (Fig. 2). From the similar triangles BAA', BCC', and BDD',

$$\frac{\delta_C}{12 \text{ in.}} = \frac{\delta_D}{20 \text{ in.}} \qquad \delta_C = 0.6\delta_D \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\delta_A}{18 \text{ in.}} = \frac{\delta_D}{20 \text{ in.}} \qquad \delta_A = 0.9\delta_D \qquad \textbf{(3)}$$

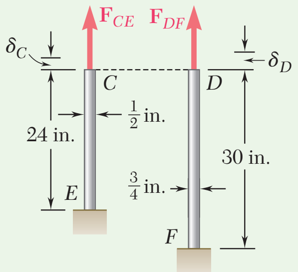


Fig. 3 Forces and deformations in *CE* and *DF*.

Deformations. Using Eq. (2.9), and the data shown in Fig. 3, write

$$\delta_C = \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} \qquad \delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

Substituting for δ_C and δ_D into Eq. (2), write

$$\delta_C = 0.6\delta_D \qquad \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} = 0.6\frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

$$F_{CE} = 0.6\frac{L_{DF}}{L_{CE}}\frac{A_{CE}}{A_{DF}}F_{DF} = 0.6\left(\frac{30 \text{ in.}}{24 \text{ in.}}\right)\left[\frac{\frac{1}{4}\pi(\frac{1}{2}\text{ in.})^2}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4}\text{ in.})^2}\right]F_{DF} \quad F_{CE} = 0.333F_{DF}$$

Force in Each Rod. Substituting for F_{CE} into Eq. (1) and recalling that all forces have been expressed in kips,

$$12(0.333F_{DF}) + 20F_{DF} = 180 \qquad F_{DF} = 7.50 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

$$F_{CE} = 0.333F_{DF} = 0.333(7.50 \text{ kips}) \qquad F_{CE} = 2.50 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

(continued)

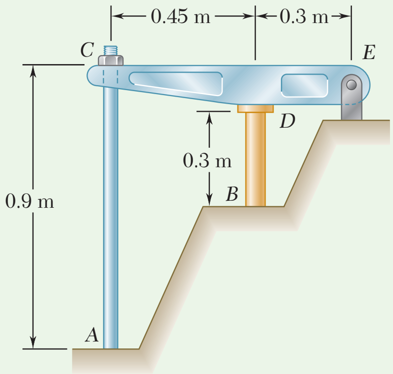
Deflections. The deflection of point D is

$$\delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E} = \frac{(7.50 \times 10^3 \text{ lb})(30 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4} \text{ in.})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} \qquad \delta_D = 48.0 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

Using Eq. (3),

$$\delta_A = 0.9\delta_D = 0.9(48.0 \times 10^{-3} \text{ in.}) \qquad \delta_A = 43.2 \times 10^{-3} \text{ in.} \blacktriangleleft$$

REFLECT and THINK: You should note that as the rigid bar rotates about B, the deflections at C and D are proportional to their distance from the pivot point B, but *the forces exerted by the rods at these points are not*. Being statically indeterminate, these forces depend upon the deflection attributes of the rods as well as the equilibrium of the rigid bar.



Sample Problem 2.4

The rigid bar CDE is attached to a pin support at E and rests on the 30-mm-diameter brass cylinder BD. A 22-mm-diameter steel rod AC passes through a hole in the bar and is secured by a nut that is snugly fitted when the temperature of the entire assembly is 20°C. The temperature of the brass cylinder is then raised to 50°C, while the steel rod remains at 20°C. Assuming that no stresses were present before the temperature change, determine the stress in the cylinder.

