جزوه استاتیک

مکانیک علمی است که تاثیر نیروها بر اجسام را بررسی می‌کند و مهمترین نقش را در تحلیل‌های مهندسی دارد. مکانیک به دو قسمت اصلی تقسیم می‌شود: استاتیک و دینامیک. استاتیک تعادل اجسام را تحت تاثیر نیروهای خارجی بررسی می‌کند. دینامیک حرکت اجسام را مورد بحث قرار می‌دهد. در این بخش مباحث مرتبط با استاتیک مطرح خواهد شد.

تعاریف اولیه

نیرو، عاملی است که می‌خواهد جسم را در جهت تاثیر حرکت خود به حرکت درآورد.

ذره، جسمی است که ابعاد آن ناچیز است.

جسم صلب، جسمی است که تغییر شکل آن (تحت تاثیر نیروهای خارجی) ناچیز است.

کمیت‌های اسکالر و کمیت‌های برداری

در مکانیک دو نوع کمیت به کار می‌رود: کمیت‌های اسکالر و کمیت‌های برداری.

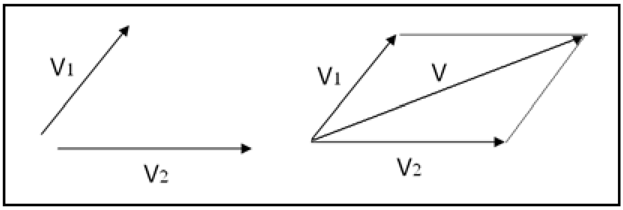
کمیت‌های اسکالر، کمیت‌هایی هستند که فقط با اندازه مشخص می‌شوند. زمان، حجم و چگالی، از جمله کمیت‌های اسکالر هستند.

کمیت‌های برداری، کمیتهایی هستند که جهت و اندازه دارند و از قانون جمع متوازی‌الاضلاع پیروی می‌کنند. سرعت، شتاب و نیرو از جمله کمیتهای برداری هستند.

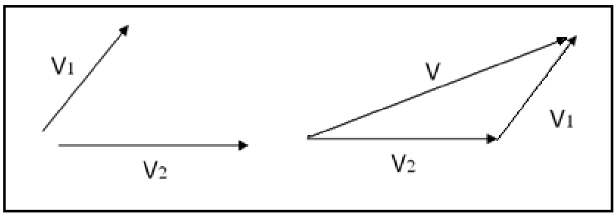
بردارها

همانطور که گفته شد، یک بردار برای اینکه کاملا مشخص شود اندازه و جهت آن هر دو باید مشخص گردد. جهت را نسبت به یک راستای مرجع در نظر می‌گیریم.

برآیند دو بردار: برای بدست آوردن برآیند دو بردار به روش هندسی از روش متوازی‌الاضلاع و روش مثلث استفاده می‌کنیم. روشهای مزبور به ترتیب در شکل‌های (1-1) و (1-2) ارائه شده‌اند.



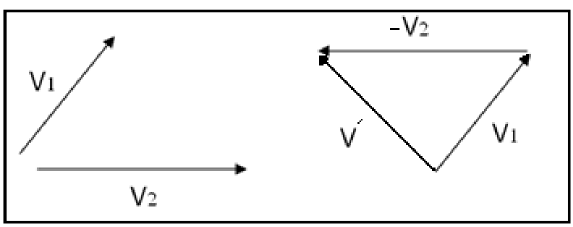
شکل 1-1: روش متوازی‌الاضلاع برای جمع دو بردار



شکل 1-2: روش مثلث برای جمع دو بردار

- در روش متوازی‌الاضلاع، ابتدا هر دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم. سپس از انتهای هر کدام از آنها برداری مساوی و موازی با دیگری رسم می‌کنیم تا همدیگر را در یک نقطه قطع کنند و متوازی‌الاضلاع حاصل شود. قطری از متوازی‌الاضلاع که یک سر آن بر روی ابتدای دو بردار اولیه قرار دارد، حاصلجمع آنهاست.
- در روش مثلث، ابتدا یکی از بردارها را رسم کرده، سپس از انتهای آن برداری موازی و مساوی با بردار دیگر رسم می‌نماییم. برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند، حاصلجمع دو بردار اولیه است.
- جمع بردارها را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$

- برای تعیین تفاضل برداری $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ بردار $\mathbf{V}_1$ را با بردار $-\mathbf{V}_2$ جمع می‌کنیم[1] (شکل 1-3).

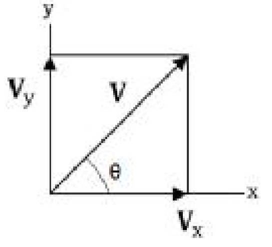


[1] بردار $-V_2$، بردار هم *اندازه* V_2 و در خلاف جهت آن است.

شکل 1-3: تفاضل دو بردار

- تفاضل بردارها را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم: $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$

تجزیه بردارها: در تجزیه بردارها یک بردار را به مولفه‌هایش تجزیه می‌کنیم. مولفه‌های بردار V، بردارهایی هستند که از مجموع آنها بردار V به دست می‌آید. مثلا بردارهای $\mathbf{V}_\mathrm{x}$ و $\mathbf{V}_y$ در شکل 1-4 مولفه‌های بردار V در جهت‌های x و y هستند.



