فصل اول:

مقدمه—مفهوم تنش

Chapter 1:

Introduction-Concept of Stress

Contents

فهرست مطالب :

+ مقدمه

+ Introduction

مقاومت مصالح علمی است که به ما می‌گوید آیا سازه یا ماشین با جنس مشخص، می‌تواند تحت بارگذاری وارده مقاومت نماید؟!

برای پاسخ به این سوال، از دو مفهوم تنش و تغییر شکل یا کرنش استفاده می‌شود.

در این فصل مفهوم تنش (stress) بیان می‌گردد.

+ 1.1) مروری بر روش‌های استاتیک

1.1) Review of the methods of statics

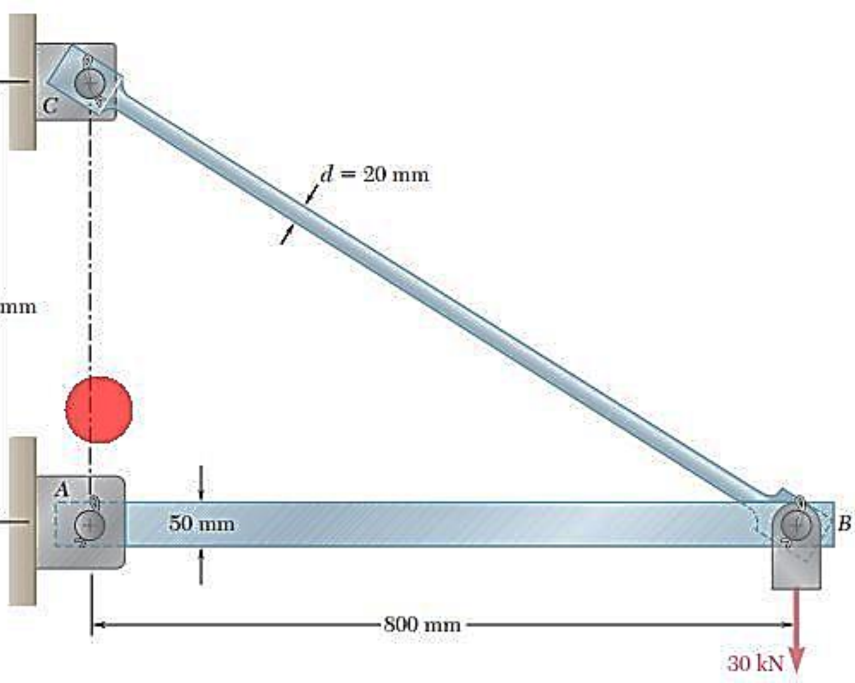
قبل از بررسی مفهوم تنش، ابتدا توسط یک مثال، مروری بر مسائل استاتیک انجام می‌گیرد.

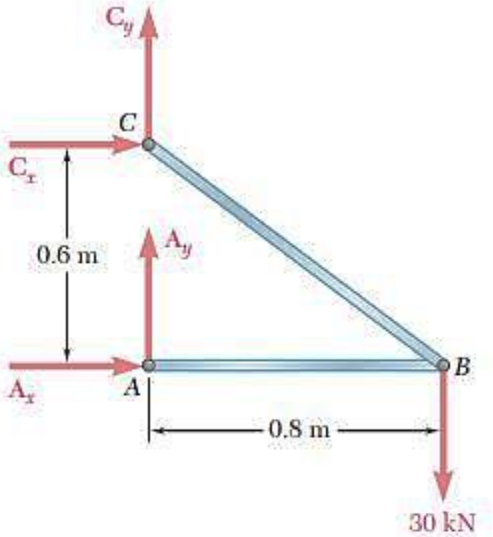
اهداف مثال زیر عبارت است از:

1) استفاده از روش‌های عمومی بدست آوردن نیروها در محل اتصال‌ها (قوانین تعادل)
2) استفاده از قوانین حاکم بر عضوهای دونیرویی
3) نمایش نیروها در تکیه‌گاه‌ها
4) تعیین نیروی درونی

- مثال: سازه روبرو را در نظر بگیرید (شکل 1)

به سازه فوق، نیروی 30 KN اعمال می‌شود. نیرو در هر یک از عضوهای سازه را تعیین نمایید.





۱) ابتدا دیاگرام آزاد کل سازه را رسم می‌کنیم

در شکل فوق، چهار مجهول A_x، A_y، C_x و C_y وجود دارد. با استفاده از روابط تعادل داریم:

$$\circlearrowright^{+} \sum M_C = 0 \Rightarrow 0.6 \times A_x - 0.8 \times 30 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 40 \text{ KN}} \quad \text{(I)}$$

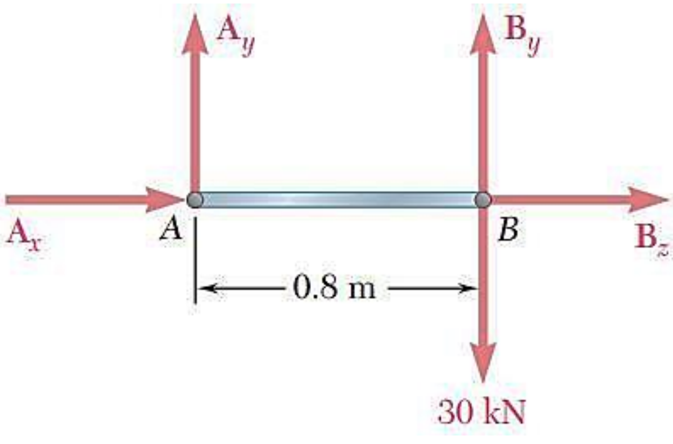
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + C_x = 0 \Rightarrow \boxed{C_x = -A_x = -40 \text{ KN}} \quad \text{(II)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y - 30 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y + C_y = 30 \text{ KN}} \quad \text{(III)}$$

با استفاده از روابط I، II و III فقط می‌توان سه مجهول از چهار مجهول را تعیین نمود و اگر از هر رابطه تعادل دیگری نیز استفاده شود، نتیجه خاصی حاصل نمی‌شود.
برای رفع این مشکل، باید دیاگرام آزاد تک‌تک عضوها رسم شود.

2) دیاگرام آزاد یکی از عضوها (در صورت نیاز، هر دو عضو) را رسم می‌کنیم (شکل 3)

با نوشتن رابطه تعادل گشتاورها در نقطه B داریم:



$$\circlearrowright^{+} \sum M_B = 0 \Rightarrow -0.8 \times A_y = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{A_y = 0} \quad \text{(IV)}$$

که با جایگذاری رابطه IV در رابطه III خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \boxed{C_y = 30 \text{ KN}} \quad \text{(V)}$$

3) تحلیل نیروها در عضوها

براساس آنچه که از محاسبات قبل بدست آمده است در میله AB،
عکس العمل در نقطه A عبارت است از:

$$\begin{cases} A_x = 40\ KN \xrightarrow{+} \\ A_y = 0 \end{cases}$$

که نشان دهنده این است که نیرو باید در عضو AB، نیروی فشاری و در راستای عضو AB باشد.

عکس العمل در نقطه B عبارت است از:

$$\begin{cases} +\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - 30 = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 30\ KN} \\ \xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = -A_x = -40\ KN} \end{cases}$$

در نقطه B از عضو AB، نیروی 30 KN با نیروی B_y خنثی می‌شود و فقط نیروی $B_x = -40\ KN$ باقی می‌ماند.

در میله BC، عکس العمل در نقطه C عبارت است از:

$$\begin{cases} C_x = -A_x = -40\ KN \\ C_y = 30\ KN \end{cases}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) ; \quad \alpha = tg^{-1}\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{600}{800}\right) = tg^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

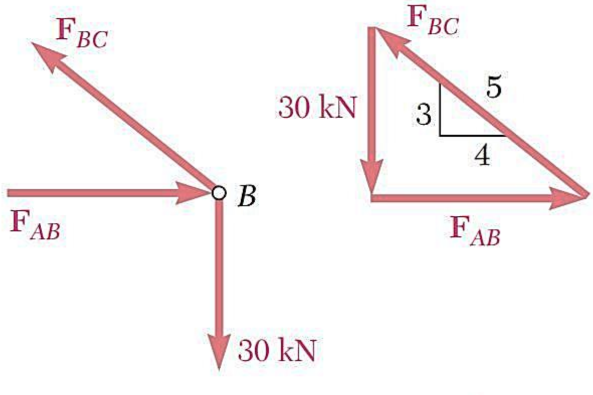
با توجه به برابری زوایای α و θ نتیجه می‌گیریم که نیرو در نقطه C، دقیقا در راستای میله BC می‌باشد.

- نحوه محاسبه نیروها در عضوهای AB و BC می‌توان به روش دیگری نیز انجام گرد.

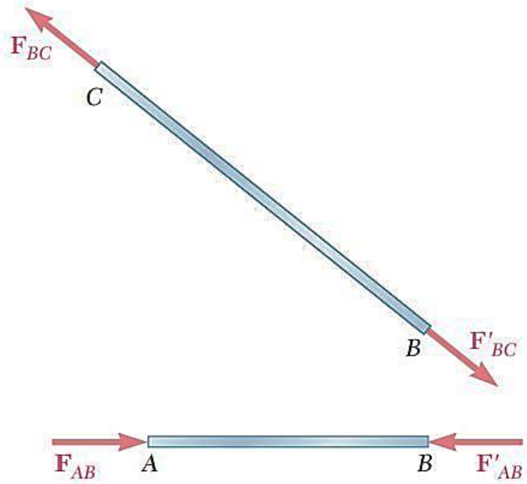
با توجه به اینکه عضوهای AB و BC هر دو، عضو دو نیرویی می‌باشند بنابراین انتظار داریم نیرو در راستای میله‌ها باشد که در اینصورت داریم:

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30}{3}$$

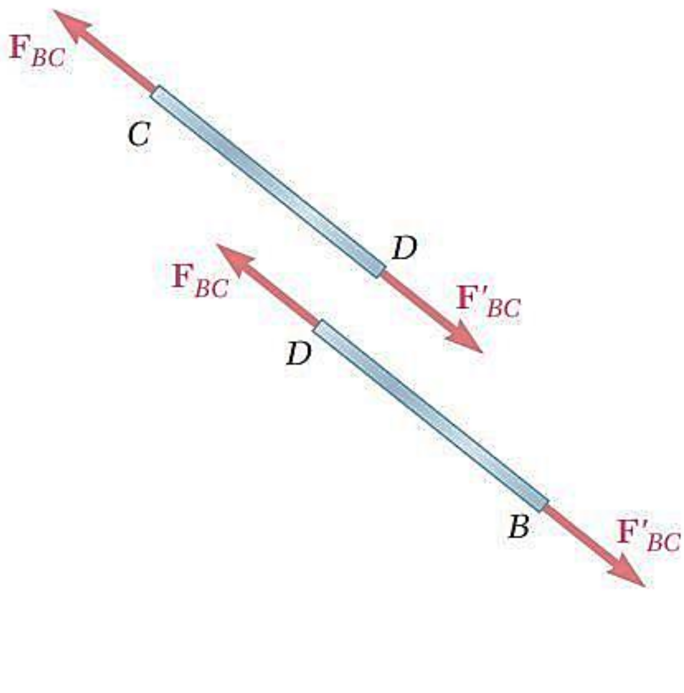
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{AB} = 40\ KN \\ F_{BC} = 50\ KN \end{cases}$$



(a) (b)



با تعیین نیروها در انتهای میله‌ها، می‌توان نیروهای داخلی در آنها را با زدن مقطع تعیین نمود. به عنوان مثال، با زدن مقطع در نقطه دلخواه D از میله BC، نتیجه می‌گیریم برای اینکه هر دو قسمت میله (BD و CD) در تعادل باشند باید نیروی داخلی در نقطه D برابر 50 KN باشد. به بیان دیگر، با اعمال نیروی 30KN در نقطه B، در میله BC نیروی داخلی 50 KN ایجاد می‌شود.