Rod AC: Steel	Cylinder BD: Brass
$E = 200$ GPa	$E = 105$ GPa
$\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/°\text{C}$	$\alpha = 20.9 \times 10^{-6}/°\text{C}$

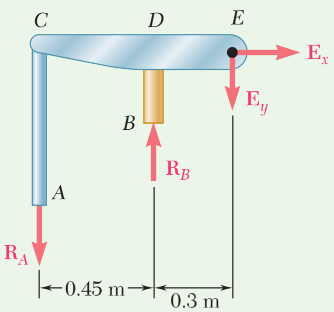


Fig. 1 Free-body diagram of bolt, cylinder and bar.

STRATEGY: You can use the method of superposition, considering $\mathbf{R}_B$ as redundant. With the support at B removed, the temperature rise of the cylinder causes point B to move down through δ_T. The reaction $\mathbf{R}_B$ must cause a deflection δ_1, equal to δ_T so that the final deflection of B will be zero (Fig. 2)

MODELING: Draw the free-body diagram of the entire assembly (Fig. 1).

ANALYSIS:

Statics. Considering the free body of the entire assembly, write

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad R_A(0.75 \text{ m}) - R_B(0.3 \text{ m}) = 0 \quad R_A = 0.4R_B \qquad \textbf{(1)}$$

(continued)

Deflection δ_T. Because of a temperature rise of $50° - 20° = 30°C$, the length of the brass cylinder increases by δ_T. (Fig. 2*a*).

$$\delta_T = L(\Delta T)\alpha = (0.3 \text{ m})(30°\text{C})(20.9 \times 10^{-6}/°\text{C}) = 188.1 \times 10^{-6} \text{ m} \downarrow$$

Deflection δ_1. From Fig. 2*b*, note that $\delta_D = 0.4\delta_C$ and $\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D}$.

$$\delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A(0.9 \text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0.022 \text{ m})^2(200 \text{ GPa})} = 11.84 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_D = 0.40\delta_C = 0.4(11.84 \times 10^{-9} R_A) = 4.74 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B(0.3 \text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0.03 \text{ m})^2(105 \text{ GPa})} = 4.04 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

Recall from Eq. (1) that $R_A = 0.4R_B$, so

$$\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} = [4.74(0.4R_B) + 4.04R_B]10^{-9} = 5.94 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

But $\delta_T = \delta_1$: $\quad 188.1 \times 10^{-6} \text{ m} = 5.94 \times 10^{-9} R_B \qquad R_B = 31.7 \text{ kN}$

Stress in Cylinder: $\sigma_B = \dfrac{R_B}{A} = \dfrac{31.7 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi(0.03 \text{ m})^2} \qquad \sigma_B = 44.8 \text{ MPa}$ ◀

REFLECT and THINK: This example illustrates the large stresses that can develop in statically indeterminate systems due to even modest temperature changes. Note that if this assembly was statically determinate (i.e., the steel rod was removed), no stress at all would develop in the cylinder due to the temperature change.

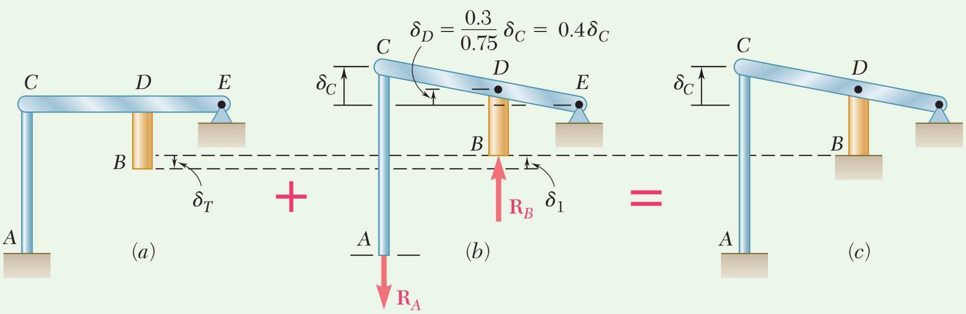


Fig. 2 Superposition of thermal and restraint force deformations (*a*) Support at *B* removed. (*b*) Reaction at *B* applied. (*c*) Final position.