شکل 1-4: تجزیه بردارها

- جهت بردار V نسبت به محور x با زاویه θ مشخص می‌شود: $\theta = tan^{-1}\frac{V_y}{V_x}$
- رابطه بین بزرگی بردار V و اندازه مولفه‌هایش به صورت مقابل است: $V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2}$
- برای بدست آوردن اندازه مولفه‌های بردار V با در دست داشتن اندازه بردار و زاویه آن با محور x از روابط زیر استفاده می‌کنیم: $V_x = V\cos\theta \qquad V_y = V\sin\theta$
- معمولا بردار V را به صورت زیر می‌نویسند که در آن **i** و **j** به ترتیب، بردارهای واحد در جهت محورهای x و y هستند. V_x و V_y نیز به ترتیب، مولفه‌های بردار V در جهت‌های x و y هستند:

$$\boldsymbol{V} = V_x\boldsymbol{i} + V_y\boldsymbol{j}$$

ضرب بردارها

در رابطه با بردارها دو نوع ضرب کاربرد دارد: ضرب اسکالر (ضرب نقطه‌ای یا داخلی) و ضرب برداری (خارجی).

ضرب داخلی: حاصلضرب داخلی دو بردار یک **عدد** یا **اسکالر** است و برای دو بردار a و b که زاویه بین آنها برابر θ است از رابطه مقابل بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a \times b \times \cos\theta$$

ضرب خارجی: حاصلضرب خارجی دو بردار یک **بردار** است و اندازه بردار حاصلضرب برای دو بردار a و b که زاویه بین آنها برابر θ است از رابطه مقابل بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a \times b \times sin\,\theta$$

برای تعیین جهت بردار حاصلضرب از قاعده دست راست استفاده می‌شود. به این معنی که، اگر انگشتان دست راست را در جهت بردار a به صورتی قرار دهیم که با خم کردن آنها در جهت بردار b قرار بگیرند، انگشت شست جهت $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ را نشان می‌دهد.

قوانین نیوتن

نیوتن، اولین شخصی بود که قوانین حرکت یک ذره را بیان کرد. در زیر این قوانین به صورتی که امروزه بیان می‌شوند، ارائه شده است:

قانون اول. اگر مجموع برداری نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد، آن ذره ساکن می‌ماند، یا با سرعت یکنواخت در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند.

قانون دوم. شتاب حرکت یک ذره متحرک، با مجوع برداری نیروهای وارد بر آن ذره متناسب است. برای یک ذره به جرم m، این قانون را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$F = ma$$

در این رابطه، Fمجموع برداری نیروهای وارد بر ذره و a شتاب ذره است.

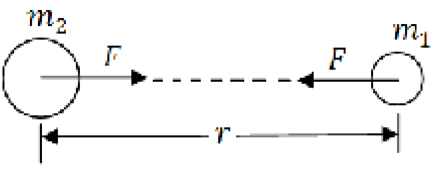
قانون سوم. نیروهای کنش-واکنش بین اجسام بر هم کنشی، در خلاف جهت هم بوده و دارای اندازه و امتداد یکسان هستند.

قانون جاذبه عمومی نیوتن

طبق این قانون هرگاه دو ذره در فاصله معینی از یکدیگر قرار داشته باشند، بر همدیگر نیرویی وارد می‌کنند که متناسب با جرم آنهاست و با فاصله آنها از یکدیگر، نسبت عکس دارد. نیروی مزبور از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad\qquad G = 6.673(10^{-11}) \quad {m^3}/{(kg.s^2)}$$

نیروهای متقابل F، از قانون کنش – واکنش پیروی می‌کنند (اندازه و جهت برابر دارند و خط اثر آنها نیز در امتداد خطالمرکزین ذرات است (شکل 1-5)).



شکل 1-5: قانون جاذبه عمومی نیوتن

نیرو

همانطور که در بخشهای قبلی نیز اشاره شد، نیرو را به صورت تاثیر یک جسم بر جسم دیگر و یا کنشی که می‌خواهد جسمی را با شتاب به حرکت در آورد، تعریف کرد. نیرو یک **کمیت برداری** است (اندازه و جهت دارد). لذا نیروها طبق قانون جمع متوازی‌الاضلاع ترکیب می‌شوند.

در رابطه با نیروهای وارد بر اجسام صلب، **اصل انتقال پذیری** صادق است. طبق این اصل، نیروی خارجی وارد بر یک جسم صلب را، با حفظ اندازه و جهت آن، می‌توان در امتداد خط اثرش جابه‌جا کرد، بدون اینکه تاثیر خالص آن تغییر کند. به عبارت دیگر، در مکانیک جسم صلب، نیرو را به صورت بردار لغزان می‌توان در نظر گرفت.

نیروها به دو گروه تقسیم می‌شوند: **نیروهای تماسی** و **نیروهای حجمی**. نیروهای تماسی بر اثر تماس مستقیم به وجود می‌آید، مانند نیرویی که از تکیه‌گاه یک جسم بر آن وارد می‌شود. نیروی حجمی بر اثر یک میدان نیرو (مانند میدان گرانشی) به وجود می‌آید.