۱.۲) انواع تنش در عضوهای یک سازه stresses in the members of a structure

در این فصل، از بین حالت‌های مختلف برای تنش، چند نوع خاص تنش، بررسی می‌گردد که عبارتند از:

۱) تنش محوری

۲) تنش برشی

۳) تنش لهیدگی یا تکیه‌گاهی در اتصالات

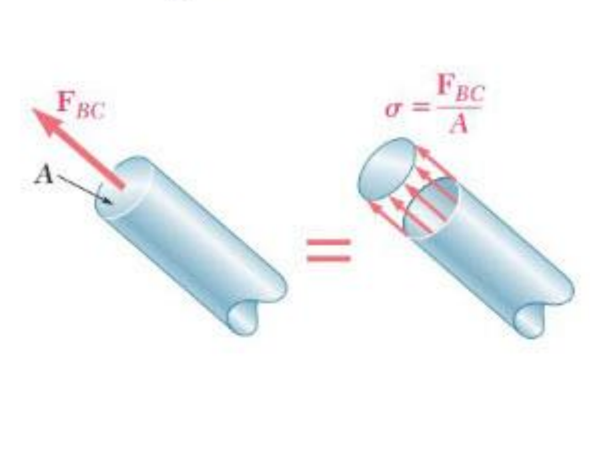
حالت‌های ذکر شده به ترتیب در ادامه بررسی خواهند شد.

1.2A) تنش محوری Axial stress

در قسمت قبل، نیرو در هر یک از عضوهای سازه تعیین شد. اما این سوال هم چنان باقی است که آیا عضوهای فوق قابلیت تحمل این نیروها را دارند یا خیر؟

برای پاسخ به این سوال، نیاز به تعریف کمیت جدیدی بنام تنش (stress) می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underset{\text{sigma}}{\text{سیگما} \leftarrow \sigma} = \frac{P}{A} \quad \left(\frac{N}{m^2}\right) \qquad (I)$$



رابطه (I) نشان می‌دهد که اندازه تنش در یک عضو، بستگی به مقدار نیرو در آن عضو و اندازه سطح مقطع دارد.

حال سوال دیگری مطرح می‌باشد و اینکه مقدار تنش در عضو با چه معیاری مقایسه شود که بتوان از روی آن نتیجه گرفت که آیا سازه تحمل بارگذاری وارده را دارد یا خیر؟

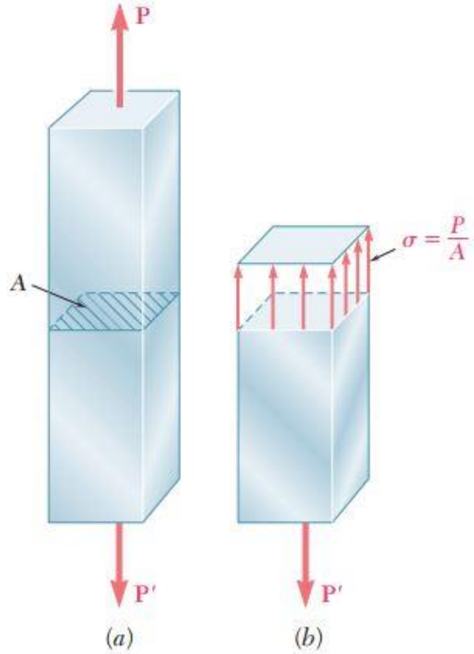
به این سوال باید اینگونه پاسخ داد که برای هر جنسی یک معیار مشخص برای تنش وجود دارد که اگر تنش ناشی از بارگذاری خارجی از این معیار تنش بیشتر باشد می‌توان نتیجه گرفت که سازه تحمل بارگذاری وارده را ندارد!

اگر نیروی وارد بر عضو بصورت نیروی کششی باشد آن گاه علامت تنش مثبت می‌باشد و به آن تنش کششی می‌گویند و اگر نیروی وارد بر عضو بصورت نیروی فشاری باشد آن گاه علامت تنش منفی می‌باشد و به آن تنش فشاری می‌گویند.

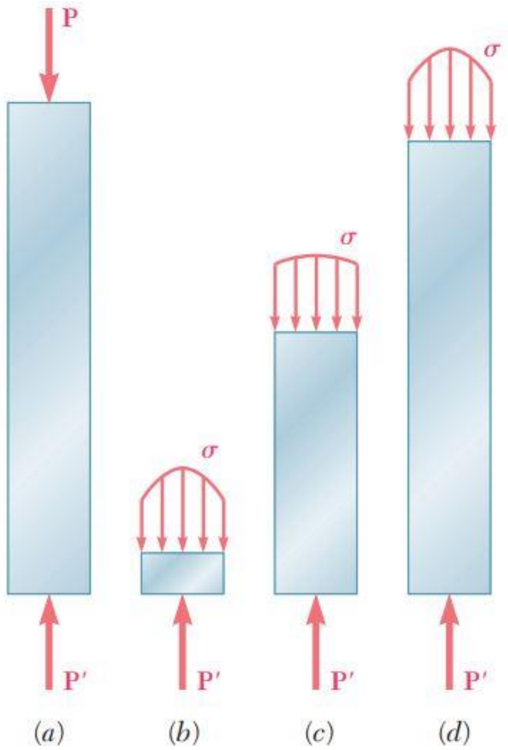
اگر نیروی وارد بر عضو، عمود بر سطح مقطع عضو یا به موازات محور عضو باشد، به تنش ایجاد شده در عضو، تنش نرمال ناشی از نیروی محوری گفته می‌شود.

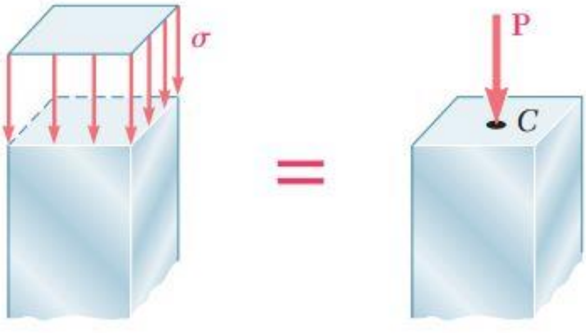
باید دقت شود که σ مقدار متوسط تنش در یک سطح مقطع می‌باشد نه تنش در یک نقطه مشخص از سطح مقطع. به بیان دیگر، مقدار تنش متوسط متفاوت از تنش نقطه‌ای است. تنش نقطه‌ای به صورت رابطه (II) تعریف می‌شود:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \text{(II)}$$



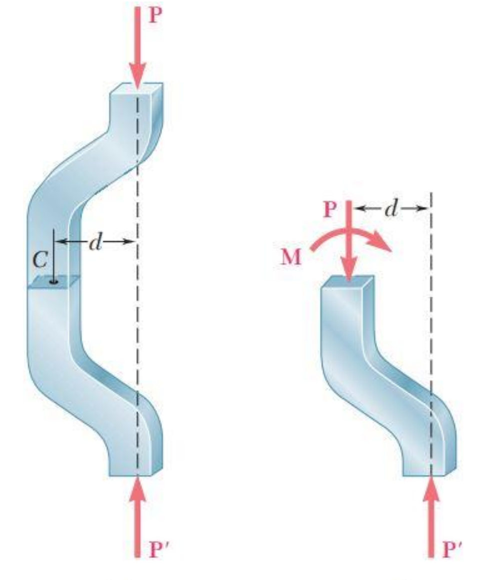
یک نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که تنش نه تنها در مقاطع مختلف از طول عضو متفاوت است بلکه در یک مقطع مشخص نیز، تنش در سطح مقطع یکنواخت نیست!
در عمل فرض می‌شود که توزیع تنش‌های نرمال در یک عضوی که تحت بارگذاری محوری است به جز نواحی نزدیک به محل اعمال بار، یکنواخت است. در این حالت، مقدار تنش برابر با σ_{ave} می‌باشد.





نکته دیگری که باید به آن اشاره کرد این است که توزیع یکنواخت تنش تنها در حالتی امکان پذیر است که خط اثر دو نیروی P و P' دقیقاً بر محور مرکزی عضو منطبق باشد.

به این نوع بارگذاری، بارگذاری مرکزی می‌گویند و این نوع بارگذاری در تمامی عضوهای دو نیرویی مستقیم، اتفاق می‌افتد. اگر بار محوری بصورت خارج از مرکز وارد شود آن گاه نمی‌توان انتظار داشت که توزیع تنش یکنواخت باشد.



(a) (b)

در دستگاه مختصات SI، واحد تنش بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$1\ \frac{N}{m^2} = 1\ Pa \longrightarrow \begin{cases} \text{Pascal} \\ \text{پاسکال} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\ kPa = 10^3\ Pa = 10^3\ N/m^2 \\ 1\ MPa = 10^6\ Pa = 10^6\ N/m^2 \\ 1\ GPa = 10^9\ Pa = 10^9\ N/m^2 \end{cases}$$

در دستگاه مختصات U.S، برای واحد تنش داریم:

$$\text{نیرو}\ P \longrightarrow \begin{cases} \text{pounds (lb)} \\ \text{kilopounds (kip)} \end{cases}$$

$$\text{سطح مقطع}\ A \longrightarrow in^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{P}{A} \left(\frac{\text{pounds}}{in^2} = psi\right) \quad \text{or} \quad \left(\frac{\text{kilopounds}}{in^2} = kpsi\right)$$

Concept Application 1.1

Considering the structure of Fig. 1.1 on page 5, assume that rod *BC* is made of a steel with a maximum allowable stress $\sigma_{all} = 165$ MPa. Can rod *BC* safely support the load to which it will be subjected? The magnitude of the force F_{BC} in the rod was 50 kN. Recalling that the diameter of the rod is 20 mm, use Eq. (1.5) to determine the stress created in the rod by the given loading.

$$P = F_{BC} = +50 \text{ kN} = +50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{20 \text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = +159 \times 10^6 \text{ Pa} = +159 \text{ MPa}$$

Since σ is smaller than σ_{all} of the allowable stress in the steel used, rod *BC* can safely support the load.

برای اینکه بتوان تحلیل کاملی از توانایی سازه در تحمل کردن یک بارگذاری داشت باید تنش در تمامی اعضای تشکیل دهنده یک سازه را بررسی نمود مانند پین‌ها، پایه‌ها، عضوها و .... علاوه براین از آنجا که بدلیل بارگذاری، اعضا دچار تغییر شکل می‌شوند باید بررسی نمود که آیا میزان تغییر شکل ایجاد شده، قابل قبول می‌باشد یا خیر؟ (بحث تغییر شکل در فصل دوم بررسی خواهد شد.)

برای عضوهایی که تحت نیروی فشاری می‌باشند باید پایداری عضو نیز بررسی گردد. پایداری یعنی توانایی جسم در تحمل بار بدون اینکه تغییر شکل ناگهانی در آن ایجاد شود (این بحث، در فصل دهم بررسی خواهد شد.)

در انتهای این بخش لازم است اشاره شود که تنها وظیفه مهندس، تحلیل سازه‌ها و ماشین‌های موجود نیست بلکه وظیفه مهم‌تر یک مهندس، طراحی سازه‌ها و ماشین‌های جدیدی است که برای آنها باید مولفه‌های مناسب برای انجام یک هدف مشخص، انتخاب شود.

Concept Application 1.2

As an example of design, let us return to the structure of Fig. 1.1 on page 5 and assume that aluminum with an allowable stress $\sigma_{\text{all}} =$ 100 MPa is to be used. Since the force in rod BC is still $P = F_{BC} = 50$ kN under the given loading, from Eq. (1.5), we have

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{P}{A} \qquad A = \frac{P}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

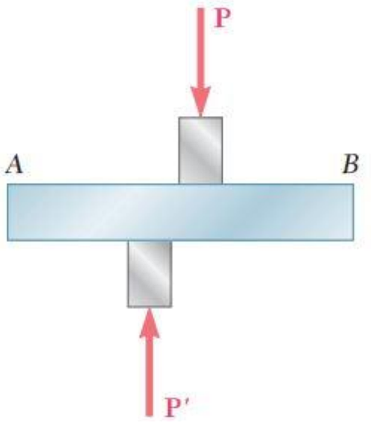
and since $A = \pi r^2$,

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{\pi}} = 12.62 \times 10^{-3} \text{ m} = 12.62 \text{ mm}$$

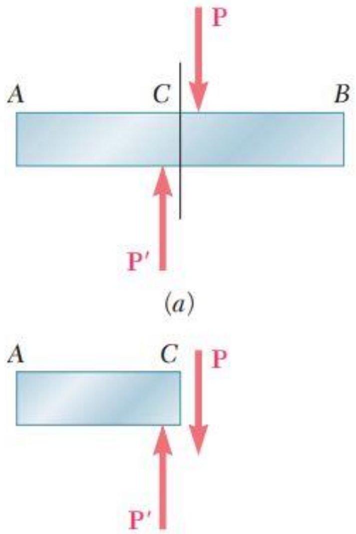
$$d = 2r = 25.2 \text{ mm}$$

Therefore, an aluminum rod 26 mm or more in diameter will be adequate.