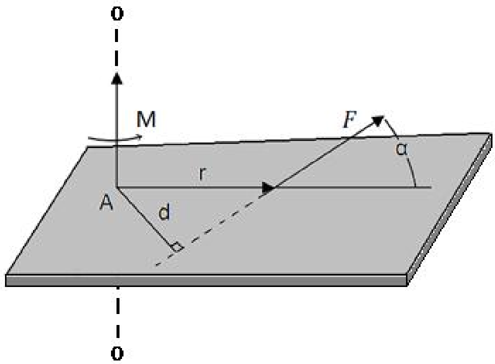
گشتاور

نیرویی که بر جسمی وارد می‌شود، علاوه بر اینکه می‌خواهد جسم را در امتداد خط اثر خود به حرکت در آورد، تمایل دارد جسم را حول یک محور نیز بچرخاند. این تمایل را **گشتاور**، یا **تورک** نیرو می‌گویند و آن را با M نشان می‌دهند.

شکل 1-6 جسمی را نشان می‌دهد که در صفحه خود تحت نیروی F قرار گرفته است. اندازه گشتاور این نیرو نسبت به نقطه A، یا نسبت به محور OO (که از نقطه A می‌گذرد و بر صفحه جسم عمود است)، با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$M = Fd$$

در این رابطه، F اندازه نیرو و d **بازوی گشتاور** است.



شکل 1-6: گشتاور نیروی وارد به جسم

گشتاور M، یک بردار در امتداد عمود بر صفحه جسم است. جهت M بستگی به جهتی دارد که نیروی F می‌خواهد جسم را بچرخاند و برای تعیین آن از قاعده دست راست استفاده می‌شود. به این معنی که، اگر انگشتان دست راست را در جهت دوران قرار دهیم، انگشت شست جهت M را نشان می‌دهد.

اگر بخواهیم گشتاور نیرو را با استفاده از مفهوم ضرب برداری تعریف کنیم، داریم: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

در این رابطه، r بردار مکانی است که ابتدای آن نقطه A و انتهای آن یک نقطه دلخواه روی خط اثر F است. اندازه M چنین است: $M = Frsin \propto = Fd$

قضیه وارینون: قضیه وارینون، یکی از مفیدترین قضایای مکانیک است. طبق این قضیه، گشتاور یک نیرو نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مولفه‌های آن نیرو نسبت به آن نقطه.

کوپل

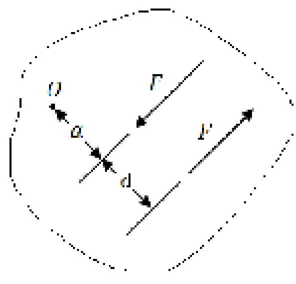
کوپل عبارت است از گشتاور ایجاد شده توسط دو نیروی هم اندازه و متضاد، که دارای خطوط اثر متفاوت هستند. کوپل‌ها کاربردهای مهمی در مکانیک دارند.

شکل 1-7 دو نیروی مساوی و متضاد F و F– را نشان می‌دهد. این دو نیرو که برآیند آنها در تمام امتدادها صفر است، فقط تاثیر چرخشی دارند. گشتاور کل این دو نیرو را نسبت به محوری که بر صفحه آنها عمود است و از نقطه دلخواه O در این صفحه می‌گذرد، گشتاور کوپل می‌گویند. اندازه این گشتاور چنین است:

$$M = F(a + d) - Fa$$

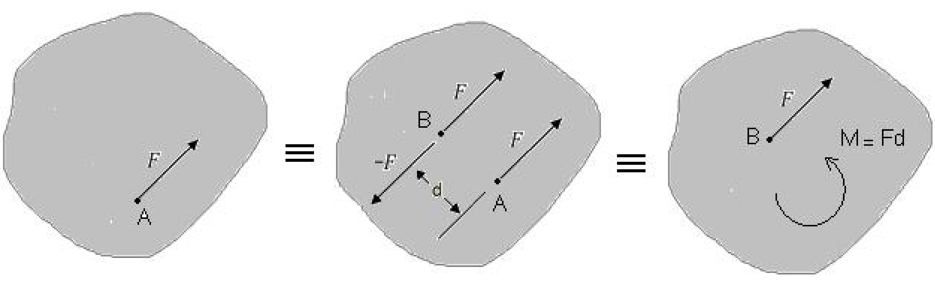
$$\rightarrow M = Fd$$

در این رابطه، d فاصله بین دو نیرو است. ملاحظه می‌شود که گشتاور کوپل برای تمام مراکز گشتاور O دارای اندازه یکسان است.



شکل 1-7: گشتاور کوپل

سیستم نیرو - کوپل: وقتی نیرویی به جسمی وارد می‌شود، می‌توان نیرو را به موازات خود جابه جا کرده و کوپلی را در نظر گرفت که هم اندازه کوپل ناشی از این جابه جایی باشد (شکل 1-8). در این حالت تاثیر خارجی نیروی F تغییر نمی‌کند. ترکیب نیرو – کوپل در شکل سمت راست 1-8 را **سیستم نیرو – کوپل** می‌گویند.



شکل 1-8- سیستم نیرو - کوپل

برآیند: برآیند سیستم نیروهای وارد بر یک جسم، ساده‌ترین ترکیبی است که می‌تواند جایگزین سیستم اولیه شود بدون آنکه تاثیر خارجی وارد بر جسم تغییر کند. اگر برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر با صفر باشد، جسم در تعادل خواهد بود. در رابطه با نیروهای هم‌صفحه، **اندازه و جهت برآیند** را از روابط زیر می‌توان بدست آورد:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \cdots = \sum \mathrm{F}$$

$$R_x = \sum F_x, \qquad R_y = \sum F_y, \qquad R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2}$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = tan^{-1}\frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

اصل گشتاورها: اصل گشتاورها در واقع بسط قضیه وارینون برای سیستم نیروهای **غیرمتقاطع** است. طبق این اصل، گشتاور نیروی برآیند نسبت به نقطه اختیاری O برابر است با مجموع گشتاور مولفه‌های این نیرو نسبت به همان نقطه.

گشتاور سه بعدی

به منظور به دست آوردن گشتاور $\boldsymbol{M}_O$ نیروی F نسبت به نقطه O، اگر r را بردار مکانی در نظر بگیریم که ابتدای آن نقطه O و انتهای آن یک نقطه دلخواه روی خط اثر F است، می‌توان از دترمینان زیر استفاده کرد.

$$\boldsymbol{M}_O = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

بسط دترمینان مزبور به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} + (r_zF_x - r_xF_z)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}$$

گشتاور نسبت به یک محور دلخواه

برای تعیین گشتاور نیروی F نسبت به محورϵ، از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم: $\mathbf{M}_\epsilon = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}.\mathbf{n})\mathbf{n}$

در این رابطه، n بردار واحد متناظر با محور ϵ است. عبارت $\mathbf{r} \times \mathbf{F}.\mathbf{n}$ را **ضرب اسکالر سه گانه** گویند. این ضرب اسکالر سه گانه را به صورت دترمینانی هم می‌توان نوشت:

$$M_\epsilon = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

α و β و γ کسینوسهای هادی بردار واحد n هستند.

تعادل

مفهوم تعادل به طور خلاصه چنین است:

1- وقتی برآیند نیروهای وارد بر یک جسم صفر است ($\sum F = 0$)، جسم دارای تعادل **انتقالی** است. در این حالت مرکز جرم جسم ساکن است یا با سرعت ثابت در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند.

2- اگر برآیند کوپل‌های وارد بر یک جسم صفر باشد ($\sum M = 0$)، آن جسم در تعادل **دورانی** خواهد بود. در این حالت، جسم نمی‌چرخد یا با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد.

3- اگر $\sum F = 0$ و $\sum M = 0$، جسم در تعادل **کامل** خواهد بود.

قبل از کاربرد معادله‌های تعادل ارائه شده در بالا، سیستم مکانیکی را مشخص کرده و تمام نیروهای وارد بر آن را نشان می‌دهیم. **سیستم مکانیکی** عبارت است از یک جسم (یا گروهی از اجسام) که می‌توان آن را از سایر اجسام به طور ذهنی مجزا کرد. پس از مشخص کردن سیستم مکانیکی و مجزا کردن آن از سایر اجسام، **نمودار جسم آزاد** آن را رسم می‌کنیم. در این نمودار، تمام نیروهای خارجی وارد بر سیستم مکانیکی را نشان می‌دهیم. سپس معادله‌های تعادل را برای نمودار جسم آزاد می‌نویسیم و آنها را حل می‌کنیم. نیروهای خارجی وارد بر جسم آزاد می‌تواند ناشی از حذف تکیه گاه و جایگزینی آن با یک نیروی خارجی نیز باشد که جهت و مولفه‌های آن بسته به نوع تکیه گاه متفاوت است.

عضو دو نیرویی، جسمی است که تحت دو نیرو در تعادل است. یک عضو دو نیرویی وقتی در حالت تعادل قرار دارد که نیروها دارای اندازه **برابر**، **در خلاف جهت هم** و **هم امتداد** باشند.

عضو سه نیرویی، جسمی است که تحت سه نیرو در تعادل است. یک عضو سه نیرویی وقتی در حالت تعادل قرار دارد که خطوط اثر سه نیروی وارده **متقاطع** باشند.

سازه‌ها

سازه، یک مجموعه از اجسام متصل به هم است که نیروها را انتقال می‌دهد و بارهای وارده را تحمل می‌کند. خرپاها، قاب‌ها و ماشین‌ها، از انواع سازه‌ها هستند.

سازه نامعین استاتیکی، سازه‌ای است که تعداد قیدهای آن بیشتر از تعداد قیدهای موردنیاز برای حفظ تعادل سازه است. تکیه‌گاه زاید در این سازه‌ها، تکیه‌گاهی است که با حذف آن، تعادل سازه بر هم نمی‌خورد. **درجه نامعینی استاتیکی** را در سازه‌های نامعین از رابطه زیر می‌توان بدست آورد:

تعداد معادله‌های مستقل تعادل – تعداد کل نیروهای خارجی مجهول = درجه نامعینی استاتیکی

سازه معین استاتیکی، سازه‌ای است که کمترین تعداد قید مورد نیاز برای حفظ تعادل را دارد. در این سازه نیروهای خارجی مجهول را توسط معادله‌های تعادل، می‌توان بدست آورد.