1.2B) تنش برشی Shearing stress



در بخش قبل، تنش در عضوهای بررسی گردید که نیرو بر سطح مقطع عضو عمود بوده است. اما نوع دیگری از تنش وجود دارد که با اعمال نیروهای P و P' بر عضو AB ایجاد می‌گردد. (شکل)



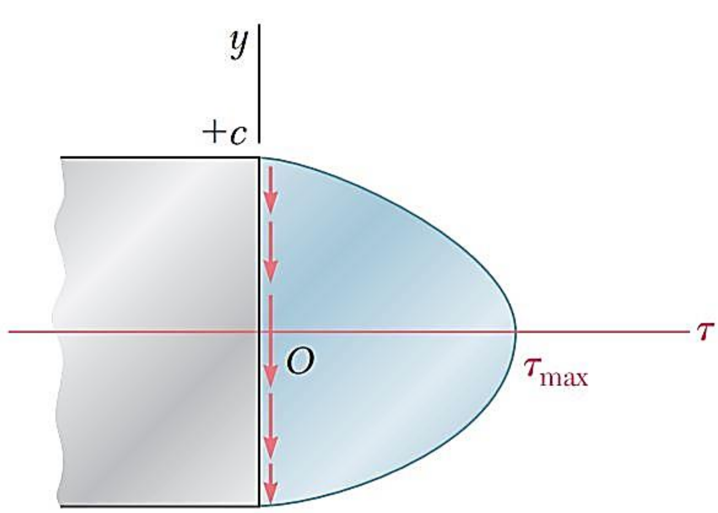
اگر در شکل از موقعیت C مقطعی زده شود و نیروهای درونی رسم شوند شکل به دست می‌آیند.

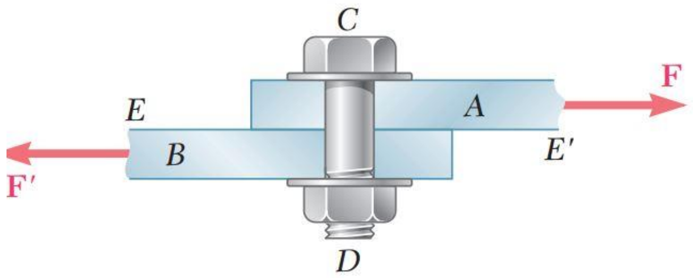
در شکل نیروی P بر سطح مقطع جسم مماس است که به آن نیروی برشی می‌گویند. اگر نیروی P بر سطح مقطع A تقسیم شود تنش برشی میانگین به دست می‌آید که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} \quad \left(N/m^2 = Pa\right)$$

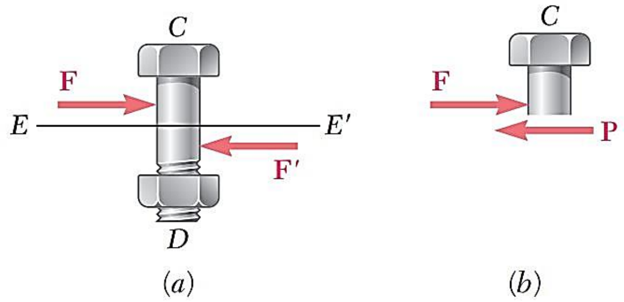
(tau)

نکته: برخلاف آنچه که برای نحوه توزیع تنش‌های نرمال ذکر شد، توزیع تنش‌های برشی در یک سطح مقطع را نمی‌توان یکنواخت فرض کرد. این نوع تنش برشی (تنش برشی عرضی) دارای مقدار صفر در سطح عضو بوده و دارای یک مقدار ماکزیمم که ممکن است خیلی بیشتر از مقدار میانگین τ_{ave} باشد در جایی در وسط سطح مقطع دارد.



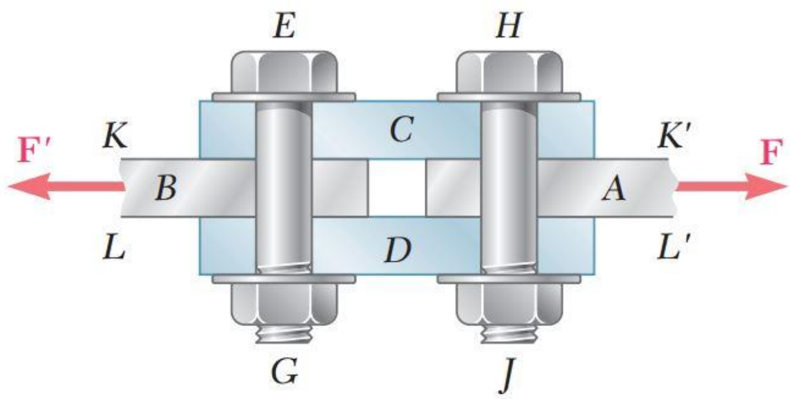


تنش برشی عرضی معمولاً در پیچ‌ها (bolts)، پین‌ها (pins) و پرچ‌ها (rivets) ظاهر می‌شود. مطابق شکل فرض کنید دو صفحه A و B توسط پیچ CD نگه داشته شده‌اند. اگر به صفحات نیروهای F و F′ اعمال شود در مقطع EE′ از پیچ، تنش ایجاد خواهد شد. با رسم دیاگرام کل پیچ و آن بخش که بالای مقطع EE′ واقع است، نیروی برشی P در مقطع برابر نیروی F بدست می‌آید. اکنون تنش برشی عرضی در مقطع EE′ عبارت است از:



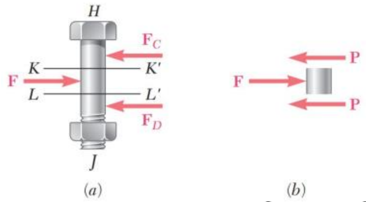
$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$$

حالتی که برای پیچ بررسی شد به پیچ تحت برش تکی (single shear) مشهور است. حالت‌های دیگری نیز، مانند شکل زیر امکان‌پذیر است.



در این حالت، برش در دو مقطع 'KK و 'LL اتفاق می‌افتد. با رسم دیاگرام آزاد کل پیچ و دو مقطع 'KK و 'LL، تنش در هر مقطع عبارت است از:

$$\begin{cases} P = F/2 \\ \tau_{ave} = \dfrac{P}{A} = \dfrac{F/2}{A} = \dfrac{F}{2A} \end{cases}$$

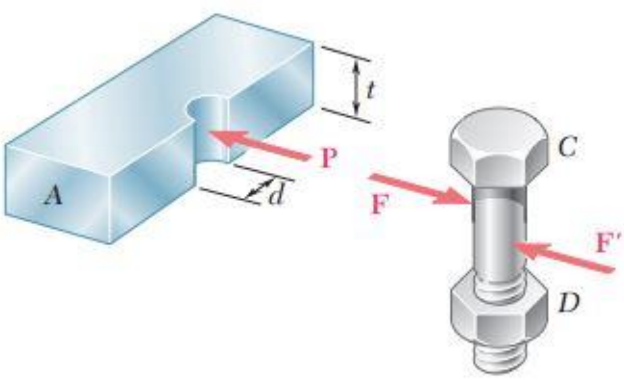


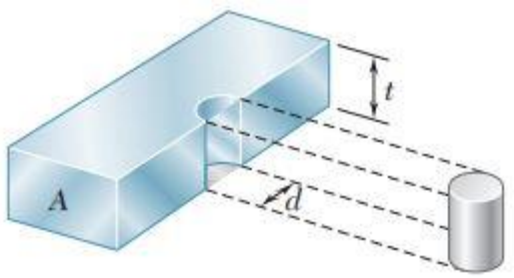
1.2C) تنش لهیدگی یا تکیه‌گاهی در اتصالات

Bearing stress in connections

پیچ‌ها، پین‌ها و پرچ‌ها، با عضوهایی که در تماس هستند تنش لهیدگی یا تکیه‌گاهی در سطح تماس ایجاد می‌کنند. به عنوان مثال شکل   را مجددا در نظر بگیرید. پیچ به صفحه A نیروی P که هم اندازه و خلاف جهت نیروی F هست را وارد می‌کند. صفحه A نیز نیروی F را به پیچ وارد می‌کند (شکل   ). نیروی P نشان دهنده برآیند نیروهای اولیه‌ای است که در سطح درونی نیم استوانه به قطر d و طول t (برابر با ضخامت صفحه) توزیع شده است. از آنجا که توزیع این نیروها و به دنبال آن نحوه توزیع تنش، نسبتاً پیچیده است در عمل یک مقدار میانگین اسمی σ_b برای تنش در نظر می‌گیرند که به آن تنش لهیدگی یا تکیه‌گاهی می‌گویند. نکته قابل توجه این است که مقدار σ_b از تقسیم نیروی P بر سطح مستطیلی معادلی به دست می‌آید که نشان دهنده تصویر سطح پیچ روی صفحه می‌باشد و عبارت است از $A = td$. بنابراین داریم:

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}$$





Concept Application 1.3

Returning to the structure of Fig. 1.1, we will determine the normal stresses, shearing stresses and bearing stresses. As shown in Fig. 1.22, the 20-mm-diameter rod BC has flat ends of 20 × 40-mm rectangular cross section, while boom AB has a 30 × 50-mm rectangular cross section and is fitted with a clevis at end B. Both members are connected at B by a pin from which the 30-kN load is suspended by means of a U-shaped bracket. Boom AB is supported at A by a pin fitted into a double bracket, while rod BC is connected at C to a single bracket. All pins are 25 mm in diameter.

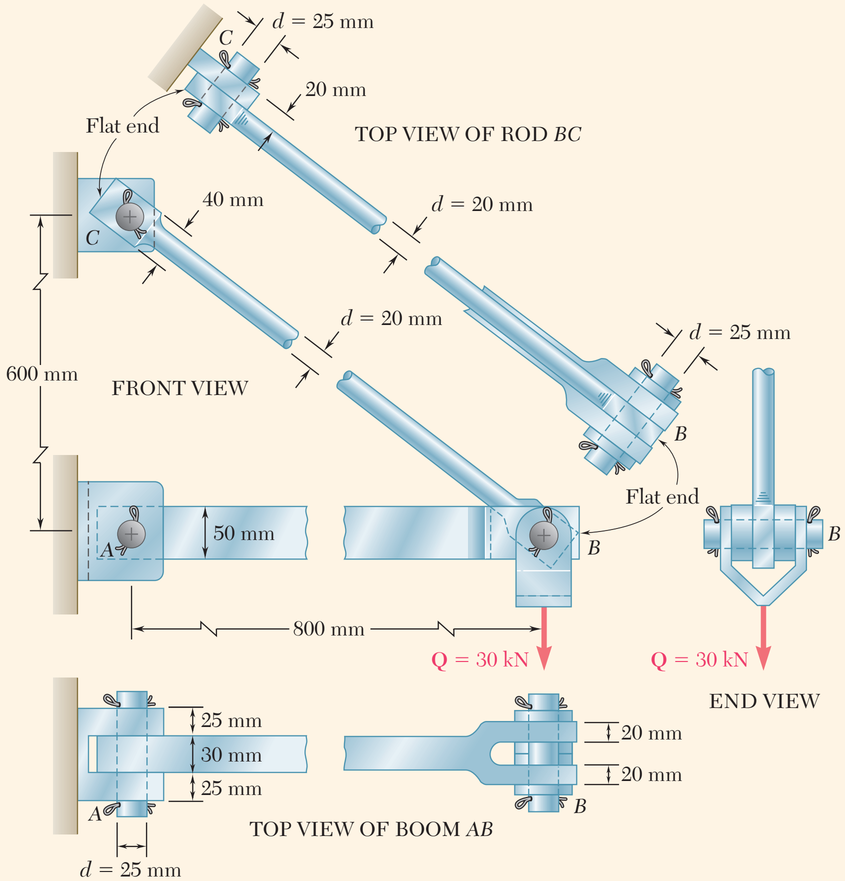


Fig. 1.22 Components of boom used to support 30 kN load.

Normal Stress in Boom *AB* and Rod *BC*. As found in Sec. 1.1A, the force in rod BC is $F_{BC} = 50$ kN (tension) and the area of its circular cross section is $A = 314 \times 10^{-6}$ m^2. The corresponding average normal stress is $\sigma_{BC} = +159$ MPa. However, the flat parts of the rod are also under tension and at the narrowest section. Where the hole is located, we have

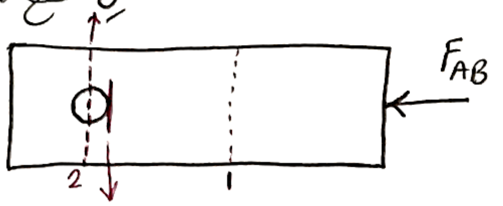
$$A = (20 \text{ mm})(40 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 300 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

(continued)

+ تفاوت تنش در قسمت سوراخ دار در میله BC و AB

• میله AB تحت نیروی فشاری قرار دارد.

این مقطع تحت تنش نیست



این نقطه یا مقطع، به پیچ فشرده می‌شود.

مقطع 1 $\sigma = \dfrac{F_{AB}}{A}$ ✓

مقطع 2 $\sigma = \dfrac{F_{AB}}{A - \pi r^2}$ ✗

• میله BC تحت نیروی کششی قرار دارد.

این مقطع تحت تنش می‌باشد

این نقطه یا مقطع به پیچ فشرده می‌شود.

مقطع 1 $\sigma = \dfrac{F_{BC}}{A}$ ✓

مقطع 2 $\sigma = \dfrac{F_{BC}}{A - \pi r^2}$ ✓

+ تنش در بخش‌های مختلف سازه

- میله AB

الف) پین A { تنش برشی / " لهیدگی

ب) پین B { تنش برشی / " لهیدگی

ج) میله {
تنش محوری فشاری در وسط میله
" لهیدگی در سر A میله
" " " " B "

- میله BC

الف) پین C { تنش برشی / " لهیدگی

ب) پین B { تنش برشی / " لهیدگی

ج) {
تنش محوری کششی در وسط میله
" " " در قسمت سوراخ دار در سر B
" " " " " " " " C
" لهیدگی در سر B میله
" " " C میله

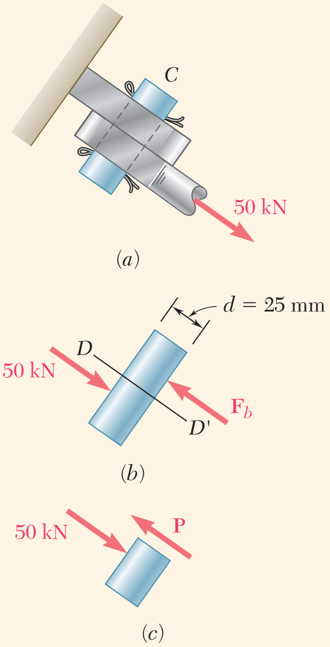


Fig. 1.23 Diagrams of the single shear pin at *C*.

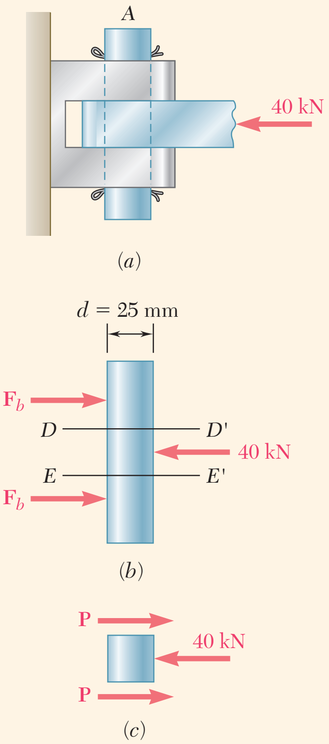


Fig. 1.24 Free-body diagrams of the double shear pin at *A*.

The corresponding average value of the stress is

$$(\sigma_{BC})_{\text{end}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{300 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 167.0 \text{ MPa}$$

Note that this is an *average value*. Close to the hole the stress will actually reach a much larger value, as you will see in Sec. 2.11. Under an increasing load, the rod will fail near one of the holes rather than in its cylindrical portion; its design could be improved by increasing the width or the thickness of the flat ends of the rod.

Recall from Sec. 1.1A that the force in boom *AB* is $F_{AB} = 40$ kN (compression). Since the area of the boom's rectangular cross section is $A = 30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, the average value of the normal stress in the main part of the rod between pins *A* and *B* is

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{1.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -26.7 \times 10^6 \text{ Pa} = -26.7 \text{ MPa}$$

Note that the sections of minimum area at *A* and *B* are not under stress, since the boom is in compression, and therefore *pushes* on the pins (instead of *pulling* on the pins as rod *BC* does).

Shearing Stress in Various Connections. To determine the shearing stress in a connection such as a bolt, pin, or rivet, you first show the forces exerted by the various members it connects. In the case of pin *C* (Fig. 1.23*a*), draw Fig. 1.23*b* to show the 50-kN force exerted by member *BC* on the pin, and the equal and opposite force exerted by the bracket. Drawing the diagram of the portion of the pin located below the plane *DD'* where shearing stresses occur (Fig. 1.23*c*), notice that the shear in that plane is $P = 50$ kN. Since the cross-sectional area of the pin is

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{25 \text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(12.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

the average value of the shearing stress in the pin at *C* is

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102.0 \text{ MPa}$$

Note that pin *A* (Fig. 1.24) is in double shear. Drawing the free-body diagrams of the pin and the portion of pin located between the planes *DD'* and *EE'* where shearing stresses occur, we see that $P = 20$ kN and

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40.7 \text{ MPa}$$

Pin *B* (Fig. 1.25*a*) can be divided into five portions that are acted upon by forces exerted by the boom, rod, and bracket. Portions *DE* (Fig. 1.25*b*) and *DG* (Fig. 1.25*c*) show that the shear in section *E* is $P_E = 15$ kN and the shear in section *G* is $P_G = 25$ kN. Since the loading

(continued)

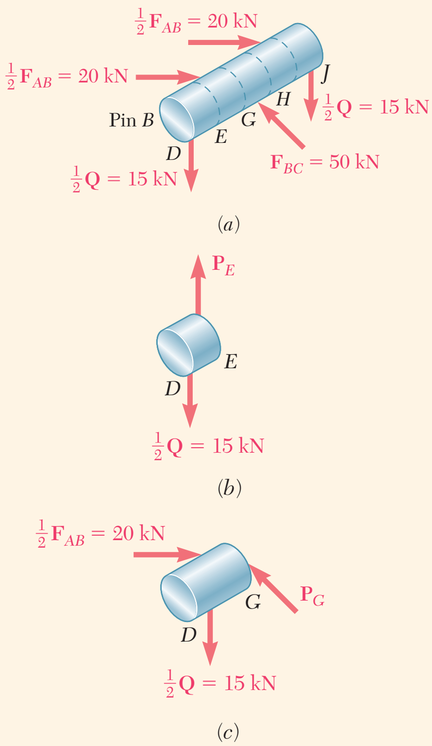


Fig. 1.25 Free-body diagrams for various sections at pin *B*.

of the pin is symmetric, the maximum value of the shear in pin B is $P_G = 25$ kN, and the largest the shearing stresses occur in sections G and H, where

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P_G}{A} = \frac{25\text{ kN}}{491 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 50.9\text{ MPa}$$

Bearing Stresses. Use Eq. (1.11) to determine the nominal bearing stress at A in member AB. From Fig. 1.22, $t = 30$ mm and $d = 25$ mm. Recalling that $P = F_{AB} = 40$ kN, we have

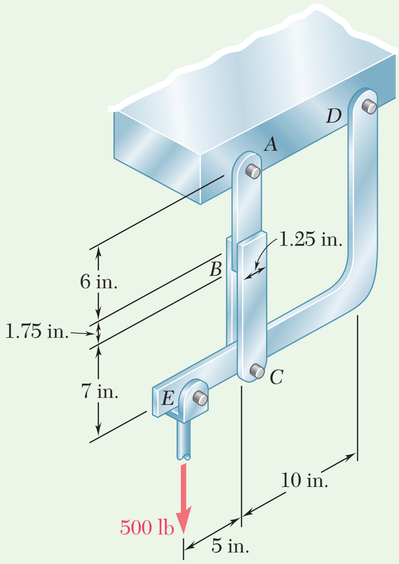
$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40\text{ kN}}{(30\text{ mm})(25\text{ mm})} = 53.3\text{ MPa}$$

To obtain the bearing stress in the bracket at A, use $t = 2(25\text{ mm}) = 50$ mm and $d = 25$ mm:

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40\text{ kN}}{(50\text{ mm})(25\text{ mm})} = 32.0\text{ MPa}$$

The bearing stresses at B in member AB, at B and C in member BC, and in the bracket at C are found in a similar way.

Sample Problem 1.1



In the hanger shown, the upper portion of link ABC is $\frac{3}{8}$ in. thick and the lower portions are each $\frac{1}{4}$ in. thick. Epoxy resin is used to bond the upper and lower portions together at B. The pin at A has a $\frac{3}{8}$-in. diameter, while a $\frac{1}{4}$-in.-diameter pin is used at C. Determine (*a*) the shearing stress in pin A, (*b*) the shearing stress in pin C, (*c*) the largest normal stress in link ABC, (*d*) the average shearing stress on the bonded surfaces at B, and (*e*) the bearing stress in the link at C.

STRATEGY: Consider the free body of the hanger to determine the internal force for member AB and then proceed to determine the shearing and bearing forces applicable to the pins. These forces can then be used to determine the stresses.

MODELING: Draw the free-body diagram of the hanger to determine the support reactions (Fig. 1). Then draw the diagrams of the various components of interest showing the forces needed to determine the desired stresses (Figs. 2-6).

ANALYSIS:

Free Body: Entire Hanger. Since the link ABC is a two-force member (Fig. 1), the reaction at A is vertical; the reaction at D is represented by its components $\mathbf{D}_x$ and $\mathbf{D}_y$. Thus,

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad (500 \text{ lb})(15 \text{ in.}) - F_{AC}(10 \text{ in.}) = 0$$

$$F_{AC} = +750 \text{ lb} \qquad F_{AC} = 750 \text{ lb} \quad \textit{tension}$$

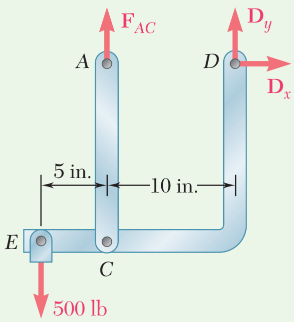


Fig. 1 Free-body diagram of hanger.

a. Shearing Stress in Pin A. Since this $\frac{3}{8}$-in.-diameter pin is in single shear (Fig. 2), write

$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{750 \text{ lb}}{\frac{1}{4}\pi(0.375 \text{ in.})^2} \qquad \tau_A = 6790 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

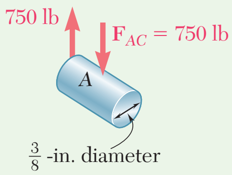


Fig. 2 Pin A.

b. Shearing Stress in Pin C. Since this $\frac{1}{4}$-in.-diameter pin is in double shear (Fig. 3), write

$$\tau_C = \frac{\frac{1}{2}F_{AC}}{A} = \frac{375 \text{ lb}}{\frac{1}{4}\pi(0.25 \text{ in.})^2} \qquad \tau_C = 7640 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

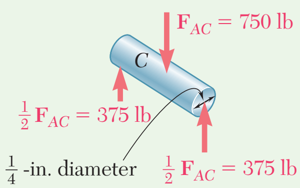


Fig. 3 Pin C.