خرپا

خرپا از عضوهایی تشکیل می‌شود که در دو انتها به هم متصل شده‌اند. اگر عضوهای یک خرپا در یک صفحه باشند، آن را **خرپای صفحه‌ای** می‌گویند. جز اصلی یک خرپای ساده صفحه‌ای، به صورت مثلث است. این مثلث از سه میله که در دو انتها به هم متصل شده‌اند تشکیل می‌شود.

برای تحلیل نیرو در خرپاهای ساده، عضوهای خرپا را به صورت عضوهای **دو نیرویی** در نظر می‌گیریم. این دو نیرو که در دو انتهای عضو وارد می‌شوند، دارای اندازه برابر، امتداد یکسان و جهت‌های مخالف هستند. عضو دو نیرویی می‌تواند نیروی کششی یا فشاری را تحمل کند. این نیرو در تمام مقاطع عضو دارای اندازه یکسان است.

- در تحلیل خرپا، از وزن عضو (در مقایسه با نیروهای وارده) صرف نظر می‌شود. اگر وزن عضو قابل صرفنظر کردن نباشد، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و هر کدام را در یک انتهای عضو قرار می-دهیم.

- خرپاهای ساده با دو روش تحلیل می‌شوند: روش مفصل‌ها و روش مقاطع.

روش مفصل‌ها برای بدست آوردن نیروهای داخلی اعضا در خرپاها

در حالت کلی هدف از تحلیل خرپاها محاسبه نیروهای تکیه گاهی و همچنین نیروهای داخلی اعضای آن است. به منظور تحلیل خرپا با استفاده از روش مفصل‌ها، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- نمودار آزاد کل خرپا را در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از معادله‌های تعادل برای این نمودار، عکس-العملهای تکیه‌گاهی را می‌یابیم.
- مفصلی که حداقل دارای یک بار معلوم و حداکثر دارای دو نیروی مجهول است را در نظر می‌گیریم.
- اثر عضوهای متصل به مفصل مزبور بر روی آن را به صورت نیروهای خارجی در نظر می‌گیریم.
- با نوشتن معادله تعادل برای مفصل مورد نظر، نیروهای داخلی مجهول اعضای متصل به آن را می‌یابیم.
- این کار را برای مفاصل دیگر نیز ادامه می‌دهیم تا همه نیروهای داخلی اعضا بدست آیند.

- در یک خرپای معین استاتیکی صفحه‌ای، بین تعداد عضوها و تعداد مفصل‌هایی که برای پایداری خرپا مورد نیازند، رابطه زیر برقرار است که در آن m تعداد اعضای خرپا و **j** تعداد مفاصل آن است:

$$m + 3 = 2j$$

- در یک خرپای صفحه‌ای **ساده**، رابطه مذکور به طور خودکار برقرار است.

- رابطه ارائه شده شرط **لازم** برای پایداری یک خرپاست و شرط **کافی** نیست. زیرا یک (یا چند) عضو خرپا را می‌توان طوری آرایش داد که خرپا پایدار نباشد.

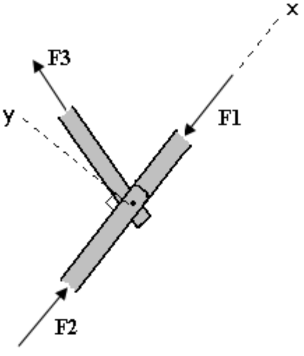
- اگر $m + 3 > 2j$، تعداد عضوها بیشتر از تعداد معادله‌های مستقل تعادل است و خرپا **نامعین استاتیکی** داخلی خواهد بود.

- اگر $m + 3 < 2j$، تعداد عضوها برای پایداری خرپا کافی نیست و خرپا تحت بار فرو می‌ریزد.

حالت‌های خاص

در تحلیل خرپاها حالت‌های خاصی بوجود می‌آیند که در زیر به تعدادی از آنها اشاره شده است:

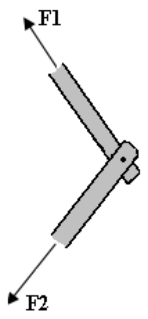
1- هر گاه در یک مفصل از خرپا دو عضو در یک راستا و عضو سوم در راستایی غیر از راستای دو عضو دیگر باشد (شکل 1-9)، در این حالت با نوشتن معادلات تعادل مشخص می‌شود که نیرو در عضو سوم برابر **صفر** است (F3 = 0) و نیرو در دو عضو دیگر با هم برابر هستند (F1 = F2).



شکل 1-9- یکی از حالتهای خاص نیروهای داخلی در خرپا

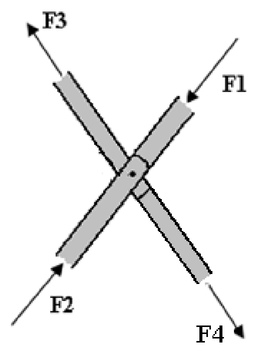
توجه مهم: اگر یک نیروی خارجی که در جهت y مولفه دارد بر مفصل وارد شود، F3 صفر **نخواهد بود**.

2- اگر در یک مفصل فقط دو عضو غیر هم راستا به هم مفصل شده باشند و مفصل تحت بار خارجی قرار **نداشته** باشد (شکل 1-10)، با نوشتن روابط تعادل نتیجه می‌شود که **نیرو در هر دو عضو صفر است** (F1 = F2 = 0).