(continued)

c. Largest Normal Stress in Link *ABC*. The largest stress is found where the area is smallest; this occurs at the cross section at A (Fig. 4) where the $\frac{3}{8}$-in. hole is located. We have

$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A_{\text{net}}} = \frac{750 \text{ lb}}{(\frac{3}{8}\text{ in.})(1.25\text{ in.} - 0.375\text{ in.})} = \frac{750\text{ lb}}{0.328\text{ in}^2} \qquad \sigma_A = 2290\text{ psi}$$

d. Average Shearing Stress at *B*. We note that bonding exists on both sides of the upper portion of the link (Fig. 5) and that the shear force on each side is $F_1 = (750\text{ lb})/2 = 375$ lb. The average shearing stress on each surface is

$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{375\text{ lb}}{(1.25\text{ in.})(1.75\text{ in.})} \qquad \tau_B = 171.4\text{ psi}$$

e. Bearing Stress in Link at *C*. For each portion of the link (Fig. 6), $F_1 = 375$ lb, and the nominal bearing area is (0.25 in.)(0.25 in.) $= 0.0625\text{ in}^2$.

$$\sigma_b = \frac{F_1}{A} = \frac{375\text{ lb}}{0.0625\text{ in}^2} \qquad \sigma_b = 6000\text{ psi}$$

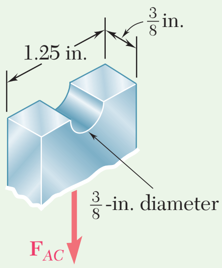


Fig. 4 Link *ABC* section at *A*.

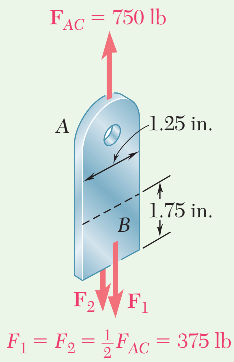


Fig. 5 Element *AB*.

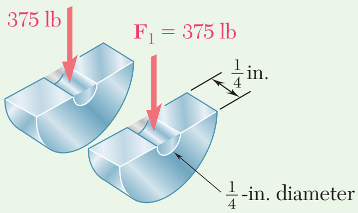
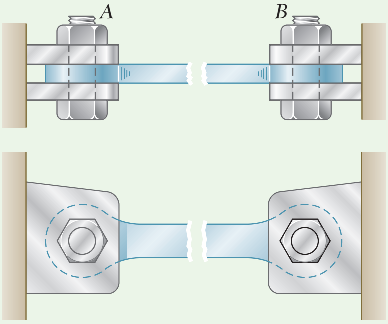


Fig. 6 Link *ABC* section at *C*.

REFLECT and THINK: This sample problem demonstrates the need to draw free-body diagrams of the separate components, carefully considering the behavior in each one. As an example, based on visual inspection of the hanger it is apparent that member AC should be in tension for the given load, and the analysis confirms this. Had a compression result been obtained instead, a thorough reexamination of the analysis would have been required.



Sample Problem 1.2

The steel tie bar shown is to be designed to carry a tension force of magnitude $P = 120$ kN when bolted between double brackets at A and B. The bar will be fabricated from 20-mm-thick plate stock. For the grade of steel to be used, the maximum allowable stresses are $\sigma = 175$ MPa, $\tau = 100$ MPa, and $\sigma_b = 350$ MPa. Design the tie bar by determining the required values of (a) the diameter d of the bolt, (b) the dimension b at each end of the bar, and (c) the dimension h of the bar.

STRATEGY: Use free-body diagrams to determine the forces needed to obtain the stresses in terms of the design tension force. Setting these stresses equal to the allowable stresses provides for the determination of the required dimensions.

MODELING and ANALYSIS:

a. Diameter of the Bolt. Since the bolt is in double shear (Fig. 1), $F_1 = \frac{1}{2}P = 60$ kN.

$$\tau = \frac{F_1}{A} = \frac{60\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi\, d^2} \qquad 100\text{ MPa} = \frac{60\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi\, d^2} \qquad d = 27.6\text{ mm}$$

Use $\qquad d = 28$ mm ◀

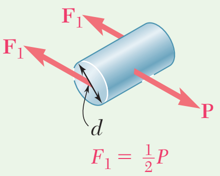


Fig. 1 Sectioned bolt.

At this point, check the bearing stress between the 20-mm-thick plate (Fig. 2) and the 28-mm-diameter bolt.

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{120\text{ kN}}{(0.020\text{ m})(0.028\text{ m})} = 214\text{ MPa} < 350\text{ MPa} \qquad \text{OK}$$

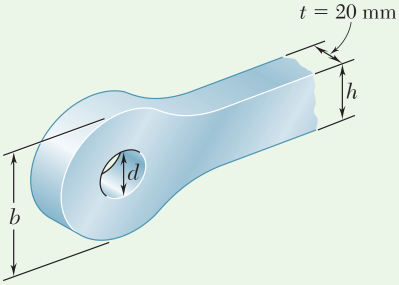


Fig. 2 Tie bar geometry.

b. Dimension *b* at Each End of the Bar. We consider one of the end portions of the bar in Fig. 3. Recalling that the thickness of the steel plate is $t = 20$ mm and that the average tensile stress must not exceed 175 MPa, write

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}P}{ta} \qquad 175\text{ MPa} = \frac{60\text{ kN}}{(0.02\text{ m})a} \qquad a = 17.14\text{ mm}$$

$$b = d + 2a = 28\text{ mm} + 2(17.14\text{ mm}) \qquad b = 62.3\text{ mm} ◀$$

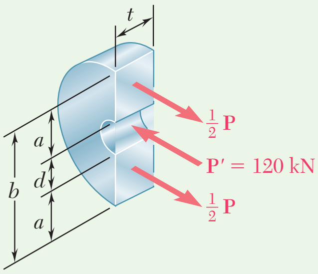


Fig. 3 End section of tie bar.

c. Dimension *h* of the Bar. We consider a section in the central portion of the bar (Fig. 4). Recalling that the thickness of the steel plate is $t = 20$ mm, we have

$$\sigma = \frac{P}{th} \qquad 175\text{ MPa} = \frac{120\text{ kN}}{(0.020\text{ m})h} \qquad h = 34.3\text{ mm}$$

Use $\qquad h = 35$ mm ◀

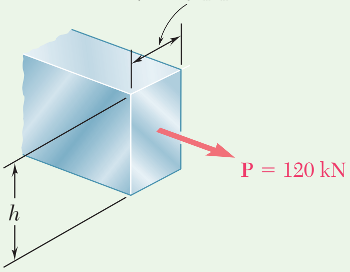
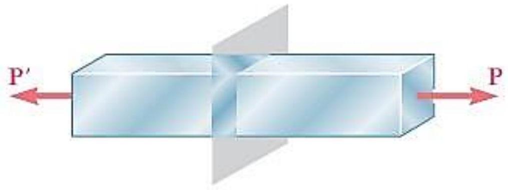


Fig. 4 Mid-body section of tie bar.

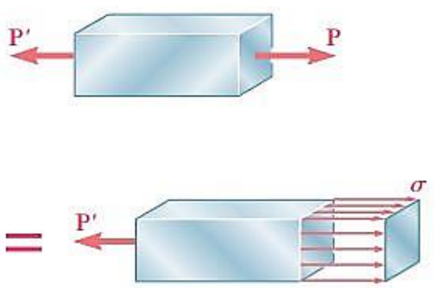
REFLECT and THINK: We sized d based on bolt shear, and then checked bearing on the tie bar. Had the maximum allowable bearing stress been exceeded, we would have had to recalculate d based on the bearing criterion.

1.3) تنش در یک صفحه مورب از جسم تحت بارگذاری محوری

stress on an oblique plane under axial loading

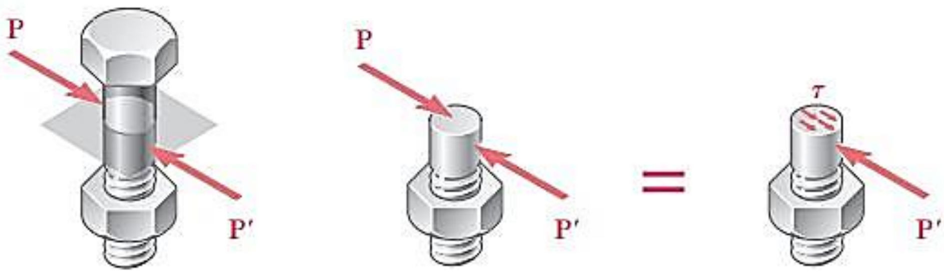


(a)



در بخش‌های قبل نشان داده شد که نیروهای محوری وارد شده بر یک عضو دو نیرویی، سبب ایجاد تنش‌های نرمال در آن عضو می‌شود.

در حالیکه نیروهای عرضی وارد بر پین‌ها، پیچ‌ها و پرچ‌ها، سبب ایجاد تنش برشی در اتصالات می‌شوند.

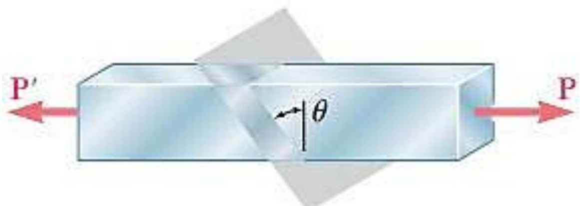


آنچه که بیان شد نشان می‌دهد که بین نیروهای محوری و تنش‌های نرمال، و بین نیروهای عرضی و تنش برشی، رابطه‌ای وجود دارد، چرا که معیار تعیین نوع تنش، صفحه‌ای بوده است که بر محور عضو یا اتصال عمود است.

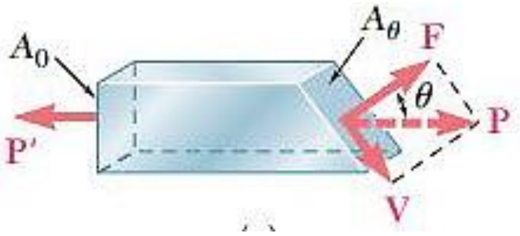
اما در ادامه این بخش نشان داده خواهد شد که نیروهای محوری و نیروهای عرضی در صفحاتی که عمود بر محور عضو نیستند می‌توانند همزمان تنش‌های نرمال و برشی ایجاد نمایند.

بدین منظور، عضو دو نیرویی نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید.

1) صفحه‌ای را در نظر بگیرید که با صفحه عمود بر محور عضو زاویه θ ایجاد نماید.



2) براساس شرایط تعادل، نیرو در صفحه مورب نیز باید P باشد.



3) نیروی P به نیروهایی که بر صفحه مورب عمود باشند و به نیروهایی که مماس بر صفحه مورب باشند. بنابراین آن را به دو مولفه که عمود و مماس بر صفحه مورب باشند تجزیه می‌کنیم

$$F = P\cdot\cos(\theta) \qquad V = P\sin(\theta) \qquad \text{I}$$

4) اکنون تنش‌های متناظر نرمال و برشی با تقسیم نیروهای F و V بر مساحت صفحه مورب (A_θ) بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{A_\theta} \\ \tau = \dfrac{V}{A_\theta} \end{cases} \qquad \text{II}$$

که A_θ عبارت است از:

$$A_0 = A_\theta \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{A_\theta = \frac{A_0}{\cos(\theta)}} \qquad \text{III}$$

5) اکنون با جایگذاری روابط I و III در رابطه II، تنش‌های نرمال و برشی در صفحه مورب بدست می‌آیند:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P\cos(\theta)}{A_0/\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2(\theta)} \qquad \text{IV}$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P\sin(\theta)}{A_0/\cos(\theta)} = \frac{P}{A_0}\cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$= \frac{P}{A_0}\,\frac{2\cos(\theta)\sin(\theta)}{2} = \boxed{\frac{P}{2A_0}\sin(2\theta) = \tau} \qquad \text{V}$$

از روی روابط IV و V می‌توان تنش‌های نرمال و برشی در هر صفحه دلخواه که دارای زاویه θ با صفحه عمود بر محور عضو می‌باشد را تعیین نمود.

هم چنین می‌توان به این سوال پاسخ داد که بیشترین مقدار تنش نرمال و برشی به ازای چه مقدار زاویه θ اتفاق می‌افتد؟!

بدین منظور داریم :

• محاسبه محل و مقدار ماکزیمم تنش نرمال

می دانیم $-1 \le \cos(\theta) \le +1 \Rightarrow 0 \le \cos^2(\theta) \le +1 \Rightarrow Max\left(\cos^2(\theta)\right) = 1 \Rightarrow \boxed{\theta_{max} = 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{max} = \dfrac{P}{A_0}\cos^2(0) = \dfrac{P}{A_0} \qquad \text{VI} \\ \tau' = \dfrac{P}{2A_0}\sin(2\times 0) = 0 \end{cases}$$

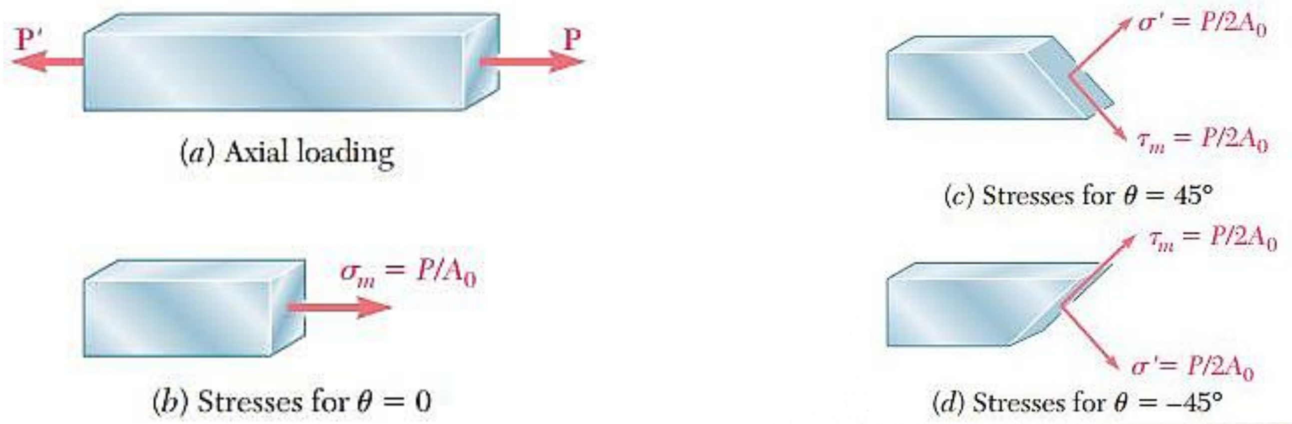
رابطه VI نشان می دهد که بیشترین تنش نرمال در عضوی که تحت نیروی محوری قرار دارد در صفحه عمود بر محور عضو ایجاد می شود. از طرفی، در این صفحه، تنش برشی صفر می باشد.

• محاسبه محل و مقدار ماکزیمم تنش برشی

می دانیم $-1 \le \sin(2\theta) \le 1 \Rightarrow Max\left(\sin(2\theta)\right) = +1 \Rightarrow 2\theta_{max} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta_{max} = \frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_{max} = \dfrac{P}{2A_0}\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{P}{2A_0} \qquad \text{VII} \\ \sigma' = \dfrac{P}{A_0}\cos^2(45) = \dfrac{P}{2A_0} \end{cases}$$

رابطه VII نشان می دهد که بیشترین تنش برشی در عضوی که تحت نیروی محوری قرار دارد در صفحه ای ایجاد می شود که با صفحه عمود بر محور عضو، زاویه $45°$ داشته باشد. از طرفی در این صفحه، تنش نرمال ظاهر می شود که مقدار آن برابر ماکزیمم تنش برشی می باشد.



(a) Axial loading

(b) Stresses for $\theta = 0$

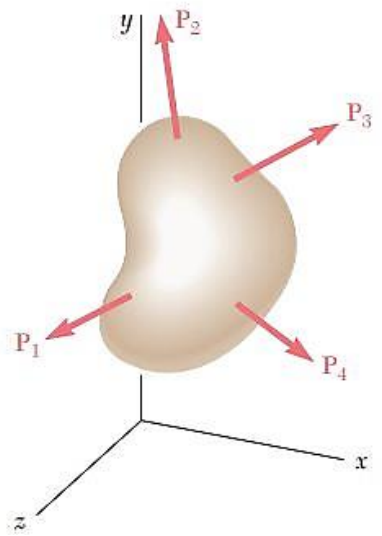
(c) Stresses for $\theta = 45°$

(d) Stresses for $\theta = -45°$

1.4) تنش تحت شرایط بارگذاری کلی؛ مولفه‌های تنش

stress under general loading conditions; components of stress

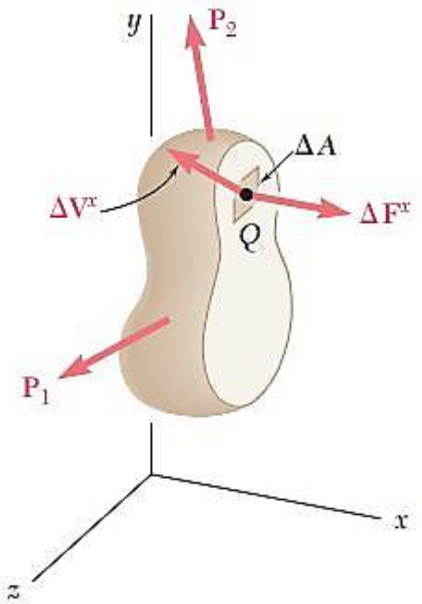
آنچه که تاکنون توضیح داده شد محدود به عضوهایی بود که تحت بارگذاری محوری یا عرضی بودند. اما در واقعیت، بیشتر عضوهای سازه‌ها یا ماشین‌ها، تحت شرایط بارگذاری متنوعی می‌باشند (شکل)



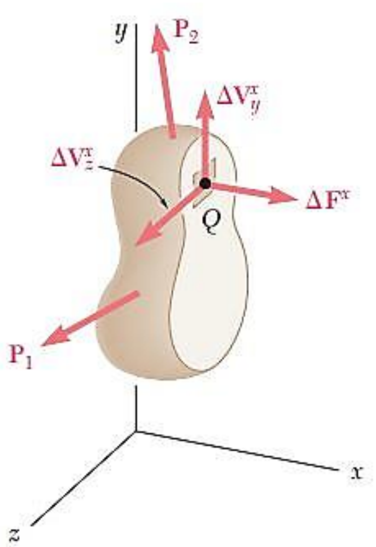
برای تعیین تنش در یک چنین شرایط بارگذاری، بصورت زیر عمل می‌کنیم.

به عنوان مثال برای تعیین تنش‌ها در نقطه Q واقع بر صفحه‌ای عمود بر محور x داریم:

1) صفحه‌ای عمود بر محور x از عضو عبور می‌دهیم و برآیند نیروهای نرمال و مماس را محاسبه می‌کنیم $(\Delta V^x, \Delta F^x)$ (شکل)



2) برآیند نیروهای مماس بر صفحه مورد نظر را در راستاهای y و z تجزیه می‌کنیم $(\Delta V_y^x, \Delta V_z^x)$ (شکل)



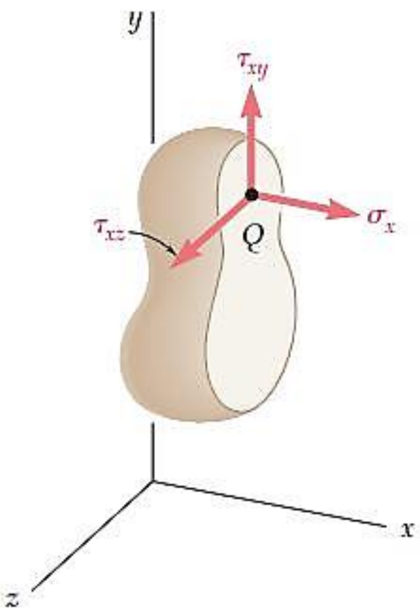
3) مولفه‌های تنش را در نقطه Q با استفاده از روابط زیر بدست می‌آوریم: (شکل)

$$\begin{cases} \sigma_x = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta F^x}{\Delta A} \\ \tau_{xy} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \\ \tau_{xz} = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta V_z^x}{\Delta A} \end{cases}$$

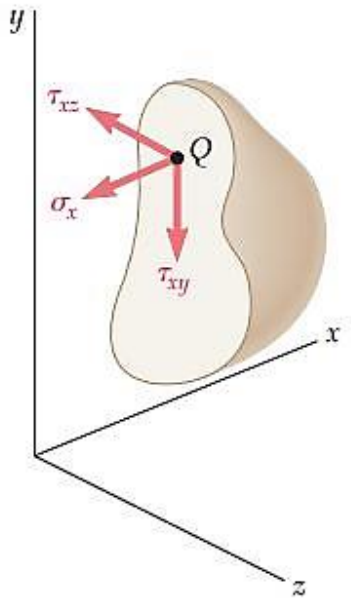
σ_x مولفه تنش در صفحه‌ای است که عمود بر محور $\underline{x}$ است و در جهت محور $\underline{x}$ می‌باشد.

τ_{xy} مولفه تنش در صفحه‌ای است که عمود بر محور $\underline{x}$ است و در جهت محور $\underline{y}$ می‌باشد.

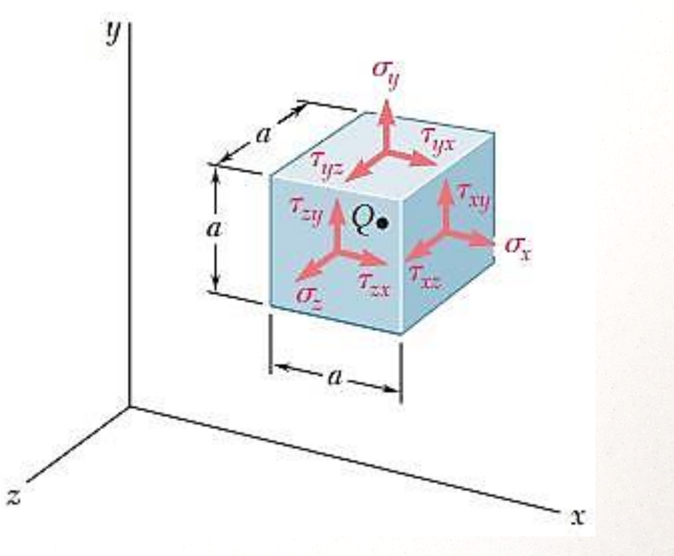
τ_{xz} مولفه تنش در صفحه‌ای است که عمود بر محور $\underline{x}$ است و در جهت محور $\underline{z}$ می‌باشد.



4) مشابه آنچه انجام شد برای صفحه دیگری که عمود بر محور منفی $\underline{x}$ است انجام می‌شود و مولفه‌های تنش بدست می‌آید. (شکل)



اگر اقدامات بندهای $\underline{1}$ الی $\underline{4}$ برای صفحاتی که عمود بر محورهای y و $-y$ ، و محورهای z و $-z$ می‌باشند انجام شود مولفه‌های تنش مانند آنچه در شکل زیر نشان داده شده است بدست می‌آید:

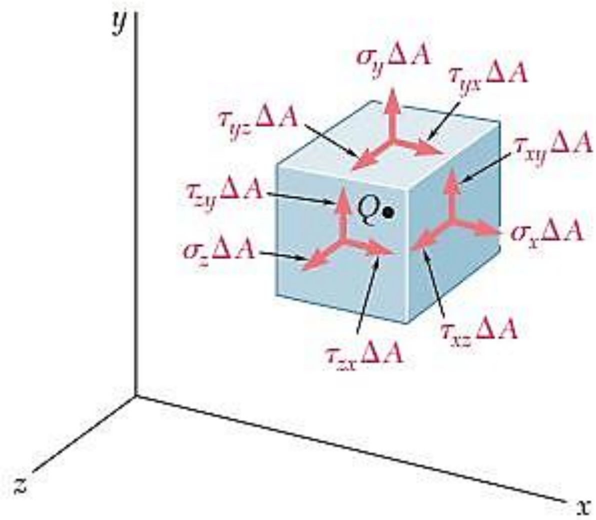


شکل ــــ نشان می‌دهد که برای یک عضو تحت بارگذاری کلی، ماکزیمم $\underline{9}$ مولفه‌ی تنش در جسم ایجاد می‌شود. برای نمایش مولفه‌های تنش در یک عضو، از تانسور تنش استفاده می‌شود:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

• یک نکته در مورد مولفه‌های تنش برشی



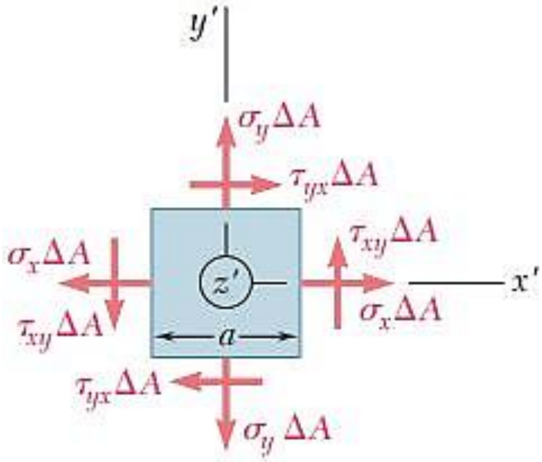
در علم مقاومت مصالح، عضوهای تحت بررسی باید در تعادل استاتیکی باشند. بنابراین برای المانی از عضو که تحت تنش کلی است برآیند نیروها طبق شکل روبرو می‌باشد.