شکل 1-10- عضوهای صفر نیرویی در خرپا

3- در حالتی که چهار عضو به یک مفصل متصل بوده و دو به دو در یک راستا باشند (شکل 1-11)، با نوشتن روابط تعادل مشخص می‌شود که نیروها در زوج عضوهای هم راستا دارای اندازه **برابر** و در **خلاف جهت هم** هستند (F1=F2 و F3=F4).



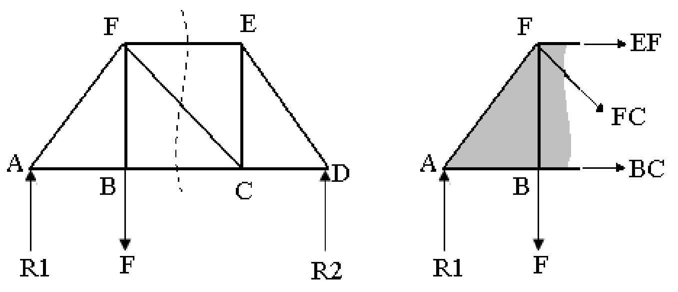
شکل 1-11- یکی از حالتهای خاص نیروهای داخلی در خرپا

ü در حالتهای خاص ارائه شده در بندهای 2و3 برای بدست آوردن نتایج ارائه شده، معادلات تعادل را باید در دو راستای عمود بر راستاهای عضوها نوشت.

روش مقاطع برای بدست آوردن نیروهای داخلی اعضا در خرپاها

در روش مفصلها، برای هر مفصل فقط دو معادله تعادل را می‌نوشتیم. در روش **مقاطع** علاوه بر معادلات تعادل از معادله **گشتاور** نیز استفاده می‌شود. در این روش برای تعیین نیروی داخلی یک عضو، لازم نیست که همه مفصل-ها را تحلیل کنیم. بلکه با استفاده از یک مقطع مناسب که عضو مورد نظر را نیز شامل بشود و نوشتن معادله‌های تعادل برای نمودار آزاد آن، مجهولات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

به عنوان مثال برای بدست آوردن نیروی داخلی عضو EF در شکل 1-12 مقطع نشان داده شده با خط چین مناسب می‌باشد.



شکل 1-12- روش مقاطع برای بدست آوردن نیروهای داخلی اعضای خرپا

- معمولا، مقطع انتخابی نباید شامل بیش از **سه نیروی مجهول** باشد.

- وقتی می‌خواهیم نیرو در عضو مرکزی یک خرپای بزرگ را بیابیم، خط برش معمولا بیش از سه عضو (با نیروی مجهول) را قطع می‌کند. در این حالت، نیرو در بعضی از عضوها را با روش مقاطع می‌یابیم. سپس، با استفاده از روش مفصلها به طرف عضو مجهول پیش می‌رویم.

- برای بریدن خرپا، خط برش را باید از **عضوها** عبور داد نه از مفصل‌ها.

- هر چند که، بعد از برش دادن، هر کدام از مقاطع حاصله را می‌توان برای محاسبات در نظر گرفت، اما بهتر است **مقطع ساده‌تر** را در نظر گرفت.

- در روش مقاطع، **مرکز گشتاور** را باید طوری انتخاب کرد که تعداد بیشتری نیروی مجهول از آن عبور کند.

- مرکز گشتاور می‌تواند روی مقطع تحت بررسی یا در خارج آن باشد.

قاب‌ها و ماشین‌ها

قاب: سازه‌ای است که حداقل یکی از عضوهای آن **چند نیرویی** است. قاب‌ها برای تحمل بارهای خارجی طراحی می‌شوند و در جای خود **ثابت** هستند.

ماشین: سازه‌ای است که حداقل یکی از عضوهای آن عضو **چند نیرویی** است. ماشین‌ها شامل یک یا چند قطعه **متحرک** هستند وبرای تبدیل نیروها (یا کوپل‌های) ورودی به نیروها (یا کوپل‌های) خروجی طراحی می‌شوند.

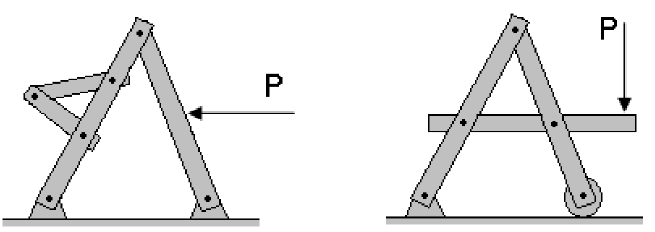
- ü عضوی که سه یا چند نیرو و یا دو یا چند نیرو، همراه با یک یا چند کوپل، بر آن اثر می‌کنند، **عضو چند نیرویی** نامیده می‌شود.
- ü اگر تعداد عضوها یا تکیه‌گاهها یا تکیه‌گاههای یک قاب (یا ماشین) بیشتر از تعدادی باشد که برای پایداری آن مورد نیاز است، قاب (یا ماشین) نامعین استاتیکی خواهد بود.
- ü سازه (ماشین یا قاب) **صلب**، سازه‌ای است که پس از جدایی از تکیه‌گاههایش فرو نمی‌ریزد (شکل 1-13 الف).
- ü در یک سازه **غیر صلب**، نیروهای واکنش در تکیه گاهها را **نمی‌توان** با استفاده از نمودار آزاد کل سازه به دست آورد (شکل 1-13 ب).