المان فوق باید تحت تعادل استاتیکی باشد یعنی

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 & \text{(I)} \\ \Sigma M_{x'} = 0 \quad \Sigma M_{y'} = 0 \quad \Sigma M_{z'} = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

که x' ، y' و z' محورهایی روی المان بوده که به موازات محورهای x و y و z می‌باشند.

روابط I صادق می‌باشد و نیاز به بررسی ندارند. اما در مورد روابط II نیاز به بررسی بیشتر می‌باشد. برای درک بهتر شرایط تعادل در المان، تصویر المان را از جهت محور z' در نظر بگیرید. برای این شرایط داریم:



$$\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow (\tau_{xy} \Delta A) a - (\tau_{yx} \Delta A) a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} \quad \text{(III)}$$

رابطه III بیان می‌کند که مولفه y تنش برشی بر روی صفحه عمود بر محور x برابر با مولفه x تنش برشی بر روی صفحه عمود بر محور y می‌باشد.

به طریق مشابه، از روابط $\Sigma M_{x'} = 0$ و $\Sigma M_{y'} = 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

روابط III و IV نشان می‌دهند که

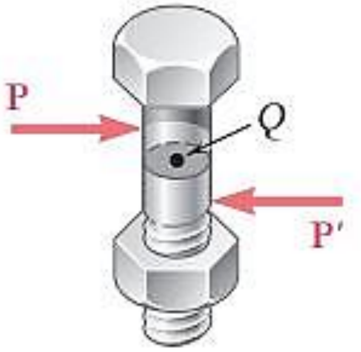
1) برای تعیین تنش در نقطه Q از عضو تنها 6 مولفه تنش نیاز می‌باشد که عبارتند از σ_x ، σ_y ، σ_z ، τ_{xy} ، τ_{xz} و τ_{yz}.

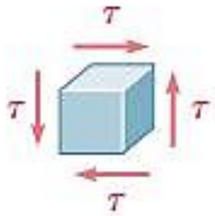
یا به صورت ماتریسی داریم:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

2) در یک نقطه مشخص، تنش ~~...~~ برشی نمی‌تواند تنها در یک صفحه ایجاد شود بلکه باید مولفه تنش برشی برابری بر روی صفحه دیگری که عمود بر صفحه اول می‌باشد ایجاد شود. به عنوان مثال، المان دلخواهی از پیچ را که تحت نیروی عرضی است در نظر بگیرید.

برای اینکه المان تحت تعادل باشد باید تنش‌های برشی در صفحات عمود بر هم ظاهر شود.



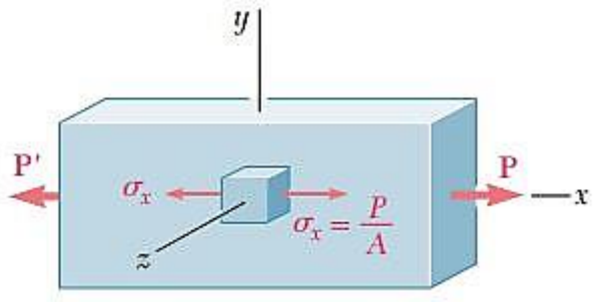


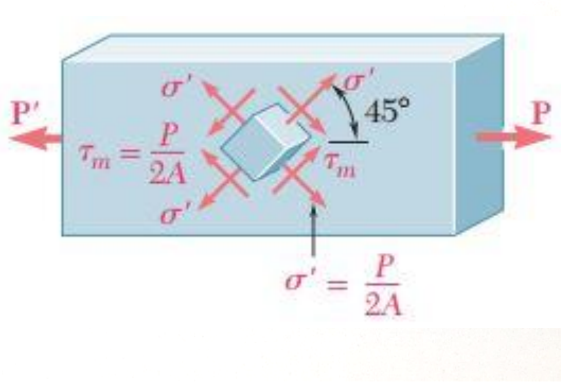
• نکته دوم

باید به این موضوع دقت داشت که یک بارگذاری می‌تواند شرایط تنش متفاوتی در جسم ایجاد کند. به عنوان مثال، یک عضو که تحت نیروی محوری است را در نظر بگیرید. برای المانی از عضو که سطوح آن به موازات یا عمود بر جهت نیرو است، بر سطح عمود بر راستای نیرو، فقط تنش نرمال ایجاد می‌شود و در سطوح دیگر تنش ایجاد نمی‌شود. (شکل)

اما برای همین عضو، المانی را در نظر بگیرید که صفحات آن با راستای نیرو، زاویه $45°$ داشته باشد. قبلا نشان داده شد که در یک چنین صفحاتی، هم تنش نرمال و هم تنش برشی ایجاد می‌شود که با یکدیگر برابرند (شکل)

بنابراین تصمیم‌گیری در مورد اینکه وضعیت تنش در یک عضو تحت بارگذاری مشخص چگونه است بستگی به صفحاتی دارد که برای تحلیل انتخاب شده است.





1.5) Design considerations

1.5) ملاحظات طراحی

1.5A) تعیین مقاومت نهایی یک ماده

1.5A) Determination of the ultimate strength of a material

یک مسئله بسیار مهم که طراحان مدنظر دارند این است که یک ماده، تحت یک بار مشخص، چه رفتاری خواهد داشت؟ برای پاسخ به این سوال، در آزمایشگاه، تعدادی آزمایش مشخص بر روی نمونه‌های تهیه شده از ماده مورد نظر انجام می‌گیرد. برای مثال، برای شناخت رفتار نمونه‌هایی از جنس فولاد که تحت بارگذاری محوری قرار می‌گیرند، تعدادی نمونه آزمایشگاهی تهیه می‌شود. سپس این نمونه‌ها در یک دستگاه آزمایشگاهی قرار می‌گیرند. به تدریج نیروی وارد بر نمونه افزایش می‌یابد و در بازه‌های زمانی مختلف، تغییرات در ابعاد مانند طول و قطر ثبت می‌شود. همچنین، بیشترین نیرویی که می‌توان به نمونه اعمال کرد که تحت آن، نمونه بشکند یا تغییر شکل بزرگی در آن ایجاد شود، ثبت می‌شود.

این بزرگترین نیروی ثبت شده را نیروی نهایی می‌نامند و با P_U نمایش می‌دهند. از طرفی با تقسیم P_U بر سطح مقطع اولیه جسم (A)، مقدار تنش نرمال نهایی بدست می‌آید که به آن مقاومت نهایی هم گفته می‌شود:

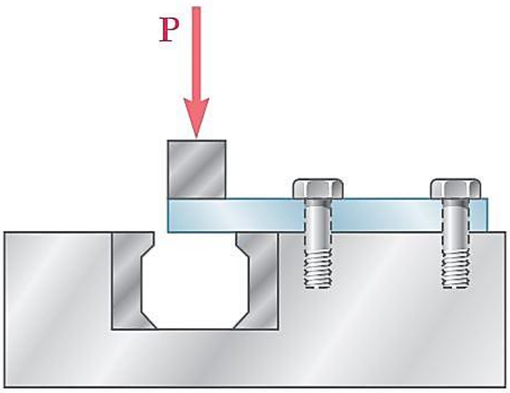
$$\sigma_U = \frac{P_U}{A} \qquad \text{(I)}$$

به طریق مشابه، برای تعیین تنش برشی نهایی یا مقاومت نهایی برشی نیز چندین روش وجود دارد. مرسوم‌ترین روش، پیچش یک لوله با مقطع دایره‌ای می‌باشد که در فصل ۳ توضیح داده خواهد شد. یک روش دیگر که دقت کم‌تری نسبت به روش قبلی دارد این است که یک نمونه با مقطع مستطیلی یا دایره‌ای را در دستگاه آزمایش قرار می‌دهند و به تدریج نیرو افزایش می‌یابد تا جایی که P_U بدست می‌آید.

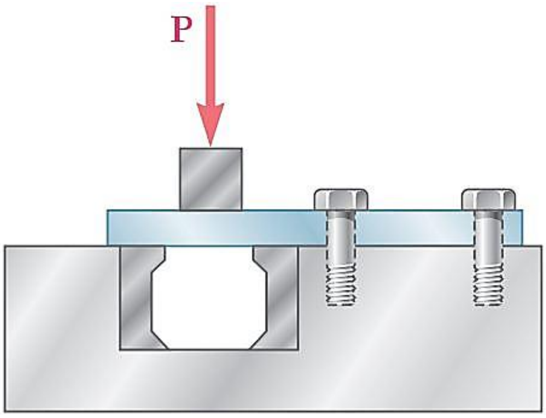
در این حالت با تقسیم P_U بر سطح مقطع جسم، تنش برشی نهایی یا مقاومت نهایی برشی بدست می‌آید:

$$\tau_U = \frac{P_U}{A} \qquad \text{(II)}$$

اگر نمونه بصورت شکل 1 در دستگاه آزمایش قرار بگیرد مساحت A در رابطه II ، همان مساحت سطح مقطع نمونه می باشد و اگر نمونه بصورت شکل 2 در دستگاه آزمایش قرار بگیرد ساحت A در رابطه II ، دو برابر مساحت سطح مقطع نمونه می باشد.



(شکل ۱)



(شکل ۲)

1.5B) بار مجاز و تنش مجاز: ضریب اطمینان

1.5B) Allowable load and allowable stress: Factor of safety

ماکزیمم باری که یک عضو سازه یا یک عضو ماشین تحت شرایط نرمال می تواند تحمل کند به طور قابل ملاحظه ای کوچکتر از بار نهایی است. به این بار کوچکتر، بار مجاز یا حتی بار طراحی یا بار کاری نیز گفته می شود. بنابراین وقتی که بار مجاز بر عضو سازه یا ماشین اعمال می شود کسری از ظرفیت بار نهایی سازه استفاده شده است. بخش باقیمانده از ظرفیت بار نهایی سازه، به نوعی برای اطمینان از عملکرد صحیح آن ذخیره می شود.

به نسبت بار نهایی بر بار مجاز، ضریب اطمینان گفته می شود که عبارت است از:

$$F.S. = \frac{\text{بار نهایی}}{\text{بار مجاز}} \qquad \text{I}$$

تعریف متفاوتی از ضریب اطمینان برای تنش وجود دارد که عبارت است از:

$$F.S. = \frac{\text{تنش نهایی}}{\text{تنش مجاز}} \qquad \text{II}$$

این دو تعریف (روابط I و II) اگر رابطه بین بار و تنش یک رابطه خطی باشد، یکسان خواهند بود.

1.5C) Factor of safety selection

1.5C) انتخاب ضریب اطمینان

انتخاب ضریب اطمینان، یکی از وظایف اصلی مهندسین می باشد. اگر ضریب اطمینان کوچک انتخاب شود احتمال شکست بصورت غیر قابل قبولی بالا خواهد بود. از طرفی اگر ضریب اطمینان بزرگ انتخاب شود، یک طراحی غیر اقتصادی یا غیر عملیاتی خواهیم داشت. انتخاب ضریب اطمینان برای استفاده در یک طراحی، نیاز به داوری های مهندسی دارد که ملاحظات زیادی را در بر می گیرد. به عنوان مثال:

1) تغییراتی که ممکن است در خواص یک عضو ایجاد شود. به عنوان مثال تغییر در ساختار، تفاوت و حتی در ابعاد عضو، ناشی از فرآیند ساخت، ذخیره سازی، نقل و انتقال.