برای تحلیل یک قاب (یا ماشین) **صلب** مراحل زیر را طی می‌کنیم:

1- نیروهای واکنش در تکیه گاهها را با استفاده از نمودار آزاد کل سازه می‌یابیم.

2- سازه را تجزیه کرده و معادله‌های تعادل را برای هر عضو آن می‌نویسیم.

3- با حل معادله‌های تعادل نیرو در تمام عضوها را بدست می‌آوریم.



ب الف

شکل 1-13: الف- سازه صلب، ب- سازه غیر صلب

نکته مهم: برای تعیین نیرو در عضوهای یک سازه **غیر صلب**، از ابتدا باید سازه را تجزیه کنیم.

نیروهای گسترده

در بسیاری از موارد نیروها به جای آنکه به صورت نقطه‌ای به جسم وارد شوند، به صورت گسترده به آن اعمال می‌شوند. برای مدل کردن نیروهای گسترده با نیروهای نقطه‌ای آشنایی با مفاهیم مرکز جرم، مرکز ثقل، مرکز خط، مرکز سطح و مرکز حجم لازم است. در ادامه مفاهیم مزبور ارائه خواهند شد.

مرکز ثقل: نقطه‌ای از جسم سه بعدی است که می‌توان نیروی وزن جسم را به صورت نقطه‌ای به آنجا اعمال کرد و مختصات آن از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{\int \mathrm{xdW}}{\mathrm{W}}, \qquad \bar{y} = \frac{\int \mathrm{ydW}}{\mathrm{W}}, \qquad \bar{z} = \frac{\int \mathrm{zdW}}{\mathrm{W}}$$

مرکز جرم: با استفاده از رابطه بالا و رابطه W = mg مختصات مرکز جرم جسم نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{\int \mathrm{xdm}}{\mathrm{m}}, \qquad \bar{y} = \frac{\int \mathrm{ydm}}{\mathrm{m}}, \qquad \bar{z} = \frac{\int \mathrm{zdm}}{\mathrm{m}}$$

اگر چگالی یک جسم ثابت نباشد (جسم **غیرهمگن**)، روابط بالا به صورت زیر در می‌آیند:

$$\bar{x} = \frac{\int \mathrm{x\rho d}V}{\int \mathrm{\rho d}V}, \qquad \bar{y} = \frac{\int \mathrm{y\rho d}V}{\int \mathrm{\rho d}V}, \qquad \bar{z} = \frac{\int \mathrm{z\rho d}V}{\int \mathrm{\rho d}V}$$

- برای جسمی که خارج از گرانش میدان زمین قرار دارد، مرکز ثقل معنی ندارد و جسم فقط دارای مرکز جرم است.
- اگر یک جسم همگن دارای خط تقارن (یا صفحه تقارن) باشد، مرکز جرم همواره روی خط تقارن (یا صفحه تقارن) قرار دارد.

مرکز خط: مختصات مرکز خط یک میله (یا سیم) باریک به طول L، با مساحت مقطع عرضی A و با چگالی ρ از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{\int \mathrm{xd}L}{\mathrm{L}}, \qquad \bar{y} = \frac{\int \mathrm{ydL}}{\mathrm{L}}, \qquad \bar{z} = \frac{\int \mathrm{zdL}}{\mathrm{L}}$$

مرکز سطح: مختصات مرکز سطح یک جسم دو بعدی با چگالی ρ، ضخامت t و مساحت A با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

- در روابط مربوط به مرکز سطح، صورت کسرها را **ممان اول سطح** می‌گویند.

مرکز حجم: برای یک جسم به حجم V و با چگالی ρ، در صورتیکه ρ ثابت باشد، مختصات مرکز حجم را از روابط زیر می‌توان بدست آورد:

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$$

در رابطه با اجسام مرکبی که با استفاده از انتگرالها و به راحتی نمی‌توان مرکز جرم یا مرکز سطح و یا بقیه مراکز معرفی شده در بالا را بدست آورد، جسم را به اجزای کوچکتر و ساده تری تقسیم کرده طوری که تعیین مرکز جرم یا مرکز سطح یا ... آنها راحت باشد. سپس با استفاده از اصل گشتاورها مرکز جسم مرکب اولیه را بدست می‌آوریم. به عنوان مثال نتیجه نهایی برای محاسبه **مرکز سطح** جسم مرکب به صورت زیر است. برای بقیه مراکز معرفی شده هم روابط مشابهی بدست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{\sum A x_c}{\sum A}, \quad \bar{y} = \frac{\sum A y_c}{\sum A}$$

به عنوان مثال، اگر بخواهیم مولفه $\bar{x}$ مرکز سطح یک جسم مرکب را بیابیم، ابتدا یک مبدا مختصات در نظر می-گیریم سپس مولفه x فاصله مرکز سطح هر جز از مبدا انتخاب شده را در مساحت جز مزبور ضرب کرده و نتایج بدست آمده برای همه اجزا را با هم جمع می‌کنیم. با تقسیم حاصلجمع بدست آمده بر کل مساحت جسم مرکب، مولفه $\bar{x}$ مرکز سطح جسم مرکب از مبدا مختصات انتخابی بدست می‌آید.

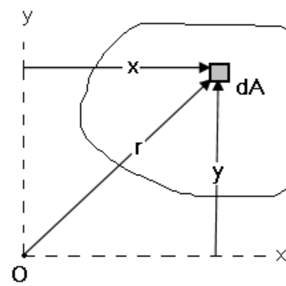
ممان اینرسی

سطح A در صفحه xy را در نظر می‌گیریم (شکل 1-14). **ممان اینرسی** یا ممان دوم سطح A نسبت به محورهای x و y عبارتند از:

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

در این روابط انتگرالها روی سطح A محاسبه می‌شوند. ممان اینرسی سطح A نسبت به نقطهO (یا نسبت به محور z گذرا از O) نیز برابر است با:

$$I_z = \int r^2 dA$$



شکل 1-14- محاسبه ممان اینرسی

ممان اینرسی‌های I_x و I_y را ممان اینرسی‌های **مستطیلی** و I_z را ممان اینرسی **قطبی** می‌نامند. رابطه بین ممان اینرسی‌های مذکور به صورت زیر است:

$$I_z = I_x + I_y$$

شعاع ژیراسیون: شعاع ژیراسیون سطح A نسبت به محورهای x و y و نقطه O را با استفاده از روابط زیر می‌توان بدست آورد:

$$k_x = \sqrt{I_x/A} \qquad k_y = \sqrt{I_y/A} \qquad k_z = \sqrt{I_z/A}$$

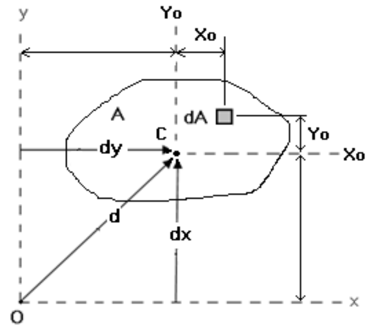
رابطه بین شعاع ژیراسیون‌ها بصورت مقابل است: $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$

قضیه محورهای موازی: ممان اینرسی یک سطح نسبت به یک محور غیر مرکزی (محوری که از مرکز سطح نمی‌گذرد) را بر حسب ممان اینرسی آن سطح نسبت به یک محور مرکزی و موازی با محور غیر مرکزی می‌توان بیان کرد (شکل 1-15). رابطه مزبور به صورت زیر است:

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad_y^2$$

$$I_z = \bar{I}_z + Ad^2$$



شکل 1-15- قضیه محورهای موازی

نکته: قضیه محورهای موازی برای شعاع‌های ژیراسیون نیز به کار می‌رود. به صورت مقابل: $k^2 = \bar{k}^2 + d^2$

اصطکاک

در سطوح صاف نیروهای کنش – واکنش در سطح تماس دو جسم فقط در امتداد عمود بر این سطحها در نظر گرفته می‌شوند. اما، در بسیاری از موارد، علاوه بر نیروی عمودی، نیروی مماسی در سطح تماس را نیز باید در نظر گرفت. این نیروی مماسی را نیروی اصطکاک می‌گویند.

انواع اصطکاک

1- **اصطکاک خشک (کولمب)**: وقتی دو جسم جامد خشک (یا با روانکاری ضعیف) می‌خواهند نسبت به هم حرکت کنند یا نسبت به هم در حال حرکت هستند، اصطکاک خشک در سطح تماس آنها بوجود می‌آید. این نیرو، که در امتداد مماس بر سطح تماس اثر می‌کند، همواره با حرکت موجود **مخالفت** می‌کند.

2- **اصطکاک سیال**: وقتی لایه‌های یک سیال با سرعت‌های متفاوت نسبت به هم حرکت می‌کنند، بین آنها اصطکاک بوجود می‌آید.

3- **اصطکاک داخلی**: در اجسامی که تحت بارگذاری متناوب قرار دارند، اصطکاک داخلی بوجود می‌آید.

نیروی اصطکاک استاتیکی، نیروی اصطکاکی است که به جسم در حال سکونی که نیرویی سعی در به حرکت در آوردن آن دارد، وارد می‌شود. نیروی اصطکاک مزبور، تا جایی که جسم حرکت نکرده باشد، همواره با نیروی وارد به جسم **برابر** است. اگر نیروی وارد به جسم به تدریج افزایش یابد، از مقداری به بعد جسم می‌خواهد

شروع به حرکت کند. نیروی اصطکاکی که در **آستانه حرکت** به جسم وارد می‌شود، **ماکزیمم** نیروی اصطکاک استاتیکی است و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{F_{max} = \mu_s N}$$

که در آن، μ_s **ضریب اصطکاک استاتیکی** و N نیروی عمود بر سطح تماس است.

پس از به حرکت در آمدن جسم، نیروی اصطکاکی که به آن وارد می‌شود، نیروی اصطکاک **جنبشی** است که مقدار آن از ماکزیمم نیروی اصطکاک استاتیکی **کمتر** است و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{F_k = \mu_k N}$$

μ_k **ضریب اصطکاک جنبشی** است.