2) پدیده خستگی (Fatigue phenomenon): در اثر این پدیده، تنش نهایی عضو به شدت کاهش می یابد.

3) تفاوت در نوع بارهایی که بر اساس آنها طراحی انجام گرفته است یا بارهایی که در حین کار بر عضو وارد می شود.

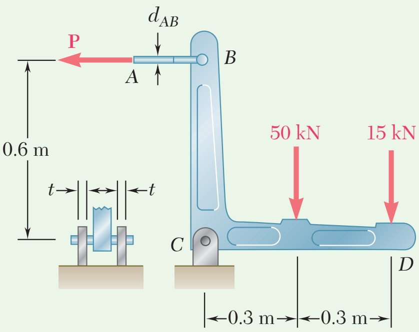
4) نوع خرابی یا از کار افتادگی عضو. به عنوان مثال، عضوهای ساخته شده از مواد ترد، بصورت ناگهانی تخریب می شوند اما تخریب مواد نرم، بصورت تدریجی و همراه با پدیده تسلیم (Yeilding) است. همچنین شکست ناشی از کمانش یا پایداری که بستگی به نرمی یا تردی ماده ندارد و در هر صورت، بصورت ناگهانی اتفاق می افتد.

5) عدم قطعیت های ناشی از روش های تحلیل. هر روش تحلیلی، همراه با فرضیاتی است و نمی تواند ۱۰۰٪ تمام جوانب طراحی را در نظر بگیرد.

6) عواملی که سبب می شوند در گذر زمان، کیفیت عضو پایین بیاید. به عنوان مثال، عواملی مانند خوردگی یا پوسیدگی به دلیل ضعف در نگهداری یا عوامل طبیعی ناخواسته

7) در نظر گرفتن ضرایب اطمینان متفاوت در یک سازه. به عنوان مثال، عضوهایی که اهمیت پایین تری دارند ضریب اطمینان کوچکتری برای آنها در نظر گرفته شود نسبت به عضوهایی که اهمیت بالاتری دارند.

علاوه بر موارد ذکر شده، یک عامل مهم دیگر در انتخاب ضریب اطمینان این است که آیا سازه یا ماشین با جان انسان سروکار دارد یا خیر؟ به عنوان مثال اگر بالابری برای جابجایی انسان استفاده می‌شود ضریب اطمینان متفاوتی خواهد داشت با بالابری که برای جابجایی اشیاء استفاده می‌شود.
تا به حال ذکرات برای بسیاری از کاربردها، ضرایب اطمینان تعیین و گزارش شده است.



Sample Problem 1.3

Two loads are applied to the bracket *BCD* as shown. (*a*) Knowing that the control rod *AB* is to be made of a steel having an ultimate normal stress of 600 MPa, determine the diameter of the rod for which the factor of safety with respect to failure will be 3.3. (*b*) The pin at *C* is to be made of a steel having an ultimate shearing stress of 350 MPa. Determine the diameter of the pin *C* for which the factor of safety with respect to shear will also be 3.3. (*c*) Determine the required thickness of the bracket supports at *C*, knowing that the allowable bearing stress of the steel used is 300 MPa.

STRATEGY: Consider the free body of the bracket to determine the force **P** and the reaction at *C*. The resulting forces are then used with the allowable stresses, determined from the factor of safety, to obtain the required dimensions.

MODELING: Draw the free-body diagram of the hanger (Fig. 1), and the pin at *C* (Fig. 2).

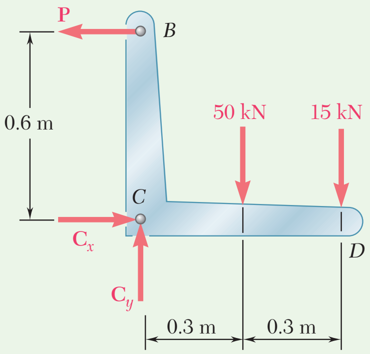


Fig. 1 Free-body diagram of bracket.

ANALYSIS:

Free Body: Entire Bracket. Using Fig. 1, the reaction at *C* is represented by its components $\mathbf{C}_x$ and $\mathbf{C}_y$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad P(0.6 \text{ m}) - (50 \text{ kN})(0.3 \text{ m}) - (15 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) = 0 \quad P = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0: \quad C_x = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad C_y = 65 \text{ kN} \qquad C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76.3 \text{ kN}$$

a. Control Rod *AB*. Since the factor of safety is 3.3, the allowable stress is

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{600 \text{ MPa}}{3.3} = 181.8 \text{ MPa}$$

For $P = 40$ kN, the cross-sectional area required is

$$A_{\text{req}} = \frac{P}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{40 \text{ kN}}{181.8 \text{ MPa}} = 220 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{req}} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = 220 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \qquad d_{ab} = \mathbf{16.74 \text{ mm}} \quad \blacktriangleleft$$

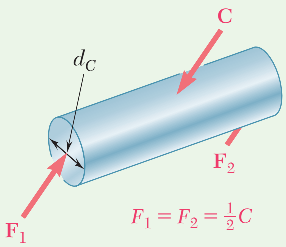


Fig. 2 Free-body diagram of pin at point *C*.

b. Shear in Pin C. For a factor of safety of 3.3, we have

$$\tau_{\text{all}} = \frac{\tau_U}{F.S.} = \frac{350 \text{ MPa}}{3.3} = 106.1 \text{ MPa}$$

(continued)

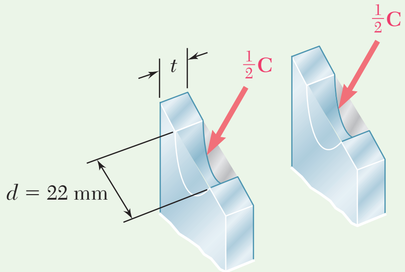


Fig. 3 Bearing loads at bracket support at point *C*.

As shown in Fig. 2 the pin is in double shear. We write

$$A_{\text{req}} = \frac{C/2}{\tau_{\text{all}}} = \frac{(76.3\text{ kN})/2}{106.1\text{ MPa}} = 360\text{ mm}^2$$

$$A_{\text{req}} = \frac{\pi}{4} d_C^2 = 360\text{ mm}^2 \qquad d_C = 21.4\text{ mm} \qquad \textbf{Use: } \boldsymbol{d_C = 22\text{ mm}} \blacktriangleleft$$

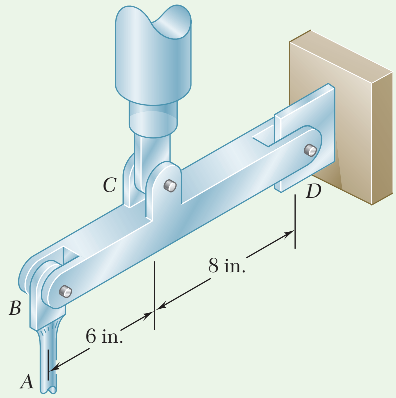
c. Bearing at C. Using $d = 22$ mm, the nominal bearing area of each bracket is $22t$. From Fig. 3 the force carried by each bracket is $C/2$ and the allowable bearing stress is 300 MPa. We write

$$A_{\text{req}} = \frac{C/2}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{(76.3\text{ kN})/2}{300\text{ MPa}} = 127.2\text{ mm}^2$$

Thus, $22t = 127.2$ $\qquad t = 5.78$ mm $\qquad$ **Use: $t = 6$ mm** ◀

REFLECT and THINK: It was appropriate to design the pin *C* first and then its bracket, as the pin design was geometrically dependent upon diameter only, while the bracket design involved both the pin diameter and bracket thickness.

Sample Problem 1.4



The rigid beam *BCD* is attached by bolts to a control rod at *B*, to a hydraulic cylinder at *C*, and to a fixed support at *D*. The diameters of the bolts used are: $d_B = d_D = \frac{3}{8}$ in., $d_C = \frac{1}{2}$ in. Each bolt acts in double shear and is made from a steel for which the ultimate shearing stress is $\tau_U = 40$ ksi. The control rod *AB* has a diameter $d_A = \frac{7}{16}$ in. and is made of a steel for which the ultimate tensile stress is $\sigma_U = 60$ ksi. If the minimum factor of safety is to be 3.0 for the entire unit, determine the largest upward force that may be applied by the hydraulic cylinder at *C*.

STRATEGY: The factor of safety with respect to failure must be 3.0 or more in each of the three bolts and in the control rod. These four independent criteria need to be considered separately.

MODELING: Draw the free-body diagram of the bar (Fig. 1) and the bolts at *B* and *C* (Figs. 2 and 3). Determine the allowable value of the force **C** based on the required design criteria for each part.

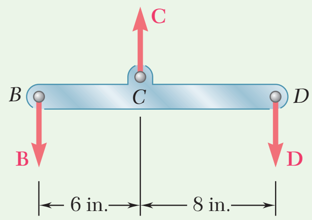


Fig. 1 Free-body diagram of beam *BCD*.

ANALYSIS:

Free Body: Beam *BCD*. Using Fig. 1, first determine the force at *C* in terms of the force at *B* and in terms of the force at *D*.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad B(14\text{ in.}) - C(8\text{ in.}) = 0 \qquad C = 1.750B \qquad \textbf{(1)}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -D(14\text{ in.}) + C(6\text{ in.}) = 0 \qquad C = 2.33D \qquad \textbf{(2)}$$

(continued)

Control Rod. For a factor of safety of 3.0

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{60 \text{ ksi}}{3.0} = 20 \text{ ksi}$$

The allowable force in the control rod is

$$B = \sigma_{\text{all}}(A) = (20 \text{ ksi})\tfrac{1}{4}\pi\left(\tfrac{7}{16} \text{ in.}\right)^2 = 3.01 \text{ kips}$$

Using Eq. (1), the largest permitted value of C is

$$C = 1.750B = 1.750(3.01 \text{ kips}) \qquad C = \mathbf{5.27 \text{ kips}} \blacktriangleleft$$

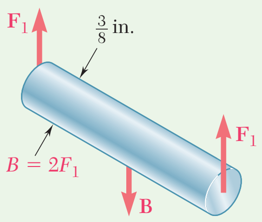


Fig. 2 Free-body diagram of pin at point *B*.

Bolt at *B*. $\tau_{\text{all}} = \tau_U/F.S. = (40 \text{ ksi})/3 = 13.33$ ksi. Since the bolt is in double shear (Fig. 2), the allowable magnitude of the force **B** exerted on the bolt is

$$B = 2F_1 = 2(\tau_{\text{all}} A) = 2(13.33 \text{ ksi})\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\left(\tfrac{3}{8} \text{ in.}\right)^2 = 2.94 \text{ kips}$$

From Eq. (1), $\quad C = 1.750B = 1.750(2.94 \text{ kips}) \qquad C = \mathbf{5.15 \text{ kips}} \blacktriangleleft$

Bolt at *D*. Since this bolt is the same as bolt *B*, the allowable force is $D = B = 2.94$ kips. From Eq. (2)

$$C = 2.33D = 2.33(2.94 \text{ kips}) \qquad C = \mathbf{6.85 \text{ kips}} \blacktriangleleft$$

Bolt at C. We again have $\tau_{\text{all}} = 13.33$ ksi. Using Fig. 3, we write

$$C = 2F_2 = 2(\tau_{\text{all}} A) = 2(13.33 \text{ ksi})\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\left(\tfrac{1}{2} \text{ in.}\right)^2 \qquad C = \mathbf{5.23 \text{ kips}} \blacktriangleleft$$

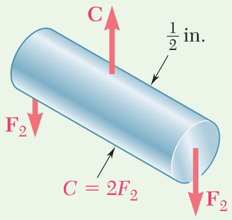


Fig. 3 Free-body diagram of pin at point *C*.

Summary. We have found separately four maximum allowable values of the force *C*. In order to satisfy all these criteria, choose the smallest value. $\qquad C = \mathbf{5.15 \text{ kips}} \blacktriangleleft$

REFLECT and THINK: This example illustrates that all parts must satisfy the appropriate design criteria, and as a result, some parts have more capacity than needed.